

## 对 $N$ 次观测 Pareto 分布参数有效估计范围的扩展

胡 冲 罗 丰\* 张林让 范一飞 陈帅霖  
(西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室 西安 710071)

**摘 要:** 基于  $\langle z \ln(z) \rangle$  方法的  $N$  次观测 Pareto 分布参数估计不能有效估计形状参数小于 1 的情形。该文采用  $\langle z^r \ln(z) \rangle$  方法对基于  $\langle z \ln(z) \rangle$  的方法进行扩展, 将  $N$  次观测 Pareto 分布的形状参数的有效估计范围进行扩大。文中推导了  $N$  次观测 Pareto 分布参数估计的表达式, 从理论上证明该方法能够估计小于 1 的形状参数。仿真结果表明:  $r \ll 1$  时,  $\langle z^r \ln(z) \rangle$  方法能够在该扩大的范围内有效地估计形状参数。

**关键词:** 参数估计; 雷达杂波; Pareto 分布;  $N$  次观测

中图分类号: TN957.51

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2017)02-0412-05

DOI: 10.11999/JEIT160307

## Widening Efficacious Parameter Estimation Range of Multi-look Pareto Distribution

HU Chong LUO Feng ZHANG Linrang FAN Yifei CHEN Shuailin  
(National Laboratory of Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071, China)

**Abstract:** The method for estimating the parameters of multi-look Pareto distribution based on  $\langle z \ln(z) \rangle$  can not estimate the shape parameter less than 1. To overcome the drawback, it is generalized by  $\langle z^r \ln(z) \rangle$ , which widens the efficacious range for shape parameter to be estimated. The expression of parameter estimation is deduced so as to demonstrate that the proposed method is able to estimate the shape parameter less than 1 theoretically. The simulation results validate that the method of  $\langle z^r \ln(z) \rangle$  is able to estimate the shape parameter more efficaciously in the range of  $r \ll 1$ .

**Key words:** Parameter estimation; Radar clutter; Pareto distribution; Multi-look

### 1 引言

为了提高信杂比(Signal-to-Clutter Ratio, SCR), 雷达信号处理机往往会对一个相干处理间隔(Coherent Processing Interval, CPI)内的  $N$  次观测回波信号进行相参或非相参积累<sup>[1]</sup>, 积累后杂波模型的准确性会直接影响目标的检测性能。而近年来的研究工作表明 Pareto 分布是一种较 K 分布及与其相关修正分布(KA, KK 等)更具优势的统计杂波模型<sup>[2-11]</sup>, 因此对  $N$  次观测 Pareto 分布的参数进行准确估计对提高雷达的目标检测性能具有十分重要的意义。

传统的最大似然估计(Maximum-Likelihood Estimation, MLE)法对单次观测 Pareto 分布的形状参数的估计是其尺度参数的函数, 然而其尺度参数的估计没有闭合解, 参数估计需要用数值方法寻找方程零点, 计算比较低效<sup>[12]</sup>; 而传统的矩估计法

(Method of Moments, MoM), 如一二阶矩法, 由于计算二阶矩时 Gamma 函数在形状参数小于 2 的时候无意义, 因此该方法不能有效估计真值小于 2 的形状参数<sup>[13,14]</sup>; 文献[14]在借鉴了基于  $\langle z \ln(z) \rangle$  方法的 K 分布参数估计后, 提出将该方法用于 Pareto 分布的参数估计, 该方法较一二阶矩法形状参数的有效估计范围扩大到了真值大于 1 的情形, 然而由于基于  $\langle z \ln(z) \rangle$  的方法需要计算的 Diagram 函数在形状参数小于 1 时无意义, 因此该方法不能有效估计小于 1 的形状参数。本文借鉴文献[14]与文献[15], 对基于  $\langle z \ln(z) \rangle$  的方法进行扩展, 采用基于  $\langle z^r \ln(z) \rangle$  的方法对  $N$  次观测 Pareto 分布参数进行估计, 将形状参数的有效估计范围进一步扩大到大于  $r$  的情形。仿真实验结果表明, 在  $r \ll 1$  的情况下, 该方法较一二阶矩法和  $\langle z^r \ln(z) \rangle$  法能够对形状参数更加有效估计, 因此对形状参数的有效估计范围进行了扩大。

### 2 $N$ 次观测 Pareto 分布

海杂波的复合模型是通过结构分量对散斑分量进行调制得到的。

收稿日期: 2016-04-01; 改回日期: 2016-09-01; 网络出版: 2016-10-17

\*通信作者: 罗丰 luofeng@xidian.edu.cn

基金项目: 国家重大科学仪器设备开发专项(2013YQ20060705)

Foundation Item: The National Major Scientific Instruments and Equipment Development Program(2013YQ20060705)

$$p(z) = \int_0^\infty p(z|x, N) p_x(x) dx \quad (1)$$

$N$  次观测的散斑分量模型为形状参数为  $N$  的 Gamma 分布, 其概率密度函数(PDF)为

$$p_{z|x}(z|x, N) = \frac{z^{N-1}}{x^N \Gamma(N)} \exp(-z/x) \quad (2)$$

其中,  $\Gamma(\bullet)$  为 Gamma 函数。当  $N = 1$  即单次观测时, 式(2)为指数分布参数。当结构分量  $x$  服从 Gamma 分布时, 式(1)为  $N$  次观测的 K 分布概率密度函数。而当结构分量  $x$  服从如式(3)的逆 Gamma 分布时, 式(1)为  $N$  次观测的 Pareto 分布概率密度函数(PDF)

$$p_x(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{-a-1} \exp(-b/x) \quad (3)$$

式(3)中,  $a$  为形状参数,  $b$  为尺度参数。将式(3)与式(2)代入式(1), 得到  $N$  次观测的 Pareto 分布模型的 PDF 为

$$p(z) = \frac{z^{N-1} b^a \Gamma(N+a)}{(b+z)^{N+a} \Gamma(N) \Gamma(a)} \quad (4)$$

当  $N = 1$  时,

$$p(z) = ab^a / (b+z)^{a+1} \quad (5)$$

为广义 Pareto II 型或 Lomax 分布 PDF。通过变换  $a = -1/\omega$  与  $b = -\lambda/\omega$  后, 单次观测的广义 Pareto II 型分布 PDF 也可以写为

$$p(z) = \frac{1}{\lambda} \left( 1 - \frac{\omega z}{\lambda} \right)^{\frac{1}{\omega}-1} \quad (6)$$

### 3 参数估计

#### 3.1 一二阶矩估计

首先根据式(4)求出 Pareto 分布的  $r$  阶原点矩  $\langle z^r \rangle$  如式(7)

$$\begin{aligned} \langle z^r \rangle &= \int_0^\infty z^r p(z) dz = \int_0^\infty \frac{z^{N+r-1} b^a \Gamma(N+a)}{(b+z)^{N+a} \Gamma(N) \Gamma(a)} dz \\ &= \frac{b^r \Gamma(N+a)}{\Gamma(N) \Gamma(a)} \int_0^\infty \left( \frac{z}{b+z} \right)^{N+r-1} \left( 1 - \frac{z}{b+z} \right)^{a-r-1} dz \end{aligned} \quad (7)$$

令  $x = z/(b+z)$ , 则  $dz = b/(1-x)^2 dx$ , 代入式(7)得

$$\begin{aligned} \langle z^r \rangle &= \frac{b^r \Gamma(N+a)}{\Gamma(N) \Gamma(a)} \int_0^\infty (x)^{N+r-1} (1-x)^{a-r-1} dx \\ &= \frac{b^r \Gamma(N+r) \Gamma(a-r)}{\Gamma(N) \Gamma(a)} \end{aligned} \quad (8)$$

那么形状参数  $a$  可通过前二阶原点矩由式(9)估计。

$$a = \frac{\langle z \rangle^2}{[N/(N+1)] \langle z^2 \rangle - \langle z \rangle^2} + 2 \quad (9)$$

但是在计算二阶原点矩时, 当  $a \leq 2$  时, 式(8)中的

Gamma 函数  $\Gamma(a-2)$  无意义, 所以式(9)对  $a \leq 2$  的形状参数估计无效, 也就是说形状参数  $a$  的有效估计范围为  $a > 2$ 。

#### 3.2 基于 $\langle z \ln(z) \rangle$ 方法的估计

文献[14]采用如式(10)的基于  $\langle z \ln(z) \rangle$  的方法对  $N$  次观测 Pareto 分布参数进行估计将形状参数的有效估计范围扩大到了  $a > 1$ 。

$$\begin{aligned} \frac{\langle z \ln(z) \rangle}{\langle z \rangle} - \langle \ln(z) \rangle &= \psi(N+1) - \psi(N) + \psi(a) \\ &\quad - \psi(a-1) = \frac{1}{N} + \frac{1}{a-1} \end{aligned} \quad (10)$$

然而, 对于真值在  $a \leq 1$  范围内的形状参数, 式(10)中的 Digamma 函数  $\psi(a-1)$  无意义, 因此形状参数的有效估计范围为  $a > 1$ 。

#### 3.3 本文方法

本文对基于  $\langle z \ln(z) \rangle$  的方法进行扩展, 采用基于  $\langle z^r \ln(z) \rangle$  的方法对 Pareto 分布参数进行估计。首先对  $\langle z^r \ln(z) \rangle$  进行计算:

$$\begin{aligned} \langle z^r \ln(z) \rangle &= \int_0^\infty p_x(x) \left[ \int_0^\infty z^r \ln(z) p_{z|x}(z|x, N) dz \right] dx \\ &= \langle z^r \rangle [\psi(N+r) - \psi(a-r) + \ln(b)] \end{aligned} \quad (11)$$

式中,  $\psi(\bullet)$  为 Digamma 函数。由式(11)可知

$$\frac{\langle z^r \ln(z) \rangle}{\langle z^r \rangle} = \psi(N+r) - \psi(a-r) + \ln(b) \quad (12)$$

其次计算  $\langle \ln(z) \rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle \ln(z) \rangle &= \int_0^\infty p_x(x) \left[ \int_0^\infty \ln(z) p_{z|x}(z|x, N) dz \right] dx \\ &= \psi(N) - \psi(a) + \ln(b) \end{aligned} \quad (13)$$

式(12)减式(13), 得

$$\begin{aligned} \frac{\langle z^r \ln(z) \rangle}{\langle z^r \rangle} - \langle \ln(z) \rangle &= \psi(N+r) - \psi(N) \\ &\quad + \psi(a) - \psi(a-r) \end{aligned} \quad (14)$$

式(14)表明形状参数  $a$  的估计范围在  $a > r$  范围内是有效的, 因此当  $r \ll 1$  时, 式(14)对形状参数的有效估计范围相比式(10)有很大拓展。用样本矩代替总体矩得到

$$\begin{aligned} &\frac{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M z_i^r \ln(z_i)}{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M z_i^r} - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \ln(z_i) \\ &= \psi(N+r) - \psi(N) + \psi(\hat{a}) - \psi(\hat{a}-r) \end{aligned} \quad (15)$$

用数值方法解析式(14)可以得到形状参数的估计值  $\hat{a}$ , 进而由式(13)得到尺度参数的估计值  $\hat{b}$

$$\hat{b} = \exp \left[ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \ln(z_i) + \psi(a) - \psi(N) \right] \quad (16)$$

当  $r = 1$  时, 式(14)成为文献[14]采用的  $\langle z \ln(z) \rangle$  方法, 为  $\langle z^r \ln(z) \rangle$  方法在  $r = 1$  时的特殊情况。由于本文重点是对参数有效估计范围的扩展, 因此数值方法不在此赘述, 下面仿真采用插值法求解形状参数。

### 4 估计精度分析

分析参数的估计精度需要产生具体已知参数的 Pareto 分布随机数作为样本。产生形状参数为  $a$ 、尺度参数为  $b$  的 Pareto 分布数据  $D_{N \times M}$  ( $D_{N \times M}$  为  $N \times M$  的矩阵)的步骤为:

(1)随机产生  $M$  个独立同分布的参数为  $(a, b)$  的逆 Gamma 分布变量  $X = [x_1, x_2, \dots, x_M]$ ;

(2)对每一个  $x_i (i = 1, 2, \dots, M)$  值, 随机产生  $N$  个独立同分布的参数为  $\sqrt{x_i/2}$  的指数分布随机变量  $Z = [z_1, z_2, \dots, z_N]^T$ , 并存入  $D_{N \times M}$  的第  $i$  列。

步骤(1)中的逆 Gamma 分布随机变量  $x$  可由 Gamma 分布随机变量  $y$  通过倒数变换  $x = 1/y$  得到<sup>[1]</sup>。那么数据  $D_{N \times M}$  的每一行服从参数为  $(a, b)$  的单次观测 Pareto 分布, 如式(5); 数据  $D_{N \times M}$  的每一列之和服从参数为  $(a, b)$  的  $N$  次观测 Pareto 分布, 如式(4)。图 1(a)和图 1(b)分别为仿真数据矩阵  $D_{16 \times 8192}$  的第 1 行数据统计分布与每列之和统计分布。

参数估计精度可用估计量的相对偏差  $(\hat{a} - a)/a$  和相对方差  $\text{var}(\hat{a})/a^2$  来衡量。首先为了确定  $r$  的取

值对估计结果的影响, 取几个固定值  $r_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ , 并在每一  $r_i$  值时的每个  $a$  值下进行 100 次独立的  $D_{16 \times 256}$  数据仿真。对每次仿真数据进行参数估计, 并计算所有 100 次参数估计值、参数估计相对偏差与相对方差, 并取其均值。参数估计结果如图 2 所示, 由图 2 可以看出,  $r$  值越小, 估计值与真值越接近; 当  $a < r$  时, 形状参数估计值与真值偏差比较大, 这是因为在  $a < r$  时, digamma 函数无意义, 通过数值方法解出的估计值无效。随着真值  $a$  的增大, 估计值与真值偏差变小。参数相对估计偏差与相对估计方差如图 3, 图 4 所示, 图中为相对偏差与相对方差的对数值; 图 3 与图 4 表明,  $r$  值越小, 相对估计偏差与相对估计方差越小, 且相对估计偏差与相对估计方差随着形状参数真值  $a$  的增大变小。

为了进一步分析本文方法的参数估计性能, 图 5, 图 6 同时给出  $r = 0.001$  时的  $\langle z^r \ln(z) \rangle$  方法、 $\langle z \ln(z) \rangle$  方法与一二阶矩法的参数相对估计偏差与相对估计方差。从图中可以看到, 在  $(r, 1]$  区间  $\langle z^r \ln(z) \rangle$  法的相对估计偏差与相对估计方差均远远小于  $\langle z \ln(z) \rangle$  法与一二阶矩法。甚至在  $a > 1$  时的相当一部分区域,  $\langle z^r \ln(z) \rangle$  法的估计性能也优于  $\langle z \ln(z) \rangle$  法与一二阶矩法。

### 5 结束语

基于一二阶矩的  $N$  次观测 Pareto 分布参数估计

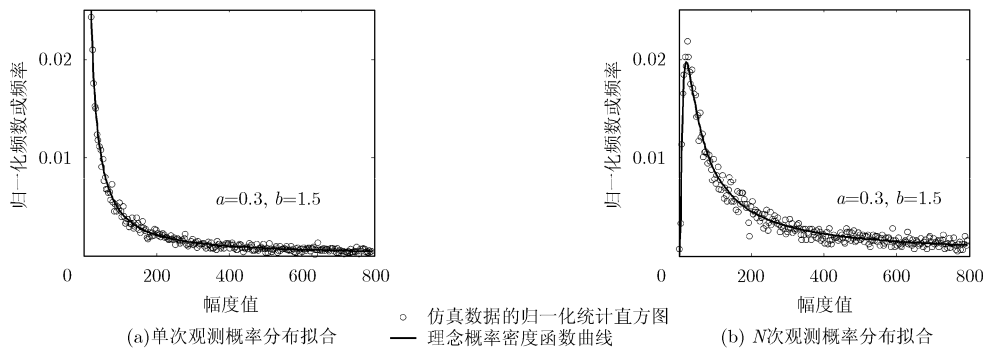


图 1 仿真数据统计分布

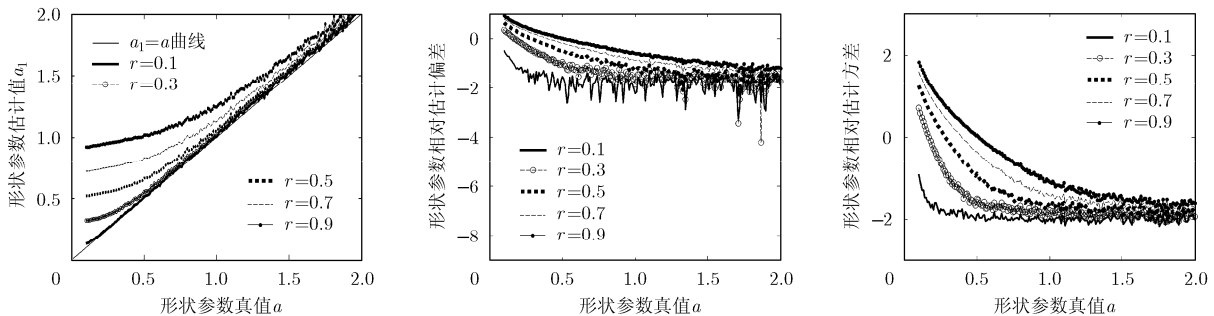


图 2 估计值-真值曲线

图 3 估计结果相对偏差

图 4 估计结果相对方差

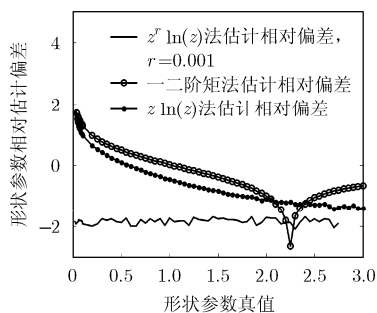


图5 3种不同估计器的相对估计偏差

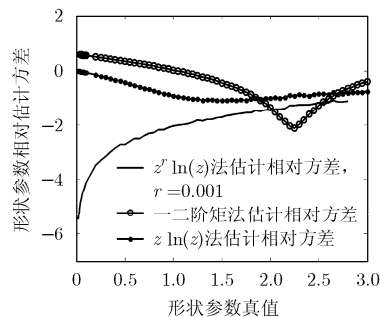


图6 3种不同估计器的估计方差

方法不能有效估计小于 2 的形状参数, 基于  $\langle z \ln(z) \rangle$  的估计方法不能有效估计小于 1 的形状参数。本文所使用的基于  $\langle z^r \ln(z) \rangle$  的方法扩大了形状参数的有效估计范围, 可以有效估计  $(r, 1]$  区间上的形状参数。仿真实验表明,  $\langle z^r \ln(z) \rangle$  法不但在  $(r, 1]$  区间的参数估计性能远胜于一二阶矩法与  $\langle z \ln(z) \rangle$  法, 而且在  $a > 1$  的一些区域, 参数估计性能也优于一二阶矩法与  $\langle z \ln(z) \rangle$  方法的估计性能, 因此该方法大大拓宽了  $N$  次观测 Pareto 分布参数估计范围。

### 参考文献

- [1] 丁鹭飞, 耿富录, 陈建春, 等. 雷达原理[M]. 第四版, 北京: 电子工业出版社, 2009: 230-233.  
DING Lufei, GENG Fulu, CHEN Jianchun, et al. Radar Theory[M]. 4th Edition, Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2009: 230-233.
- [2] WEINBERG G V. Assessing Pareto fit to high-resolution high-grazing-angle sea clutter[J]. *IET Electronics Letters*, 2011, 47(8): 516-517. doi: 10.1049/el.2011.0518.
- [3] BOCQUET S and ROSENBERG L. Simulation of coherent sea clutter with inverse gamma texture[C]. International Radar Conference, Lille, 2014: 1-6. doi: 10.1109/RADAR.2014.7060347.
- [4] 张玉石, 许心瑜, 尹雅磊, 等. L 波段小擦地角海杂波幅度统计特性研究[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(5): 1044-1048. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.01139.  
ZHANG Yushi, XU Xinyu, YIN Yalei, et al. Research on amplitude statistics of L-band low grazing angle sea clutter[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014, 36(5): 1044-1048. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.01139.
- [5] WANG J N and XU X J. Simulation of correlated low-grazing-angle sea clutter based on phase retrieval[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2015, 53(7): 3917-3930. doi: 10.1109/TGRS.2014.2388211.
- [6] WANG J N and XU X J. Simulation of Pareto distributed temporally and spatially correlated low grazing angle sea clutter[C]. International Radar Conference, Lille, 2014: 1-6. doi: 10.1109/RADAR.2014.7060342.
- [7] WEINBERG G V. Validity of whitening-matched filter approximation to the Pareto coherent detector[J]. *IET Signal Processing*, 2012, 6(6): 546-550. doi: 10.1049/iet-spr.2011.0304.
- [8] FARSHCHIAN M and POSNER F L. The Pareto distribution for low grazing angle and high resolution X-band sea clutter[C]. IEEE Radar Conference, Washington DC, 2010: 271-285. doi: 10.1109/RADAR.2010.5494513.
- [9] ALEXOPOULOS A and WEINBERG G V. Fractional order Pareto distributions with application to X-band maritime radar clutter[J]. *IET Radar, Sonar & Navigation*, 2015, 9(7): 817-826. doi: 10.1049/iet-rsn.2014.0379.
- [10] ROSENBERG L and BOCQUET S. The Pareto distribution for high grazing angle sea-clutter[C]. IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium, Melbourne, 2013: 4209-4212. doi: 10.1109/IGARSS.2013.6723762.
- [11] SANGSTON K J, GINI F, and GRECO M S. New results on coherent radar target detection in heavy-tailed compound-Gaussian clutter[C]. IEEE Radar Conference, Washington DC, 2010: 779-784. doi: 10.1109/RADAR.2010.5494515.
- [12] BALLERI A, NEHORAI A, and WANG J. Maximum likelihood estimation for compound-Gaussian clutter with inverse-gamma texture[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2007, 43(2): 775-780. doi: 10.1109/TAES.2007.4285370.
- [13] MEZACHE A, IZZEDDINE C, SOLTANI F, et al. Estimating the Pareto plus noise distribution parameters using non-integer order moments and  $[\log(z)]$  approaches[J]. *IET Radar, Sonar & Navigation*, 2016, 10(1): 192-204. doi: 10.1049/iet-rsn.2015.0170.

- [14] BOCQUET S. Simulation of correlated Pareto distributed sea clutter[C]. International Conference on Radar, Adelaide, 2013: 258-261. doi: 10.1109/RADAR.2013.6651995.
- [15] 胡文琳, 王永良, 王首勇. 基于  $z^r \lg(z)$  期望的 K 分布参数估计[J]. 电子与信息学报, 2008, 30(1): 203-205. doi: 10.3724/SP.J.1146.2006.00829.
- HU Wenlin, WANG Yongliang, and WANG Shouyong. Estimation of the parameters of K-distribution based on  $z^r \lg(z)$  expectation[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2008, 30(1): 203-205. doi: 10.3724/SP.J.1146.2006.00829.
- 胡冲: 男, 1987年生, 博士生, 研究方向为海杂波特性分析与建模、海杂波背景下的目标检测等.
- 罗丰: 男, 1971年生, 教授, 研究方向为雷达信号与信息处理、海杂波特性分析与建模、杂波背景下的目标检测、跟踪与航迹关联等.
- 张林让: 男, 1966年生, 教授, 研究方向为阵列天线技术、组网雷达抗干扰、高超声速 SAR 成像技术等.
- 范一飞: 男, 1989年生, 博士生, 研究方向为海杂波特性分析与建模、海杂波背景下的目标检测等.
- 陈帅霖: 男, 1986年生, 博士生, 研究方向为杂波背景下的目标检测及跟踪及航迹关联等.