

## 基于贝叶斯准则的随机共振算法研究

刘书君\* 杨婷 唐明春 王品 李勇明  
(重庆大学通信工程学院 重庆 400044)

**摘要:** 该文针对二元假设检验问题, 首先在贝叶斯准则的基础上, 分析了最小化贝叶斯代价所对应的最优噪声, 将贝叶斯代价的最小化问题等价于虚警概率和/或检测概率的最优化。其次, 在保证一定虚警概率和检测概率的前提下, 建立起能同时改善检测概率和虚警概率的模型。然后分别给出当检测概率一定时虚警概率最小和虚警概率一定时检测概率最大这两种极限情况下对应的最优加性噪声, 并对其进行线性凸组合以获得模型所需的最优加性噪声, 进一步分析并证明了该模型能够成立的充分条件。再次, 获得先验概率已知和未知两种情况下最小化贝叶斯代价时所对应的加性噪声, 且当先验知识发生改变时, 该算法只需调整加性噪声中一个可变参数即可获得相应的最优贝叶斯代价。最后, 结合具体的检测问题, 通过仿真验证了所提算法的有效性。

**关键词:** 信号处理; 贝叶斯准则; 噪声增强模型; 加性噪声; 假设检验

**中图分类号:** TN911.7

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1009-5896(2017)02-0293-08

**DOI:** 10.11999/JEIT160361

## Study on Stochastic Resonance Algorithm Based on Bayes Criterion

LIU Shujun YANG Ting TANG Mingchun WANG Pin LI Yongming  
(College of Communication Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

**Abstract:** The optimal noise that minimizes Bayes risk for a binary hypothesis testing problem is analyzed firstly. As a result, the minimization of Bayes risk can be equivalent as the optimization of the detection probability ( $P_D$ ) and/or false alarm probability ( $P_{FA}$ ). Secondly, a noise enhanced model, which can increase  $P_D$  and decrease  $P_{FA}$  simultaneously, is established under the premise of maintaining predefined  $P_{FA}$  and  $P_D$ . Then the optimal additional noise of this model is obtained by a convex combination of two optimal noises of two limit cases, which are the minimization of  $P_{FA}$  with maintaining the predefined  $P_D$  and the maximization of  $P_D$  with maintaining the predefined  $P_{FA}$ , respectively. Furthermore, the sufficient conditions for this model are given. What's more, the additive noise that minimizes the Bayes risk is determined when the prior probabilities are known or not, and the corresponding additive noise can be obtained by recalculating a parameter only if the prior information changes. Finally, the availability of algorithm is proved through the simulation combined with a specific detection example.

**Key words:** Signal processing; Bayes criterion; Noise enhanced model; Additive noise; Hypothesis testing

### 1 引言

噪声无处不在, 理解和掌握噪声的分布和性能

是一个非常重要的问题。在经典信号处理中, 噪声被视为不需要的信号或是对系统的干扰<sup>[1]</sup>。例如, 系统中噪声越多信道容量越小, 使得检测性能和估计精度都有所下降。然而, 噪声对系统的影响并不都是负面的。自 20 世纪 80 年代文献[2]首次提出随机共振的概念以来, 噪声的积极作用被用于物理、化学、磁学、和电子学等许多领域的研究中<sup>[3-11]</sup>。文献[11]将随机共振应用到双基地逆合成孔径雷达成像系统中, 有效地提高了输出信噪比, 使得雷达接收机的动态范围扩大, 对目标精细特征探测和识别的能力提升。

随机共振在信号处理中所发挥的重要作用也逐渐引起人们的广泛关注, 其本质是指噪声在一定条件下, 通过非线性系统对信号和系统起到积极的增

收稿日期: 2016-04-14; 改回日期: 2016-10-18; 网络出版: 2016-12-20

\*通信作者: 刘书君 liusj@cqu.edu.cn

基金项目: 重庆市基础与前沿研究(cstc2016jcyjA0134, cstc2016jcyjA0043), 国家自然科学基金(61501072, 61301224, 41404027, 61108086, 61471072), 重庆市社会事业与民生保障专项(cstc2016shmszx40002), 中央高校重点基金(CDJZR155507)

Foundation Items: The Basic and Advanced Research Project in Chongqing (cstc2016jcyjA0134, cstc2016jcyjA0043), The National Natural Science Foundation of China (61501072, 61301224, 41404027, 61108086, 61471072), The Chongqing Social Undertaking and People's Livelihood Guarantee Science and Technology Innovation Special Foundation (cstc2016shmszx40002), The Fundamental Research Funds for the Central Universities (CDJZR155507)

强作用,也被称为噪声增强现象<sup>[3]</sup>。近几年的研究表明,在信号检测理论中也存在随机共振现象。给一些系统的输入加入噪声或增加系统的背景噪声水平,可明显提高系统输出的性能<sup>[11-17]</sup>。如文献[13]引入匹配噪声,通过匹配非线性系统、噪声和信号三者的关系,从而改变能量检测统计量的分布,有效地检测信号的存在性。在假设检测问题的随机共振理论中,通常采用信噪比<sup>[11]</sup>、互信息量<sup>[12]</sup>、检测概率<sup>[13,15]</sup>的提高,或者平均错误率<sup>[14]</sup>的降低作为衡量性能改善的标准,并根据奈曼皮尔逊准则<sup>[15]</sup>、贝叶斯准则<sup>[16]</sup>以及极大极小准则<sup>[17]</sup>来分析如何通过加入噪声来提高非最优检测器的性能。如文献[15]分析了在虚警概率一定的情况下,给观察值加入独立噪声使得检测概率最大化的问题,并推导出对应的最优噪声概率密度函数及检测概率能否提高的充分条件;文献[16]研究了在严格贝叶斯准则框架下噪声增强多元复合假设检验问题,其中贝叶斯准则和极大极小准则<sup>[17]</sup>下的随机共振优化问题可看作严格贝叶斯框架下的特例。

在以贝叶斯代价最小准则添加噪声的相关文献中,研究者通常把贝叶斯代价作为一个整体来估计其最优化时对应的加性噪声,虽然可以优化贝叶斯代价,但不能保证检测器的虚警概率和检测概率同时得到改善,甚至可能使得其中之一性能降低。同时,当先验概率或者条件代价发生变化时,需要重新估计新参数下最优贝叶斯代价所需的加性噪声,增加了计算的复杂度。本文在研究贝叶斯准则下如何添加加性噪声的问题时,将贝叶斯代价的优化转化为虚警概率和检测概率的优化问题。因此,本文在保证一定虚警概率和检测概率的前提下,首先提出了一种基于贝叶斯准则的随机共振模型,并利用当检测概率一定时,虚警概率取最小值时对应的最优加性噪声,以及虚警概率一定时,最大化检测概率所对应的加性噪声这两种极限情况下的最优噪声的线性组合获得最小化贝叶斯代价的合适的噪声。然后,详细推导了这两种极限情况所对应的最优噪声。其次,给出了该模型能够成立的加性噪声以及充分条件。再次,给出了先验概率已知和未知时,分别对应的最小化贝叶斯代价的加性噪声。本文算法的优势在于当改变先验概率和条件代价时,只需调节最优加性噪声模型中的参数值即可获得最小化贝叶斯代价对应的加性噪声,在保证性能的同时简化了运算。最后,结合具体的检测问题对不同情况下对应的最优噪声进行求解,并通过仿真分析了在不同情况下添加噪声时对检测性能的影响,证明了本文算法的有效性和正确性。

## 2 最优贝叶斯代价的随机共振算法

### 2.1 基于贝叶斯准则的随机共振

考虑如式(1)中的二元假设检验问题:

$$H_i : p_i(x), \quad i = 0, 1 \quad (1)$$

其中,  $p_i(x)$  为观察值  $x$  在  $H_i$  成立条件下的概率密度函数,  $x \in R^K$ 。假设对任意  $x$ , 选择  $H_1$  的概率为  $\phi(x)$ ,  $0 \leq \phi(x) \leq 1$ 。在一些情况下, 给系统输入信号  $x$  加入额外的噪声可以提高一个非最优检测器的性能。通过给观察值  $x$  加入与之独立的噪声  $n$ , 以得到加噪后的信号  $y = x + n$ , 则  $y$  在  $H_i$  成立条件下的概率密度函数  $p_y(y; H_i)$  可表示为  $p_i(x)$  与所加噪声的概率密度函数  $p_n(\cdot)$  的卷积<sup>[18]</sup>。

$$p_y(y; H_i) = p_n(\cdot) * p_i(\cdot) = \int_{R^K} p_n(n) p_i(y - n) dn \quad (2)$$

式中,  $*$  表示卷积符号。对任意固定检测器, 无论其本身是否为最优检测器, 均可通过优化该加性噪声  $n$  来提高系统性能。根据贝叶斯准则, 最优加性噪声即为使得贝叶斯代价最小的噪声, 即

$$p_n^{\text{opt}} = \arg \min_{p_n(\cdot)} C^y \quad (3)$$

其中,  $C^y$  为加入噪声后的修正贝叶斯代价, 且

$$C^y = \sum_{i=0}^1 p(H_i) C_i^y(\phi) \quad (4)$$

其中,  $p(H_i)$ ,  $i = 0, 1$  表示假设  $H_i$  的先验概率, 而  $C_i^y(\phi)$  表示  $\phi(y)$  判决  $H_i$  成立的条件代价。

$$C_i^y(\phi) = \sum_{j=0}^1 C_{ji} p(H_j | H_i) \quad (5)$$

其中,  $C_{ji}$  和  $p(H_j | H_i)$  分别表示  $H_i$  为真时判决  $H_j$  成立的代价和条件概率, 且有  $p(H_1 | H_0)$  和  $p(H_1 | H_1)$  分别为噪声修正观察值  $y$  所对应的虚警概率  $P_{FA}^y$  和检测概率  $P_D^y$ 。

$$\begin{aligned} P_{FA}^y &= \int_{R^K} \phi(y) p_y(y; H_0) dy \\ &= \int_{R^K} p_n(n) \left( \int_{R^K} \phi(y) p_0(y - n) dy \right) dn \\ &= \int_{R^K} p_n(n) F_0(n) dn = E_n(F_0(n)) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} P_D^y &= \int_{R^K} \phi(y) p_y(y; H_1) dy \\ &= \int_{R^K} p_n(n) F_1(n) dn = E_n(F_1(n)) \end{aligned} \quad (7)$$

其中,

$$F_i(n) = \int_{R^K} \phi(y) p_i(y - n) dy \quad (8)$$

由式(6)和式(7)可得,  $P_{FA}^y$  和  $P_D^y$  可看作当所加噪声的概率密度函数为  $p_n(n)$  时,  $F_0(n)$  和  $F_1(n)$  的数学期望。将式(5)展开, 代入式(4)可得

$$\begin{aligned} C^y &= p(H_0) C_{00} + p(H_1) C_{01} + p(H_0) (C_{10} - C_{00}) P_{FA}^y \\ &\quad - p(H_1) (C_{01} - C_{11}) P_D^y \end{aligned} \quad (9)$$

假设  $p(H_i)$  和  $C_{ji}$  已知, 且有  $C_{ji} > C_{ii}$  ( $j \neq i$ ), 那么  $p(H_0)C_{00} + p(H_1)C_{01} > 0$ , 则贝叶斯代价的优化问题可等价为使  $P_{FA}$  和  $P_D$  同时得到改善的问题。在  $P_{FA}^y \leq \alpha$  和  $P_D^y \geq \beta$  的约束条件下, 假设  $z_1$  和  $z_2$  分别代表加入噪声后虚警概率和检测概率的相对改善程度, 即  $z_1 = \alpha - P_{FA}^y$ ,  $z_2 = P_D^y - \beta$ , 那么式(9)可改写为

$$C^y = p(H_0)C_{00} + p(H_1)C_{01} + p(H_0)(C_{10} - C_{00}) \cdot (\alpha - z_1) - p(H_1)(C_{01} - C_{11})(\beta + z_2)$$

$$= C_o - [p(H_0)(C_{10} - C_{00})z_1 + p(H_1)(C_{01} - C_{11})z_2] \quad (10)$$

其中,  $C_o = p(H_0)C_{00} + p(H_1)C_{01} + p(H_0)(C_{10} - C_{00})\alpha - p(H_1)(C_{01} - C_{11})\beta$  为一个常量, 对比式(9)可见当  $\alpha = P_{FA}^x$  和  $\beta = P_D^x$  时,  $C_o$  即为原观察值  $x$  所对应的贝叶斯代价。其中,  $P_{FA}^x$  和  $P_D^x$  分别为原检测器的虚警概率和检测概率  $P_{FA}^x = \int_{R^K} \phi(x)p_0(x)dx$ ,  $P_D^x = \int_{R^K} \phi(x)p_1(x)dx$ 。由于  $0 < P(H_i) < 1$ ,  $C_{10} > C_{00}$  且  $C_{01} > C_{11}$ , 在  $P_{FA}^y \leq \alpha$  和  $P_D^y \geq \beta$  的约束条件下, 只需考虑如何使得  $z_1$  和/或  $z_2$  的值更大。

## 2.2 最优贝叶斯代价的随机共振模型

基于前面的分析可知, 优化贝叶斯代价等价于提高  $z_1$  和/或  $z_2$  的值。因此, 本文在  $P_{FA}^y \leq \alpha$  和  $P_D^y \geq \beta$  的条件下, 提出了以下随机共振模型, 即

$$\left. \begin{aligned} P_{FA}^y &= \alpha - z_1, 0 \leq z_1 \leq \alpha \\ P_D^y &= \beta + z_2, 0 \leq z_2 \leq 1 - \beta \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

由于在同时提高  $z_1$  与  $z_2$  的情况下求解最佳噪声比较困难, 因此本文首先考虑以下两种极限情况:

(1) 当  $P_D^y = \beta$  时, 使得  $P_{FA}^y$  最小。即当  $z_2 = 0$  时, 求得此时  $z_1$  可取得的最大值  $z_1^o$ , 并假设对应的最优噪声概率密度函数为  $p_{n,1}^{opt}(n)$ 。

(2) 当  $P_{FA}^y = \alpha$  时, 使得  $P_D^y$  最大。即当  $z_1 = 0$  时, 求得此时  $z_2$  可取得的最大值  $z_2^o$ , 并假设对应的最优噪声概率密度函数为  $p_{n,2}^{opt}(n)$ 。

为求解能满足式(11)中使得  $P_{FA}^y \leq \alpha$  和  $P_D^y \geq \beta$  同时成立时所对应的加性噪声, 本文充分利用极限情况(1)和情况(2)对应的最优噪声, 将  $p_{n,1}^{opt}(n)$  与  $p_{n,2}^{opt}(n)$  进行线性凸组合, 获得一个概率密度函数如式(12)所示的噪声:

$$p_n(n) = \eta p_{n,1}^{opt}(n) + (1 - \eta)p_{n,2}^{opt}(n), 0 \leq \eta \leq 1 \quad (12)$$

其中,  $\eta$  为可调参数。结合式(11)和两种极限情况, 可知加入概率密度如式(12)所示的噪声  $n$  时获得的虚警概率和检测概率为

$$\left. \begin{aligned} P_{FA}^y &= \alpha - \eta z_1^o < \alpha \\ P_D^y &= \beta + (1 - \eta)z_2^o > \beta \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

对比式(11)可见,  $z_1 = \eta z_1^o$  和  $z_2 = (1 - \eta)z_2^o$ , 此时的  $z_1$  和  $z_2$  分别满足  $0 \leq z_1 \leq z_1^o$  和  $0 \leq z_2 \leq z_2^o$ 。可见, 加入概率密度函数如式(12)的加性噪声后不仅能实现综合性能的改善, 还可根据不同的应用需求, 通过改变  $\eta$  的大小在检测概率与虚警概率的改善程度上进行调节, 为便于分析, 将式(13)中  $P_{FA}^y$  与  $P_D^y$  同时改善的情况视为情况(3)。

## 3 综合性能改善下的最优加性噪声

为了获得如式(13)所示情况(3)对应的加性噪声概率密度函数, 以下分别对两种极限情况下的性能改善程度与相应最优噪声概率密度函数进行详细分析, 并给出可同时改善虚警概率和检测概率的充分条件。

### 3.1 虚警概率最佳改善度 $z_1^o$ 及对应加性噪声

为求解情况(1)对应的最优噪声概率密度函数  $p_{n,1}^{opt}(n)$ , 可充分利用  $F_i(n)$  与  $p_n(n)$  的内在关系。由式(8)知,  $F_i(n)$  是关于  $n$  的函数, 令  $F_1(n) = f_1$ , 则有  $n = F_1^{-1}(f_1)$ , 其中  $F_1^{-1}$  是  $F_1$  的逆函数。与  $f_1$  对应的  $F_0(n)$  表示为  $F_0(n) = f_0 = F_0(F_1^{-1}(f_1))$ 。且由  $F_0(n)$  和  $F_1(n)$  的定义可知,  $0 < f_0, f_1 < 1$ 。其中  $f_1$  与  $n$  可为单值映射, 也可为多值映射。因此, 与  $f_1$  对应的  $f_0$  为单一的值或一个集合。当给定  $R^K$  域的噪声概率密度函数  $p_n(\cdot)$  时, 噪声在  $f_1$  域的概率密度函数也唯一确定。因此, 情况(1)可由  $f_1$  表示为

$$\left. \begin{aligned} \min_{p_{n,f_1}} P_{FA}^y &= \min_{p_{n,f_1}} \int_0^1 p_{n,f_1}(f_1) f_0 df_1 \\ P_D^y &= \int_0^1 p_{n,f_1}(f_1) f_1 df_1 = \beta \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

设  $\Gamma(t) = \inf(f_0 : f_1 = t)$  为  $f_1 = t$  时对应的最小  $f_0$ ,  $t_0 = \arg \max_t (\Gamma(t) = F_{0m})$  为当  $F_{0m} = \min(\Gamma(t))$  时,  $\Gamma(t) = F_{0m}$  对应的最大  $f_1$ 。类似于文献[15]的推导, 可得情况(1)对应的虚警概率密度函数  $p_{n,f_1}^{opt}(f_1)$  及虚警概率的改善程度  $z_1^o$ 。

$$p_{n,f_1}^{opt}(f_1) = \frac{f_{12}(c_0) - \beta}{f_{12}(c_0) - f_{11}(c_0)} \delta(f_1 - f_{11}(c_0)) + \frac{\beta - f_{11}(c_0)}{f_{12}(c_0) - f_{11}(c_0)} \delta(f_1 - f_{12}(c_0)) \quad (15)$$

$$P_{FA, opt}^y = w + c_0 \beta, z_1^o = \alpha - P_{FA, opt}^y \quad (16)$$

其中  $c_0 \in R$ 。当  $t_0 < \beta$  时, 通过调整  $c_0$  的值, 取得  $W(f_1, c) = \Gamma(f_1) - cf_1$  在区间  $I_1 = [0, \beta]$ ,  $I_2 = [\beta, 1]$  相同的最小值  $w$ ,  $w$  在区间  $I_1$  和区间  $I_2$  所分别对应的最大  $f_1$  分别即为  $f_{11}(c_0)$  和  $f_{12}(c_0)$ 。将  $p_{n,f_1}^{opt}(f_1)$  转化为  $R^K$  域的  $p_{n,1}^{opt}(n)$ :

$$p_{n,1}^{opt}(n) = \zeta \delta(n - n_1) + (1 - \zeta) \delta(n - n_2) \quad (17)$$

其中,  $\zeta = (f_{12}(c_0) - \beta) / (f_{12}(c_0) - f_{11}(c_0))$ 。而  $n_1$  由等

式  $F_1(n_1) = f_{11}(c_0)$  和  $F_0(n_1) = w + c_0 f_{11}(c_0)$  确定,  $n_2$  由等式  $F_1(n_2) = f_{12}(c_0)$  和  $F_0(n_2) = w + c_0 f_{12}(c_0)$  确定。

### 3.2 检测概率最佳改善度 $z_2^o$ 及对应加性噪声

由文献[15]可知, 极限情况(2)下的最优噪声概率密度函数和加噪后的检测概率及其改善程度表示为

$$p_{n,f_0}^{\text{opt}}(f_0) = \frac{f_{02}(k_0) - \alpha}{f_{02}(k_0) - f_{01}(k_0)} \delta(f_0 - f_{01}(k_0)) + \frac{\alpha - f_{01}(k_0)}{f_{02}(k_0) - f_{01}(k_0)} \delta(f_0 - f_{02}(k_0)) \quad (18)$$

$$P_{D,\text{opt}}^y = \nu + k_0 \alpha, \quad z_2^o = P_{D,\text{opt}}^y - \beta \quad (19)$$

其中,  $k_0 \in R$ 。当  $G(\tau) = \sup(f_1 : f_0 = \tau)$  的最大值  $F_{1M} = \max(G(\tau))$  对应的最小  $f_0$  大于  $\alpha$  时, 即  $\tau_0 = \arg \min_{\tau} (G(\tau) = F_{1M}) > \alpha$  时, 调整  $k$  值, 可获得  $J(f_0, k) = G(f_0) - k f_0$  在区间  $I_1 = [0, \alpha]$  和  $I_2 = [\alpha, 1]$  的相同最大值  $\nu$  及相应的  $k$  值  $k_0$ ,  $\nu$  在区间  $I_1$  和  $I_2$  所对应的最小  $f_0$  即为  $f_{01}(k_0)$  和  $f_{02}(k_0)$ 。将  $p_{n,f_0}^{\text{opt}}(f_0)$  转化为  $R^K$  域的  $p_{n,2}^{\text{opt}}(n)$ :

$$p_{n,2}^{\text{opt}}(n) = \lambda \delta(n - n_1) + (1 - \lambda) \delta(n - n_2) \quad (20)$$

其中,  $\lambda = (f_{02}(k_0) - \alpha) / (f_{02}(k_0) - f_{01}(k_0))$ ,  $n_1$  由等式  $F_1(n_1) = \nu + k_0 f_{01}(k_0)$  和  $F_0(n_1) = f_{01}(k_0)$  确定,  $n_2$  由等式  $F_1(n_2) = \nu + k_0 f_{02}(k_0)$  和  $F_0(n_2) = f_{02}(k_0)$  确定。

在获得如式(17)和式(20)所示的两种极限情况下对应的最优噪声后, 将其代入式(13), 并根据具体应用需求选择适合的参数  $\eta$  即可获得能同时改善检测概率与虚警概率的适合的加性噪声概率密度函数。此外, 当  $t_0 > \beta$  或  $\tau_0 < \alpha$  时, 可直接得出式(13)模型所定义的情况(3)中适合的加性噪声可为概率密度函数为  $\delta(n - n_0)$  的直流信号  $n_0$ 。当  $t_0 > \beta$  时,  $n_0$  由  $P_{FA,\text{opt}}^y = F_0(n_0) = F_{0m}$  和  $P_{D,\text{opt}}^y = F_1(n_0) = t_0$  确定; 当  $\tau_0 < \alpha$  时,  $n_0$  由  $P_{FA,\text{opt}}^y = F_0(n_0) = \tau_0$  和  $P_{D,\text{opt}}^y = F_1(n_0) = F_{1M}$  确定。

### 3.3 检测概率和虚警概率同时改善的充分条件

根据以上对两种极限情况下最优噪声的分析, 给出可以使得  $P_{FA}^y \leq \alpha$  和  $P_D^y \geq \beta$  同时成立的充分条件:

- (1) 当  $\Gamma(\beta) < \alpha$  时,  $G(\Gamma(\beta)) > \beta$ ;
- (2) 当  $G(\alpha) > \beta$  时,  $\Gamma(G(\alpha)) < \alpha$ ;
- (3)  $\Gamma(t)$  关于  $G(\alpha)$  二阶连续可微且  $\Gamma''(G(\alpha)) < 0$ , 且  $G(\alpha) > \beta$ ;
- (4)  $G(\tau)$  关于  $\Gamma(\beta)$  二阶连续可微且  $G''(\Gamma(\beta)) > 0$ , 且  $\Gamma(\beta) < \alpha$ 。

以上 4 个条件中任意一个成立时, 至少存在一个概率密度函数为  $p_n(\cdot)$  的噪声使得  $P_{FA}^y \leq \alpha$  和  $P_D^y \geq \beta$  同时成立。

**证明** (1) 当  $\Gamma(\beta) < \alpha$  时,  $G(\Gamma(\beta)) > \beta$ 。根据  $\Gamma$  和  $G$  定义可知, 至少存在一个噪声  $n_0$  使得  $F_0(n_0) = \Gamma(\beta) < \alpha$ ,  $F_1(n_0) = G(\Gamma(\beta)) > \beta$ 。因此, 加入概率密度函数为  $p_n(n) = \delta(n - n_0)$  的噪声即可使得  $P_{FA}^y \leq \alpha$  和  $P_D^y \geq \beta$  同时成立。同理可证(2)成立。(3) 当  $\Gamma(t)$  关于  $G(\alpha)$  二阶连续可微且  $\Gamma''(G(\alpha)) < 0$  时, 存在  $\xi > 0$  使得  $\Gamma''(\cdot) < 0$  在区间  $\Delta = (G(\alpha) - \xi, G(\alpha) + \xi)$  成立, 假设加性噪声的概率密度函数为  $p_{n,f_1}(f_1) = \frac{1}{2} \delta(f_1 - (G(\alpha) - \frac{1}{2}\xi)) + \frac{1}{2} \delta(f_1 - (G(\alpha) + \frac{1}{2}\xi))$ , 那么虚警概率  $P_{FA}^y = \int_0^1 \Gamma(f_1) p_{n,f_1}(f_1) df_1 = \frac{1}{2} \Gamma(G(\alpha) - \frac{1}{2}\xi) + \frac{1}{2} \Gamma(G(\alpha) + \frac{1}{2}\xi)$ 。又由  $\Gamma(t)$  的凹凸性及  $G$  和  $\Gamma$  的定义, 可得  $P_{FA}^y < \Gamma(G(\alpha)) \leq \alpha$ 。而此时  $P_D^y = \int_0^1 f_1 p_{n,f_1}(f_1) df_1 = G(\alpha) \geq \beta$ 。同理可证条件(4)也成立。证毕

## 4 贝叶斯准则下最优加性噪声

将式(13)代入式(10)得

$$C^y = C_o - [p(H_0)(C_{10} - C_{00})\eta z_1^o + p(H_1) \cdot (C_{01} - C_{11})(1 - \eta) z_2^o] \\ = C_o - [p(H_1)(C_{01} - C_{11})z_2^o + \eta(p(H_0) \cdot (C_{10} - C_{00})z_1^o - p(H_1)(C_{01} - C_{11})z_2^o)] \quad (21)$$

因此, 当  $p(H_0)(C_{10} - C_{00})z_1^o - p(H_1)(C_{01} - C_{11})z_2^o > 0$  时,  $\eta = 1$  时  $C^y$  取得最小值, 反之  $\eta = 0$ 。值得注意的是, 即使  $\eta$  取  $(0, 1)$  区间中的其他值, 仍有  $C < C_o$ 。当  $\alpha = P_{FA}^x$  和  $\beta = P_D^x$  时, 噪声增强检测器性能总是优于原检测器。本文将贝叶斯代价的优化直接等价于寻求  $P_{FA}$  和  $P_D$  的最佳改善程度, 与文献[16]中直接对贝叶斯代价进行优化相比, 本文直接对  $P_{FA}$  和  $P_D$  进行优化, 不仅可以保证虚警和检测性能, 而且当检测器固定时, 即使  $p(H_i)$  和  $C_{ji}$  这些先验知识发生改变, 也不必重复加性噪声的求解过程, 只需将  $p(H_i)$  和  $C_{ji}$  代入式(21)中并调节  $\eta$  值即可获得相应的加性噪声概率密度函数。

特别地, 当  $C_{ji}$  已知而先验概率  $p(H_i)$  未知时, 采用极大极小值准则来避免可能产生的极大代价, 使最大可能代价极小化。此时, 贝叶斯代价的优化等价于使  $\max(C_0^y(\phi), C_1^y(\phi))$  最小化的问题, 其中

$$C_0^y(\phi) = C_{00}(1 - P_{FA}^y) + C_{10}P_{FA}^y \\ = C_{00} + (C_{10} - C_{00})P_{FA}^y \quad (22)$$

$$C_1^y(\phi) = C_{01}(1 - P_D^y) + C_{11}P_D^y \\ = C_{01} - (C_{01} - C_{11})P_D^y \quad (23)$$

式(22)与式(23)中最小值的求解分别对应了极限情况(1)和情况(2)的求解。在文献[17]中, 求

$\max(C_0^y(\phi), C_1^y(\phi))$  的最小化的问题是一个非线性的过程，对应最优加性噪声设为  $p_n^{\text{opt}}(n)$ ，因为  $C_{ji}$  为已知常量则  $p_n^{\text{opt}}(n)$  最终是作用在  $P_{FA}^y$  或者  $P_D^y$  上的。在  $P_{FA}^y \leq \alpha$  和  $P_D^y \geq \beta$  的情况下，通过对  $p_{n,1}^{\text{opt}}(n)$  和  $p_{n,2}^{\text{opt}}(n)$  的求解可知， $p_{n,1}^{\text{opt}}(n)$ ， $p_{n,2}^{\text{opt}}(n)$  分别为令  $P_{FA}^y$ ， $P_D^y$  取得最优值的加性噪声，则有  $\min_{p_{n,1}^{\text{opt}}(n)} P_{FA}^y \geq \min_{p_{n,1}^{\text{opt}}(n)} P_{FA}^y$ ， $\min_{p_{n,2}^{\text{opt}}(n)} P_D^y \leq \min_{p_{n,2}^{\text{opt}}(n)} P_D^y$ 。因此，在此情况下，本文算法优于文献[17]中的结果。

### 5 实验与仿真分析

本节将针对不同的背景噪声分布下已知常量的检测问题，结合仿真分析对前文的结论进行验证。考虑如下二元假设检验例子。

$$\left. \begin{aligned} H_0 : x &= v \\ H_1 : x &= A + v \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

其中， $x \in R$ ， $v$  为背景噪声， $A$  为已知常量且  $A > 0$ 。假设检测器判别函数为

$$\phi(y) = \begin{cases} 1, & y > A/3 \\ 0, & y \leq A/3 \end{cases} \quad (25)$$

其中， $y = x + n$ ， $n$  表示加性独立噪声。此例中，令  $\alpha = P_{FA}^x$  和  $\beta = P_D^x$ 。

#### 5.1 高斯分布背景噪声

假设  $v$  是一个高斯混合噪声，其概率密度函数为

$$p_v(x) = \sum_{i=1}^N \omega_i \gamma(x; \mu_i, \sigma_i^2) \quad (26)$$

其中， $\omega_i > 0$ ， $i = 1, 2, \dots, N$ ， $\sum_{i=1}^N \omega_i = 1$ ，及  $\gamma(x; \mu_i, \sigma_i^2) = (1/\sqrt{2\pi\sigma_i^2}) \exp[-(x - \mu_i)^2/2\sigma_i^2]$ ， $i=1, 2, \dots, N$ 。则  $x$  在  $H_0$  和  $H_1$  下的分布分别表示为

$$p_0(x) = \sum_{i=1}^N \omega_i \gamma(x; \mu_i, \sigma_i^2) \quad (27)$$

$$p_1(x) = \sum_{i=1}^N \omega_i \gamma(x; \mu_i + A, \sigma_i^2) \quad (28)$$

因为  $\phi(x)$  和  $p_i(x)$  已知，由式(8)可求得

$$\begin{aligned} F_0(n) &= \int_0^{+\infty} \phi(y) p_0(y-n) dy \\ &= \sum_{i=1}^N \omega_i Q\left(\frac{A/3-n-\mu_i}{\sigma_i}\right) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} F_1(n) &= \int_0^{+\infty} \phi(y) p_1(y-n) dy \\ &= \sum_{i=1}^N \omega_i Q\left(\frac{-(2A)/3-n-\mu_i}{\sigma_i}\right) \end{aligned} \quad (30)$$

其中， $Q(x) = \int_x^{+\infty} (1/\sqrt{2\pi}) \exp(-t^2/2) dt$ ，为便于计

算令  $N = 2$ ， $\omega_1 = 1/2$ ， $\mu_1 = -\mu_2 = -\mu$ ， $\sigma_i = \sigma$ 。则  $F_0(n) = \frac{1}{2} Q\left(\frac{A/3-n+\mu}{\sigma}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{A/3-n-\mu}{\sigma}\right)$ ， $F_1(n) = \frac{1}{2} Q\left(\frac{-(2A)/3-n+\mu}{\sigma}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{-(2A)/3-n-\mu}{\sigma}\right)$ ， $p_0(x) = \frac{1}{2} \gamma(x; -\mu, \sigma^2) + \frac{1}{2} \gamma(x; \mu, \sigma^2)$ ， $p_1(x) = \frac{1}{2} \gamma(x; -\mu+A, \sigma^2) + \frac{1}{2} \gamma(x; \mu+A, \sigma^2)$ 。由  $Q$  函数的定义可知  $F_1(n) > F_0(n)$ ，且  $F_1(n)$  与  $F_0(n)$  一一对应，都关于  $n$  单调递增。因此， $\Gamma(f_1) = f_0(f_1) = f_0$ ， $G(f_0) = f_1(f_0) = f_1$ 。 $F_0(n)$  与  $F_1(n)$  的关系如图 1 所示。

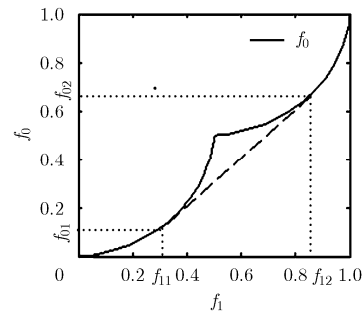


图 1  $f_0 = F_0(n)$  与  $f_1 = F_1(n)$  的关系示意图

在图 1 中，由  $F_0(n)$  与  $F_1(n)$  的关系，结合对加噪能改善性能的充分条件的分析可知，实线与虚线之间的区域表示可以通过加噪降低虚警概率的区域；同时，由文献[15]可知这一区域也是加入噪声可以提高检测性能的区域。此例中  $f_{01}(k_0)$ ， $f_{02}(k_0)$  分别与  $f_{11}(c_0)$ ， $f_{12}(c_0)$  一一对应，即极限情况(1)与极限情况(2)中所求的  $n_1$  和  $n_2$  相同，此例中  $n_1$  和  $n_2$  可近似为  $n_1 = -\mu - A/6$ ， $n_2 = +\mu - A/6$ 。接下来，本文将通过 MATLAB 仿真，在不同背景噪声方差  $\sigma$  情况下，对极限情况(1)，情况(2)和  $\eta = 0.5$  时情况(3)对应的噪声增强检测器和原检测器获得的检测概率和虚警概率进行分析，同时也对比分析了相同情况下对应的贝叶斯代价。

令  $\mu = 3$ ， $A = 1$  以及  $\eta = 0.5$ ，将  $\sigma$  以 0.1 的间隔从 0 增至 4。对每个  $\sigma$  值，求取极限情况(1)，情况(2)和情况(3)对应的虚警概率和检测概率，并将它们与原检测器进行对比，结果如图 2(a) 和图 2(b) 所示。此外，还给出了  $p(H_0) = 0.4$ ， $C_{00} = C_{11} = 0$  和  $C_{10} = C_{01} = 1$  时，相同仿真条件下对应的最优噪声增强器和原检测器的贝叶斯代价，结果如图 2(c) 所示。随着背景噪声方差  $\sigma$  的逐渐增大，如图 2(a) 所示，原检测器虚警概率先保持恒定值，然后逐渐下降至 0.4747 后保持恒定；而如图 2(b) 所示，原检测器检测概率先保持恒定值 0.5，然后逐渐增大至最大

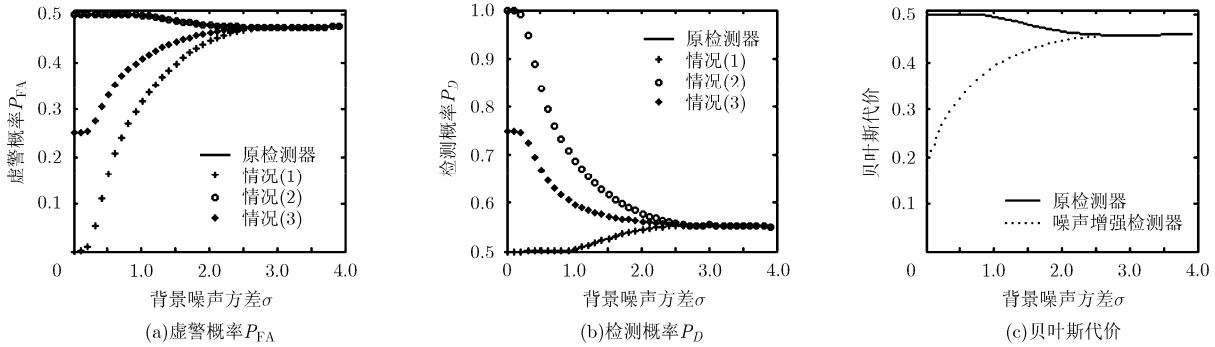


图2 不同高斯背景噪声方差下的检测性能

值 0.5538 后再逐渐缓慢下降。由图 2(a)可知, 当  $\sigma$  值接近于 0 时, 情况(3)获得的虚警概率接近于 0.25 且比极限情况(2)和原检测器获得的虚警概率降低了 0.25; 随着  $\sigma$  值的增加, 情况(1)及情况(3)所对应的虚警概率逐渐增大。由图 2(b)可见, 当背景噪声方差逐渐增强时, 情况(2)及情况(3)下的检测概率逐渐下降, 即加入噪声后的检测器检测性能随之下降。当  $\sigma \geq 2.74$  时, 如式(26)所示的  $p_v(v)$  为单峰噪声, 在  $\phi$  一定时, 加入任何噪声都无法提高检测器性能。由式(21)知, 贝叶斯代价的改善程度是与虚警概率与检测概率的改善程度成正比的。如图 2(c), 随着  $\sigma$  的增大, 贝叶斯代价的改善程度逐渐下降, 当  $\sigma \geq 2.74$  时, 加入噪声将不能降低贝叶斯代价。对比图 2(a), 图 2(b)和图 2(c)可见, 贝叶斯代价的变化趋势分别与图 2(a)和图 2(b)中虚警概率和检测概率的变化趋势保持一致。因此, 在先验知识已知的情况下贝叶斯代价最小化问题可等价于情况(3)中的虚警概率和检测概率优化问题, 并依据先验概率和条件代价对最优噪声中的参数进行调节, 获得不同先验知识下最优贝叶斯代价所需加入的噪声。

## 5.2 瑞利分布背景噪声

为进一步证明本文算法的有效性, 本小节中假设背景噪声  $v$  服从瑞利混合分布。 $v$  的概率密度函数为

$$p_v(x) = \sum_{i=1}^N m_i \varphi(x - \mu_i) \quad (31)$$

其中,  $\varphi(x) = \frac{x}{\sigma_i^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_i^2}\right)$ ,  $x \geq 0$ ;  $0, x < 0$ 。令  $N = 4$ ,  $u_1 = 0.2$ ,  $u_2 = 0.4$ ,  $u_3 = -2\sigma\sqrt{\pi/2} - 0.2$ ,  $u_4 = -2\sigma\sqrt{\pi/2} - 0.4$ ,  $m_i = 0.25, i = 1, 2, \dots, 4$ 。则根据式(8)可得

$$F_0(n) = \sum_{i=1}^4 m_i \Phi(A/3 - \mu_i - n) \quad (32)$$

$$F_1(n) = \sum_{i=1}^4 m_i \Phi(-2A/3 - \mu_i - n) \quad (33)$$

其中, 当  $x > 0$ ,  $\Phi(x) = \int_x^\infty \frac{t}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt$ ; 当  $x \leq 0$  时,  $\Phi(x) = 0$ 。令  $A = 1$ , 将  $\sigma$  以 0.1 的间隔从 0 增至 3。对每个  $\sigma$  值, 搜索极限情况(1)和情况(2)分别对应的最优加性噪声, 并计算对应的虚警概率和检测概率。此外, 仍然令  $\eta = 0.5$ , 计算情况(3)对应的虚警概率和检测概率, 分别将它们与原检测器进行对比, 如图 3(a)和图 3(b)所示。当  $0.2 \leq \sigma < 0.7$  时, 原检测器概率接近于 1, 存在有常量噪声使得  $P_D^y = P_D^x$  的同时使得虚警概率大大地降低, 即图 3(a)中情况(1)所示。另一方面, 如图 3(b)所示, 当  $\sigma < 0.9$  时, 没有噪声在满足  $P_{FA}^y \leq P_{FA}^x$  的同时提高检测概率, 且 3 种情况对应的检测概率与原检测器保持一致。当  $\sigma > 1$  时, 由图 3(a)和图 3(b)可知, 通过加入噪声, 情况(1)可使得虚警概率明显下降, 情况(2)可使得检测概率明显提高, 情况(3)实现了虚警概率和检测概率的同时改善。令  $p(H_0) = 0.4$ ,  $C_{00} = C_{11} = 0, C_{10} = C_{01} = 1$ , 根据第 4 节的分析可计算出图 3(a)和图 3(b)对应仿真参数设置下的最优噪声增强检测器和原检测器的贝叶斯代价, 结果如图 3(c)所示。图 3(c)表明, 加入噪声可使得贝叶斯代价降低, 且其改善程度与情况(1)中虚警概率或情况(2)中检测概率的改善程度一致。

## 6 结论

本文基于贝叶斯准则, 分析了在贝叶斯准则下, 加入噪声使得贝叶斯代价最小化问题等价于使得虚警概率和/或检测概率最优化的问题。本文在保证  $P_{FA}^y \leq \alpha$  和  $P_D^y \geq \beta$  的情况下, 提出了同时使得虚警概率降低和检测概率提高的加性噪声增强检测模型。然后给出了 3 种不同情况下对应的最优加性噪声及模型能够成立的充分条件。再次, 给出了先验概率已知和未知时, 分别对应的最小化贝叶斯代价的加性噪声, 并且在改变先验概率和条件代价时,

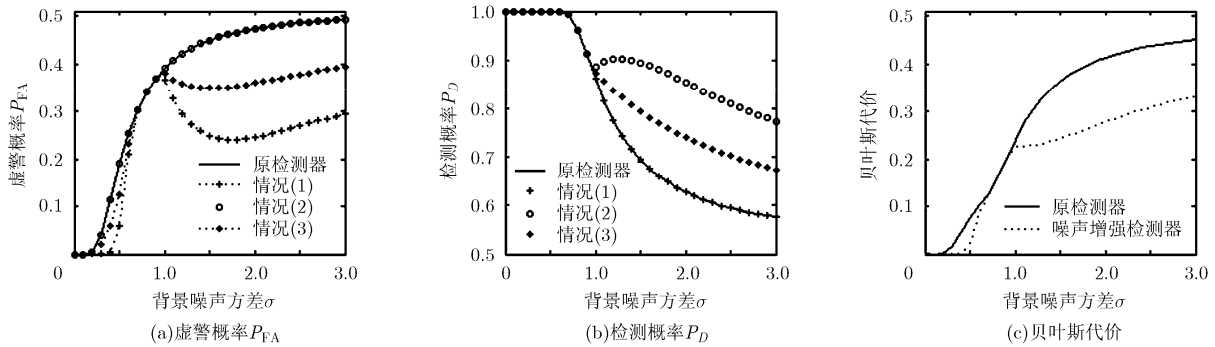


图3 不同瑞利背景噪声方差下的检测性能

只需调节最优噪声模型中的参数值即可获得相应的加性噪声,在保证性能的同时简化了运算。检测实例和仿真结果分析均证明了本文算法的有效性。

### 参考文献

- [1] COHEN L. The history of noise[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2005, 22(6): 20-45. doi: 10.1109/MSP.2005.1550188.
- [2] BENZI R, SUTERA A, and VULPIANI A. The mechanism of stochastic resonance[J]. *Journal of Physics A: Mathematical General*, 1981, 14(11): L453-L457. doi: 10.1088/0305-4470/14/11/006.
- [3] 张雷, 宋爱国. 随机共振在信号处理中应用研究的回顾与展望[J]. *电子学报*, 2009, 37(4): 811-818. doi: 10.3321/j.issn:0372-2112.2009.04.025.  
ZHANG Lei and SONG Aiguo. Development and prospect of stochastic resonance in signal processing[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2009, 37(4): 811-818. doi: 10.3321/j.issn:0372-2112.2009.04.025.
- [4] ADDESSOA P, PIERROB V, and FILATRELLA G. Interplay between detection strategies and stochastic resonance properties[J]. *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, 2015, 30(1/3): 15-31. doi: 10.1016/j.cnsns.2015.05.026.
- [5] YU Haitao, GUO Ximeng, WANG Jiang, et al. Adaptive stochastic resonance in self-organized small-world neuronal networks with time delay[J]. *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, 2015, 29(1/3): 346-358. doi: 10.1016/j.cnsns.2015.05.017.
- [6] 张海滨, 何清波, 孔凡让. 基于变参数随机共振和归一化变换的时变信号检测与恢复[J]. *电子与信息学报*, 2015, 37(9): 2124-2131. doi: 10.11999/JEIT141618.  
ZHANG Haibin, HE Qingbo, and KONG Fanrang. Time-varying signal detection and recovery method based on varying parameter stochastic resonance and normalization transformation[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2015, 37(9): 2124-2131. doi: 10.11999/JEIT141618.
- [7] 侯成郭, 罗柏文, 李地. 线性调频信号的级联随机共振数字化接收[J]. *电子与信息学报*, 2015, 37(12): 2866-2871. doi: 10.11999/JEIT141496.  
HOU Chengguo, LUO Bowen, and Li Di. Cascaded stochastic resonance for digitized receiving of linear frequency modulation signal[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2015, 37(12): 2866-2871. doi: 10.11999/JEIT141496.
- [8] CHEN Hao, VARSHNEY L R, and VARSHNEY P K. Noise-enhanced information systems[J]. *Proceeding of the IEEE*, 2014, 102(10): 1607-1621. doi: 10.1109/JPROC.2014.2341554.
- [9] LIU Shujun, YANG Ting, and ZHANG Xinzhen. Effects of stochastic resonance for linear-quadratic detector[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2015, 77(1): 319-331. doi: 10.1016/j.chaos.2015.06.015.
- [10] LU Zeqi, CHEN Liqun, MICHAEL J B, et al. Stochastic resonance in a nonlinear mechanical vibration isolation system[J]. *Journal of Sound & Vibration*, 2016, 370: 221-229. doi: 10.1016/j.jsv.2016.01.042.
- [11] 邓冬虎, 朱小鹏, 张群, 等. 基于随机共振理论的双基 ISAR 弱信号提取及成像分析[J]. *电子学报*, 2012, 40(9): 1809-1816. doi: 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.09.017.  
DENG Donghu, ZHU Xiaopeng, ZHANG Qun, et al. Weak signals extraction and imaging analysis in bistatic ISAR systems based on stochastic resonance[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2012, 40(9): 1809-1816. doi: 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.09.017.
- [12] MITAIM S and KOSKO B. Adaptive stochastic resonance in noisy neurons based on mutual information[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2004, 15(6): 1526-1540. doi: 10.1109/TNN.2004.826218.
- [13] 高锐, 李赞, 吴利平, 等. 低信噪比条件下基于随机共振的感知方法与性能分析[J]. *电子学报*, 2013, 41(9): 1672-1679. doi: 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.09.002.  
GAO Rui, LI Zan, WU Liping, et al. A spectrum sensing

- method and performance analysis based on stochastic resonance under low SNR[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2013, 41(9): 1672-1679. doi: 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.09.002.
- [14] KAY S M, MICHELS J H, CHEN Hao, *et al.* Reducing probability of decision error using stochastic resonance[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2009, 13(11): 695-698. doi: 10.1109/LSP.2006.879455.
- [15] CHEN Hao, VARSHNEY P K, KAY S M, *et al.* Theory of the stochastic resonance effect in signal detection: Part I — Fixed detectors[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(7): 3172-3184. doi: 10.1109/TSP.2007.893757.
- [16] BAYRAM S, GEZICI S, and VINCENT P H. Noise enhanced hypothesis-testing in the restricted Bayesian framework[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(8): 3972-3989. doi: 10.1109/TSP.2010.2048107.
- [17] BAYRAM S and GEZICI S. Noise enhanced M-ary hypothesis-testing in the Minimax framework[C]. The 3rd International Conference on Signal Processing Communication Systems (ICSPCS), Omaha, NE, USA, 2009: 1-6. doi: 10.1109/ICSPCS.2009.5306400.
- [18] 盛骤, 谢式千, 潘承毅. 概率论与数理统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010: 76-77.
- SHENG Zhou, XIE Shiqian, and PAN Chengyi. Probability and Statistics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2010: 76-77.
- 刘书君: 女, 1981年生, 讲师, 研究方向为统计信号分析、图像处理.
- 杨 婷: 女, 1990年生, 博士生, 研究方向为噪声增强信号处理、统计信号分析.
- 唐明春: 男, 1981年生, 研究员, 研究方向为天线与电波传播、微波毫米波理论与技术.
- 王 品: 女, 1979年生, 副教授, 研究方向为智能信息处理、光学信息处理.
- 李勇明: 男, 1976年生, 副教授, 研究方向为智能计算与模式识别、数据挖掘.