

## 基于空频分解信号子空间向量的时间反演成像

钟选明\* 李军野 廖成

(西南交通大学电磁场与微波技术研究所 成都 610031)

**摘要:** 论文提出基于空频分解信号子空间向量的时间反演成像新方法。利用天线阵列采集的散射场数据建立空频矩阵, 奇异值分解该矩阵得到信号子空间向量, 以此实现对目标的选择性成像。基于完全散射场数据的成像伪谱包含多个子向量贡献, 相当于多次成像叠加, 具有统计特性。新方法既避免了传统的空空分解时间反演算法产生的随机相位的影响, 又具有较好的抗干扰性能, 即使叠加信噪比 10 dB 的高斯白噪声, 也能实现对多个目标的准确成像。

**关键词:** 时间反演成像; 空频成像; 空频分解; 空频多态响应矩阵

**中图分类号:** TN957.52

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1009-5896(2017)02-0494-05

**DOI:** 10.11999/JEIT160272

## Time Reversal Imaging Algorithm Based on Signal-subspace Vectors from the Spatial-frequency Decomposition

ZHONG Xuanming LI Junye LIAO Cheng

(Electromagnetics Institute, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

**Abstract:** Basing on the signal-subspace vectors from the spatial-frequency decomposition, a novel time-reversal imaging algorithm is proposed. Using the backscattered data recorded by the antenna array, a spatial-frequency multistatic matrix is set up. Singular value decomposition is applied to the matrix to obtain the signal-subspace vectors, which are employed to focus the targets imaging selectively. The imaging pseudo-spectrum based on the full backscattered data includes the contributions of multiple sub-vectors and can be viewed as the superposition of multiple images. The algorithm is statistically stable. The random phases, generated by the conventional time-reversal imaging method based on the spatial-spatial decomposition, do not arise in the algorithm. It has excellent capability to resist the noise interference and can accurately focus the multi-targets even when noise with 10 dB SNR is added to the measured data.

**Key words:** Time-reversal imaging; Spatial-frequency imaging; Spatial-frequency decomposition; Spatial-frequency multistatic matrix

### 1 引言

时间反演是对时域信号的一种逆序操作, 等效于频域中的相位共轭。时间反演具有抗多径的特点, 在复杂非均匀媒质中传输波能实现时间与空间上的同步聚焦, 统称空时聚焦<sup>[1-3]</sup>。这种空时聚焦特性使其广泛应用于结石的检测与治疗、无损探伤、微波成像、水下目标探测、空间功率合成、多天线无线通信等众多领域。在时间反演成像领域, 基于空空分解的时间反演成像算法, 通过散射场获取的空

空多态响应矩阵(Spatial-Spatial Multistatic Data Matrix, SS-MDM)起着十分重要的作用。奇异值分解该矩阵后, 其完备空间可划分为信号子空间与噪声子空间, 传统的时间反演算子分解法(Time-Reversal Operator Decomposition, DORT)及其扩展方法<sup>[4-7]</sup>利用信号子空间向量产生后向传播的回传信号, 实现选择性聚焦成像; 传统的时间反演多信号分类法(Time-Reversal Multiple Signals Classification, TR-MUSIC)及其扩展方法<sup>[8-11]</sup>利用噪声子空间向量与搜索点格林函数向量的内积, 当搜索点与目标位置重合时, 向量的内积为零, 以实现目标的聚焦成像。这两类方法在时间反演成像领域占有十分重要的地位, 但在每一频点, 通过奇异值分解 SS-MDM 矩阵获取回传向量会产生依赖于频率的随机相位<sup>[12]</sup>, 时间反演成像时, 每个天线单元发射的回传信号将不会在目标处实现相干叠加, 影响成像精度。在噪声环境中, 由于叠加噪声的影

收稿日期: 2016-03-21; 改回日期: 2016-08-17; 网络出版: 2016-10-09

\*通信作者: 钟选明 xm\_zhong@163.com

基金项目: 国家自然科学基金委和中国工程物理研究院联合基金(U1330109)

Foundation Item: The United Fund of National Natural Science Foundation of China and China Academy of Engineering Physics (U1330109)

响, 随机相位变化剧烈, 这一现象变得更加突出。

空频多态响应矩阵(Spatial-Frequency MDM, SF-MDM)<sup>[13-15]</sup> 弥补了上述传统时间反演算法的成像缺陷, 通过奇异值分解 SF-MDM 矩阵不会产生依赖于频率的随机相位。基于此, 本文利用空频分解得到的信号子空间向量, 提出了空频分解成像新方法。新方法基于完全散射场数据时, 具有一定的统计特性与较好的抗干扰性能, 能实现对噪声环境中多个目标的准确成像。

## 2 理论分析

如图 1(a), 探测区域内包含  $P$  个散射体目标, 目标的位置用  $\mathbf{r}_p$  ( $1 \leq p \leq P$ ) 表示, 在探测区域的一侧沿  $x$  轴设置  $N$  个收发合置的天线, 组成时间反演天线阵列, 且  $P < N$ , 天线的位置用  $\mathbf{r}_n$  ( $1 \leq n \leq N$ ) 表示。天线单元均为理想线天线, 极化方向与  $z$  轴平行, 散射体为理想导体柱体。天线发射的探测波为高斯脉冲信号:

$$s(t) = \begin{cases} \exp[-10(2F_c t - 1)^2], & t \leq 1/F_c \\ 0, & t > 1/F_c \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $F_c$  为脉冲的中心频率。第  $n$  个天线单元发射信号获取的  $N \times M$  阶 SF-MDM 矩阵用  $\mathbf{K}_n$  表示,  $M$  为采样点个数, 即

$$\mathbf{K}_n = \begin{pmatrix} k_{n1}(\omega_1) & k_{n1}(\omega_2) & \cdots & k_{n1}(\omega_M) \\ k_{n2}(\omega_1) & k_{n2}(\omega_2) & \cdots & k_{n2}(\omega_M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{nN}(\omega_1) & k_{nN}(\omega_2) & \cdots & k_{nN}(\omega_M) \end{pmatrix} \quad (2)$$

矩阵中的第  $n$  行表示第  $n$  个天线采集的时域信号通过傅里叶变换后的频域离散值。

如果天线阵列的每个天线依次发射信号, 天线阵列接收、保存散射场数据, 依据这些散射场数据求取空频矩阵按顺序排列, 得到新矩阵:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{K}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{K}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11}(\omega_1) & k_{11}(\omega_2) & \cdots & k_{11}(\omega_M) \\ k_{12}(\omega_1) & k_{12}(\omega_2) & \cdots & k_{12}(\omega_M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{NN}(\omega_1) & k_{NN}(\omega_2) & \cdots & k_{NN}(\omega_M) \end{pmatrix} \quad (3)$$

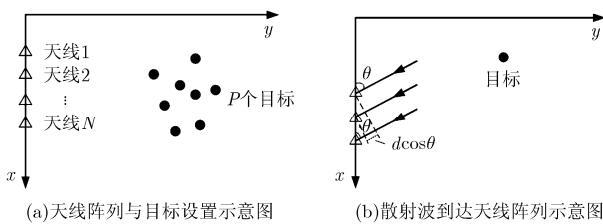


图1 天线阵列与目标设置及散射波到达天线阵列示意图

这是一个  $N^2 \times M$  维矩阵, 由于该矩阵来源于每个天线单元发射信号获取的散射场数据, 称为基于完全数据的空频矩阵(Full-Data-Based SF-MDM, FD-SF-MDM), 奇异值分解该矩阵, 即

$$\mathbf{K} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^H \quad (4)$$

其中,  $\mathbf{U}$  为  $N^2 \times N^2$  维的左奇异向量矩阵,  $\mathbf{V}$  为  $M \times M$  维的右奇异向量矩阵,  $\mathbf{\Lambda}$  为  $N^2 \times M$  维的奇异值矩阵。矩阵  $\mathbf{U}$  与目标对应的列向量展成信号子空间, 剩余列向量展成噪声子空间。信号子空间的每列向量包含  $N$  个子向量, 均反映了天线阵列与目标的位置关系, 每个子向量包含  $N$  个分量, 相邻分量之间的相位差隐含有目标空域信息; 矩阵  $\mathbf{V}$  中包含有接收信号的频域信息, 因此把这种矩阵分解方法称为空频分解。用  $\mathbf{U}_p$  表示与第  $p$  个目标相对应的第  $p$  列向量, 用  $\mathbf{U}_p^{\text{sub}_n}$  表示第  $p$  列向量中第  $n$  个子向量, 其中  $p = 1, 2, \dots, P$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , 则

$$\mathbf{U}_p = [(\mathbf{U}_p^{\text{sub}_1})^T, (\mathbf{U}_p^{\text{sub}_2})^T, \dots, (\mathbf{U}_p^{\text{sub}_N})^T]^T \quad (5)$$

既然  $\mathbf{U}_p^{\text{sub}_n}$  的幅度与相位反映了天线阵列与第  $p$  个目标位置的空间关系, 利用  $\mathbf{U}_p^{\text{sub}_n}$  及式(1)中  $s(t)$  的频域信号  $S(\omega)$ , 得到每个天线单元发射的用于成像的时间反演信号为

$$\mathbf{r}_p^{\text{TR}}(\omega) = \mathbf{U}_p^{\text{sub}_n} S(\omega) \quad (6)$$

为获取目标的成像伪谱, 定义任意搜索点  $\mathbf{r}$  的背景格林函数向量为

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}, \omega) = [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \omega), \dots, G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n, \omega), \dots, G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_N, \omega)]^T \quad (7)$$

式中,  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n, \omega)$  表示媒质中  $\mathbf{r}$  和  $\mathbf{r}_n$  点之间的格林函数。将式(6)中时间反演向量信号  $\mathbf{r}_p^{\text{TR}}(\omega)$  通过天线阵列入射至探测区域内, 将在第  $p$  个目标位置处实现聚焦, 成像伪谱为

$$\begin{aligned} D_p(\mathbf{r}) &= \int_{\Omega} \mathbf{g}(\mathbf{r}, \omega) [\mathbf{r}_p^{\text{TR}}(\omega)]^H d\omega \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{g}(\mathbf{r}, \omega) [\mathbf{U}_p^{\text{sub}_n}]^H S^*(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (8)$$

$\Omega$  为信号带宽, 这种基于单次散射场数据的成像方法称为空频时间反演算子分解法(Spatial-Frequency DORT, SF-DORT), 成像伪谱未出现影响传统成像算法的随机相位。考虑  $N$  个子向量的共同作用, 成像伪谱改为

$$\begin{aligned} D_p(\mathbf{r}) &= \sum_{n=1}^N \int_{\Omega} \mathbf{g}(\mathbf{r}, \omega) [\mathbf{r}_p^{\text{TR}}(\omega)]^H d\omega \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{g}(\mathbf{r}, \omega) \left[ \sum_{n=1}^N \mathbf{U}_p^{\text{sub}_n} \right]^H S^*(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (9)$$

相当于  $N$  次成像的叠加, 具有统计特性, 能够抵抗一定的噪声干扰。这种基于完全散射场数据的空频分解成像算法, 称为完全数据空频时间反演算子分解法(Full-Data-based Spatial-Frequency DORT,

FD-SF-DORT)。

尽管矩阵  $\mathbf{U}$  中包含与目标对应的信号子空间向量,但由于目标个数未知,信号子空间向量的个数也未可知。如图1(b)所示,天线阵列相邻两天线单元的间距均为  $d$ ,目标处于天线阵列的远场区域,散射波到达天线阵列时可近视看作为平行波束,且与天线阵列的夹角为  $\theta$ 。对某一波数为  $k$  的单一频点信号而言,相邻天线接收信号的相位差为  $kd \cos(\theta)$ 。设  $\Delta\varphi_n$  为相邻第  $n$  与第  $(n+1)$  个天线单元接收信号的相位差,相位差的平均值用  $(\sum_{i=1}^{N-1} |\Delta\varphi_i|) / (N-1)$  表示,

每个相位差相对平均值的偏离用  $|\Delta\varphi_n| - (\sum_{i=1}^{N-1} |\Delta\varphi_i|) / (N-1)$  表示,则得到相邻天线单元相位差波动累加值为

$$\Delta\varphi = \sum_{n=1}^N \left| \Delta\varphi_n - \left( \sum_{i=1}^{N-1} |\Delta\varphi_i| \right) / (N-1) \right| \quad (10)$$

如果式(10)累加值  $\Delta\varphi$  较小,则信号来源于一个真实目标的散射,否则,该信号可当作噪声。当目标位于天线阵列的无穷远处时,累加值  $\Delta\varphi$  趋近于零。既然  $\mathbf{U}_p^{\text{sub}n}$ ,  $p \leq P$  反映天线阵列与目标的空间关系,任取  $n=1$ ,将其相邻分量的相位差代入式(10),得到的累加值  $\Delta\varphi$  将较小,而  $\mathbf{U}_p^{\text{sub}n}$ ,  $p > P$  为噪声子空间向量,累加值  $\Delta\varphi$  较大,以此作为判别该列向量是否属于信号子空间的依据。

### 3 实验结果分析

在图1(a)所示的探测模型中,探测区域为  $3 \text{ m}$

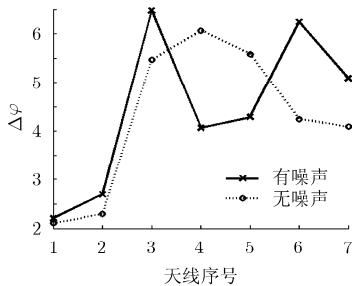
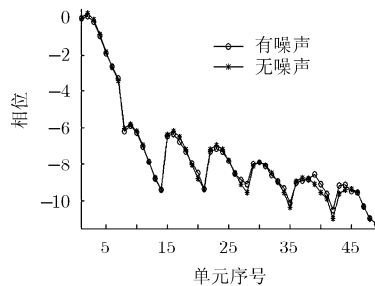
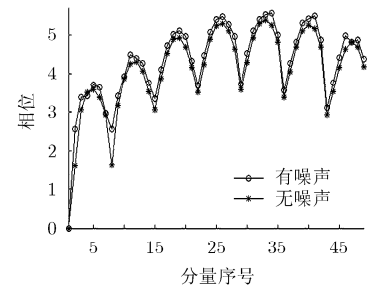


图2 相位差波动累加值分布



(a)对应目标T1的相位分布

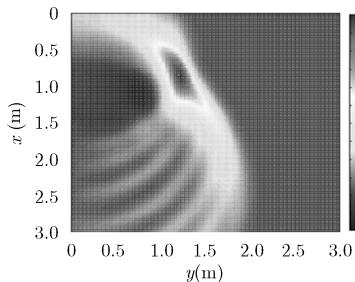


(b)对应目标T2的相位分布

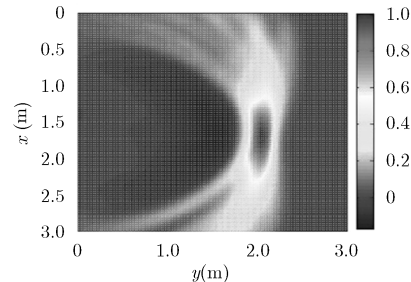
$\times 3 \text{ m}$  的2维空间,两个 PEC 目标 T1(0.9 m,1.2 m) 和 T2(1.8 m,2.0 m) 均置于探测区域内。天线阵列由7个间隔为  $0.3 \text{ m}$  的天线单元组成,中心天线单元位于(1.5 m,0 m)处。使用 FDTD 技术计算散射问题及完成时间反演成像, FDTD 网格长度为  $dx = dy = 0.015 \text{ m}$ 。探测信号的中心频率  $F_c = 500 \text{ MHz}$ , 采样频率  $8 \text{ GHz}$ , 采样点  $M$  为 1024。所有天线单元依次发射探测信号,天线阵列接收回波,并进行傅里叶变换,得到  $49 \times 1024$  维频域 FD-SF-MDM 矩阵  $\mathbf{K}$ , 奇异值分解该矩阵,得到左奇异向量矩阵  $\mathbf{U}$ 。检测接收散射场数据的信号强度,叠加信噪比为  $10 \text{ dB}$  的高斯白噪声,按相同的步骤求取叠加噪声后的左奇异向量矩阵  $\mathbf{U}$ 。选取叠加噪声前后的向量  $\mathbf{U}_p^{\text{sub}n}$ , 分别代入式(10),求取累加值  $\Delta\varphi$ ,如图2所示。图中有两个累加值明显小于其它值,说明探测区域内有两个目标。

求取与目标 T1, T2 相对应的列向量  $\mathbf{U}_1$  与  $\mathbf{U}_2$  的相位分布如图3所示,每个与目标相对应的列向量由7个子向量组成,每个子向量的相位均隐含有目标与天线阵列空间关系的信息,但叠加噪声后求取的相位发生了偏离。将叠加噪声后得到的向量  $\mathbf{U}_p^{\text{sub}n}$  代入式(8),得到 SF-DORT 方法的成像结果如图4所示。为了详细说明 SF-DORT 方法的成像性能,论文给出两目标的成像分辨率,同时给出未叠加噪声时的 SF-DORT 方法与 TD-DORT 方法对目标的成像分辨率,如图5所示。此时, SF-DORT 仅需要天线阵列测量的一次散射数据,而 TD-DORT 需要7次。

图3 与目标 T1 及 T2 对应列向量的相位分布



(a) SF-DORT对目标T1成像



(b) SF-DORT对目标T2成像

图4 叠加噪声后 SF-DORT 成像结果

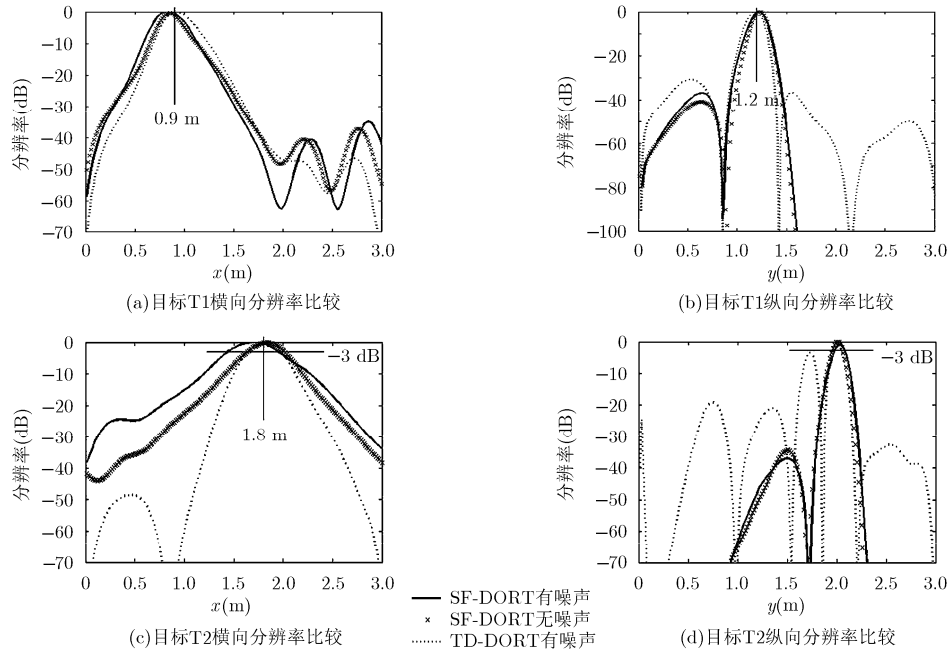


图 5 目标 T1 与 T2 成像分辨率比较示意图

由图 5 可知，由于目标 T1 离天线阵列较近，为强散射体目标，噪声对其影响较小；目标 T2 离天线阵列较远，为弱散射体目标，噪声对其影响较大。图 5(c)显示噪声使得 SF-DORT 的成像偏离目标实际位置。图 5(d)显示 TD-DORT 图像的杂斑接近 -3dB，成像几乎失败。为改善目标在噪声环境中的成像性能，用 FD-SF-DORT 对目标再次成像，将叠加噪声后得到的向量  $U_1$  及  $U_2$  代入式(9)，成像结果如图 6，分辨率比较如图 7 所示，由于统计特性的作用，FD-SF-DORT 明显提高了目标成像分辨率与成像准确性。此时，FD-SF-DORT 需要天线阵列测量的散射数据与 TD-DORT 相同，均为 7 次。

### 4 结论

本文提出了基于空频分解的时间反演成像新方法。新方法使用天线阵列采集的散射场数据建立空频矩阵，奇异值分解该矩阵得到信号子空间向量，利用这些向量求取成像伪谱，实现对目标的选择性成像。基于完全散射场数据的 FD-SF-DORT 方法

的成像伪谱包含多个子向量贡献，相当于多次成像的叠加，具有统计特性。本文在获取散射场数据后，测定接收信号的强度，叠加信噪比为 10 dB 的高斯白噪声，由于随机相位的存在，叠加的噪声使得传统的 TD-DORT 方法的成像几乎失败，使得 SF-DORT 方法的相位发生偏移，导致其生成的图像偏离目标实际位置。由于统计特性的作用，基于完全数据的 FD-SF-DORT 方法使这种偏离变小，既避免了空空分解时间反演算法奇异值分解算子矩阵产生的随机相位的影响，又能较好地抵抗高斯白噪声的干扰，提高了算法在干扰环境下对多目标的准确成像能力。FD-SF-DORT 方法需要的散射数据与 TD-DORT 方法完全相同，也就是说，在相同条件下，FD-SF-DORT 具有比 TD-DORT 方法优越的抗噪声性能。就成像效率而言，SF-DORT 方法仅需要天线阵列的一次散射场数据，在抗噪声性能可比拟的情况下，具有比 TD-DORT 方法较高的成像效率。

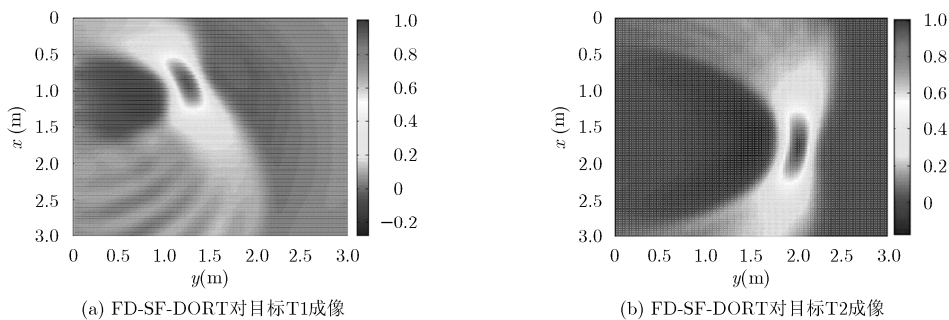


图6 叠加噪声后FD-SF-DORT成像结果

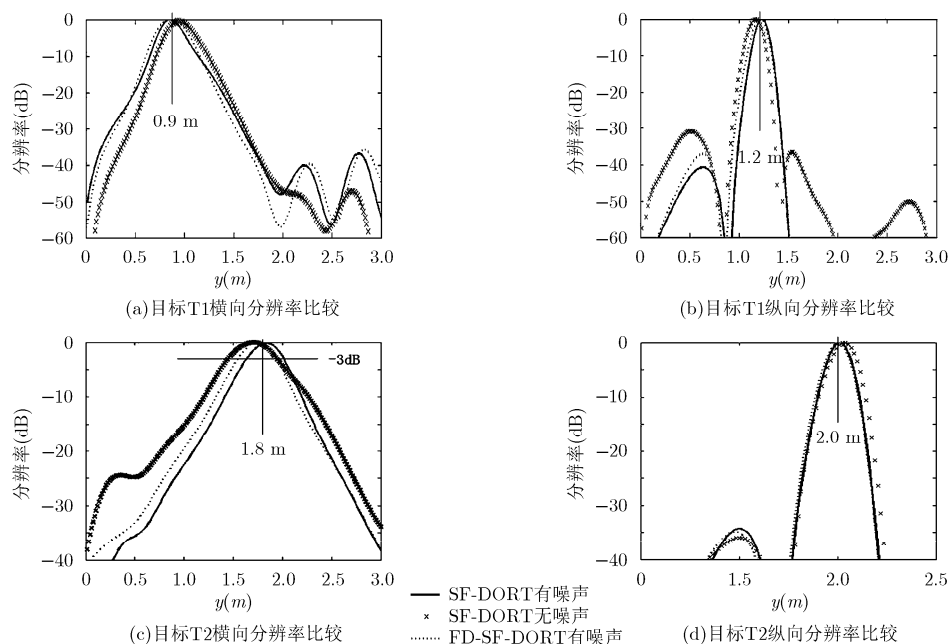


图7 目标T1与T2成像分辨率比较示意图

## 参考文献

- [1] YAVUZ M E and TEIXEIRA F L. A numerical study of time reversed UWB electromagnetic waves in continuous random media[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2005, 4(6): 43–46. doi: 10.1109/LAWP.2005.844117.
  - [2] DEVANEY A J. Time reversal imaging of obscured targets from multistatic data[J]. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, 2005, 53(5): 1600–1610. doi: 10.1109/TAP. 2005. 846723.
  - [3] 范晶晶, 赵德双, 张浩然, 等. 基于时间反演的天线阵列激励分布确定方法研究[J]. *电子与信息学报*, 2014, 36(9): 2238–2243. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.01737.  
FAN Jingjing, ZHAO Deshuang, ZHANG Haoran, *et al.* Array excitation determining method based on time reversal [J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014, 36(9): 2238–2243. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.01737.
  - [4] PRADA C, MANNEVILLE S, SPOLIANSKY D, *et al.* Decomposition of the time reversal operator: Detection and selective focusing on two scatterers[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1996, 99(4): 2067–2076.
  - [5] YAVUZ M E and TEIXEIRA F L. Full time-domain DORT for ultrawideband fields in dispersive, random inhomogeneous media[J]. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, 2006, 54(8): 2305–2315. doi: 10.1109/TAP.2006.879196.
  - [6] KAFAL M, COZZA A, and PICHON L. Locating multiple soft faults in wire networks using an alternative DORT implementation[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation & Measurement*, 2016, 65(2): 399–406. doi: 10.1109/TIM.2015. 2498559.
  - [7] GELAT P, HAAR G T, and SAFFARI N. An assessment of the DORT method on simple scatterers using boundary element modelling[J]. *Physics in Medicine and Biology*, 2015, 60(9): 3715–3730. doi: 10.1088/0031-9155/60/9/3715.
  - [8] LEV-ARI H and DEVANEY A J. The time reversal techniques reinterpreted: subspace-based signal processing for multistatic target location[C]. *Sensor Array & Multichannel Signal Processing Workshop*, Cambridge, MA, USA, 2000: 509–513. doi: 10.1109/SAM.2000.878061.
  - [9] YAVUZ M E and TEIXEIRA F L. On the sensitivity of time-reversal imaging techniques to model perturbations[J]. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, 2008, 56(3): 834–843. doi: 10.1109/TAP.2008.916933.
  - [10] ISLAM M S and KAABOUCH N. Evaluation of TR-MUSIC algorithm efficiency in detecting breast microcalcifications[C]. *IEEE International Conference on Electro/Information Technology*, DeKalb, IL, USA, 2015: 617–620. doi: 10.1109/EIT. 2015.7293406.
  - [11] He J and YUAN F G. Lamb waves based fast subwavelength imaging using a DORT-MUSIC algorithm[C]. *American Institute of Physics Conference Series*, Minneapolis, MN, USA, 2016, 1706(1): 1103–1113.
  - [12] BORCEA L. Interferometric imaging and time reversal in random media[J]. *Inverse Problem*, 2003, 18(5): 1247–1279. doi: 10.1007/978-3-540-70529-1\_157.
  - [13] SCHOLZ B. Towards virtual electrical breast biopsy: Space-frequency MUSIC for trans-admittance data[J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2002, 21(6): 588–595. doi: 10.1109/TMI.2002.800609.
  - [14] PETROLIS R, RAMONAIT R, JANCIAUSKAS D, *et al.* Digital imaging of colon tissue: Method for evaluation of inflammation severity by spatial frequency features of the histological images[J]. *Diagnostic Pathology*, 2015, 10(1): 1–10. doi: 10.1186/s13000-015-0389-7.
  - [15] CUCCIA D J, BEVILACQUA F, DURKIN A J, *et al.* Modulated imaging: Quantitative analysis and tomography of turbid media in the spatial-frequency domain[J]. *Optics Letters*, 2005, 30(11): 1354–1356. doi: 10.1364/OL.30.001354.
- 钟选明: 男, 1972年生, 副教授, 研究方向为微波成像、时间反演。  
廖成: 男, 1964年生, 教授, 研究方向为电磁散射与逆散射、天线设计。