

二维双原型完全过采样 DFT 调制滤波器组的快速设计方法

蒋俊正* 郭 云 欧阳缮

(桂林电子科技大学信息与通信学院 桂林 541004)

摘 要: 传统的 2 维大规模滤波器组的设计方法具有复杂度高的缺点。该文提出一种设计 2 维双原型滤波器组的快速方法, 该方法利用近似完全重构的条件, 并采用完全过采样的离散傅里叶变换(DFT)调制滤波器组来设计。新算法将两个原型滤波器的设计问题归结为一个无约束优化问题, 其中目标函数为滤波器组的总体失真(传递失真和混叠失真)与原型滤波器阻带能量的加权和, 利用目标函数的梯度向量, 通过双迭代机制求解该优化问题。单步迭代中, 利用矩阵求逆的等效条件和块 Toeplitz 矩阵求逆的快速算法, 显著地降低了计算复杂度。理论分析和数值实验表明, 新算法可以得到整体性能更好的滤波器组, 计算复杂度大幅度降低, 故可以快速设计大规模的 2 维滤波器组。

关键词: 2 维离散傅里叶变换; 无约束优化; 完全过采样; 块 Toeplitz 矩阵求逆; 双迭代算法

中图分类号: TN911.72

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2016)11-2753-07

DOI: 10.11999/JEIT160125

Fast Design of 2D and Double-prototype Fully Oversampled DFT Modulated Filter Banks

JIANG Junzheng GUO Yun OUYANG Shan

(School of Information and Communication, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China)

Abstract: Traditional design methods of two-dimensional large-scale filter banks suffer from high-complexity. This paper presents an algorithm to design two-dimensional double-prototype fully oversampled Discrete Fourier Transform (DFT) modulated filter bank with Nearly Perfect Reconstruction (NPR). The algorithm is based on bi-iterative scheme, where the design issue is formulated into an unconstrained optimization issue whose objective function is the weighted sum of the transfer distortion and the aliasing distortion of the filter bank, and the stopband energy of the Prototype Filters (PFs). By exploiting the gradient information, the optimization problem can be efficiently solved by utilizing the bi-iterative scheme. The matrix inverse identity and the fast algorithm for Toeplitz-block Toeplitz matrix inversion are employed to dramatically reduce the computational cost of the iterative procedure. The theoretical analysis and numerical experiments are carried out to show that compared with the existing methods, the new algorithm possesses much lower computational cost and can be used to design large-scale two-dimensional filter bank with better overall performance.

Key words: Two-dimensional Discrete Fourier Transform (DFT); Unconstrained optimization; Fully oversampled; Toeplitz-block Toeplitz matrix inversion; Bi-iterative scheme

1 引言

多速率滤波器组已广泛应用于图像处理、音视频信号处理、数字通信、计算机视觉和纹理识别与分类等领域中。1 维情况下 M 带均匀滤波器组的理论与设计方法已达到一个相当成熟的阶段。在 2 维

情况下, 和 2 维可分滤波器组相比, 2 维不可分滤波器组有着更好的方向选择性、灵活的频域划分和更多的自由度^[1-7]。其中 2 维 DFT 调制滤波器组又有设计简单和实现代价小的特点, 呈现了越来越多的优势^[8-11]。

相比于 1 维滤波器组, 2 维滤波器组存在几个方面的困难, 特别是在设计大规模滤波器组时, 更具有挑战性。在双迭代二阶锥规化(BI-SOCP)算法^[12]中, 提出了一种设计 2 维双原型 DFT 调制滤波器(DMFB)的方法, 设计问题归结为一个带约束的优化问题。由于 BI-SOCP 算法的计算量包括线性约束的系数矩阵的计算和 SOCP 的求解, 前者由相应

收稿日期: 2016-01-26; 改回日期: 2016-06-20; 网络出版: 2016-09-08

*通信作者: 蒋俊正 jzjiang@guet.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(61261032, 61371186), 广西区自然科学基金(2013GXNSFB019264)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61261032, 61371186), The Guangxi Natural Science Foundation (2013GXNSFB019264)

闭区域内离散点的数目决定,后者取决于优化变量的个数和约束个数,故 BI-SOCP 难以设计 2 维大规模的 DMFBs。为了克服这种缺陷,提出了设计 2 维 DMFBs 的修正牛顿法^[13]和共轭梯度法^[14]以及文献[15]的方法,但这 3 种方法都是用来设计 2 维单原型滤波器组。

本文所考虑的滤波器组是 2 维双原型完全过采样的 DMFB。在完全过采样条件下,所有的混叠传递函数才有可能被消除或抑制到可以接受的水平,所以本文采用完全过采样来设计。根据滤波器组的性能指标,将原型滤波器的设计问题归结为一个无约束的优化问题,目标函数是滤波器组的混叠失真、传递失真和原型滤波器阻带能量的加权和,利用目标函数梯度向量的零向量解,最后运用双迭代算法^[16]求解原型滤波器。并且单步迭代中,运用矩阵求逆的等价条件^[17]和块 Toeplitz 矩阵求逆的快速算法^[18]极大减小了所求逆矩阵的阶数,进而显著降低了计算的复杂度。通过仿真实验表明,该算法灵活度更高,具有更低的计算代价,可以快速而有效地设计 2 维大规模的滤波器组。

2 两维 DFT 调制滤波器组的基本结构

图 1 给出了一个 2 维 DFT 调制滤波器组,其中 \mathbf{D}_1 是调制矩阵, \mathbf{D}_2 是采样矩阵。其中 $H_0(\mathbf{w}), H_1(\mathbf{w}), \dots, H_{|\mathbf{D}_1|-1}(\mathbf{w})$ 构成了分析滤波器组, $G_0(\mathbf{w}), G_1(\mathbf{w}), \dots, G_{|\mathbf{D}_1|-1}(\mathbf{w})$ 构成了综合滤波器组, $X(\mathbf{w}), Y_i(\mathbf{w}), \tilde{X}(\mathbf{w})$ 分别是 2 维傅里叶变换的输入信号,子带信号和输出信号。设 \mathbf{h} 和 \mathbf{g} 分别为分析和综合原型滤波器,表达式由式(1)给出

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{h} &= [h(-L_a, L_a), \dots, h(-L_a, L_a), \dots, h(L_a, L_a)]^T \\ \mathbf{g} &= [g(-L_s, L_s), \dots, g(-L_s, L_s), \dots, g(L_s, L_s)]^T \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

相应的频率响应为

$$\left. \begin{aligned} H(\mathbf{w}) &= \mathbf{c}^T(\mathbf{w}, L_a) \mathbf{h} \\ G(\mathbf{w}) &= \mathbf{c}^T(\mathbf{w}, L_s) \mathbf{g} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中, $\mathbf{c}(\mathbf{w}, L) = \{e^{-j[-L, -L]\mathbf{w}}, \dots, e^{-j[-L, L]\mathbf{w}}, \dots, e^{-j[L, L]\mathbf{w}}\}^T$, $\mathbf{w} = [\omega_x, \omega_y]^T$ 表示 2 维频率向量。

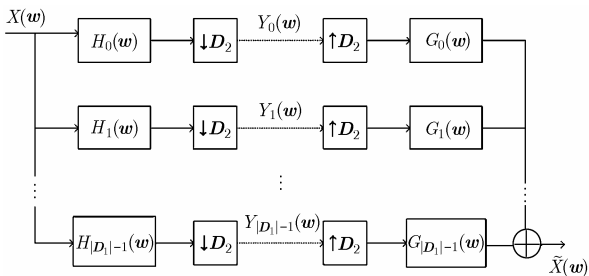


图 1 2 维 DFT 调制滤波器组的基本结构

分析和综合滤波器的 2 维 DFT 调制公式为

$$\begin{cases} h_i(\mathbf{n}) = h(\mathbf{n}) \exp(j2\pi \mathbf{u}_i^T \mathbf{D}_1^{-1} \mathbf{n}) \\ g_i(\mathbf{n}) = g(\mathbf{n}) \exp(j2\pi \mathbf{u}_i^T \mathbf{D}_1^{-1} \mathbf{n}) \end{cases}, \quad i = 0, 1, \dots, |\mathbf{D}_1| - 1 \quad (3)$$

其中调制矩阵 \mathbf{D}_1 是一个 2×2 的非奇异整数矩阵,它的集合 $N(\mathbf{D}_1^T)$ 定义为

$$N(\mathbf{D}_1^T) = \left\{ \mathbf{u}_i \equiv \mathbf{D}_1^T \mathbf{x}_i \in Z^2 : \mathbf{x}_i \in [0, 1]^2, \right. \\ \left. i = 0, 1, \dots, |\mathbf{D}_1| - 1 \right\} \quad (4)$$

相应地,分析和综合滤波器的频率响应为

$$\begin{cases} H_i(\mathbf{w}) = H(\mathbf{w} - 2\pi \mathbf{D}_1^{-T} \mathbf{u}_i) \\ G_i(\mathbf{w}) = G(\mathbf{w} - 2\pi \mathbf{D}_1^{-T} \mathbf{u}_i) \end{cases}, \quad i = 0, 1, \dots, |\mathbf{D}_1| - 1 \quad (5)$$

与调制矩阵 \mathbf{D}_1 相同,设采样矩阵 \mathbf{D}_2 是另一个 2×2 的非奇异矩阵,其集合 $N(\mathbf{D}_2^T)$ 定义为

$$N(\mathbf{D}_2^T) = \left\{ \mathbf{v}_m \equiv \mathbf{D}_2^T \mathbf{x}_m \in Z^2 : \mathbf{x}_m \in [0, 1]^2, \right. \\ \left. m = 0, 1, \dots, |\mathbf{D}_2| - 1 \right\} \quad (6)$$

子带信号的表达式为

$$Y_i(\mathbf{w}) = \frac{1}{|\mathbf{D}_2|} \sum_{m=0}^{|\mathbf{D}_2|-1} H_i(\mathbf{w} - 2\pi \mathbf{D}_2^{-T} \mathbf{v}_m) \cdot X(\mathbf{w} - 2\pi \mathbf{D}_2^{-T} \mathbf{v}_m) \quad (7)$$

其中 $\mathbf{v}_m \in N(\mathbf{D}_2^T) = \{\mathbf{v}_m \equiv \mathbf{D}_2^T \mathbf{x}_m \in Z^2 : \mathbf{x}_m \in [0, 1]^2, m = 0, 1, \dots, |\mathbf{D}_2| - 1\}$ 。

滤波器组的输入输出关系为

$$\tilde{X}(\mathbf{w}) = T_0(\mathbf{w})X(\mathbf{w}) + \sum_{k=1}^{|\mathbf{D}_2|-1} T_k(\mathbf{w})X(\mathbf{w} - 2\pi \mathbf{D}_2^{-T} \mathbf{v}_k) \quad (8)$$

其中,传递函数和混叠传递函数分别为

$$T_0(\mathbf{w}) = \frac{1}{|\mathbf{D}_2|} \sum_{i=0}^{|\mathbf{D}_1|-1} H_i(\mathbf{w})G_i(\mathbf{w}) \quad (9a)$$

$$T_k(\mathbf{w}) = \frac{1}{|\mathbf{D}_2|} \sum_{i=0}^{|\mathbf{D}_1|-1} H_i(\mathbf{w} - 2\pi \mathbf{D}_2^{-T} \mathbf{v}_k)G_i(\mathbf{w}), \\ k = 1, \dots, |\mathbf{D}_2| - 1 \quad (9b)$$

众所周知,当 $T_0(\mathbf{w})$ 是一个纯的延迟, $T_k(\mathbf{w})$ 为零时,滤波器组完全重构(PR)。如果条件足够精确,则为近似完全重构(NPR)。在本文中,考虑设计 2 维近似完全重构的完全过采样 DMFB,原型滤波器的通带和阻带没有重合区域,设集合 $\mathbf{S}_T = \{\mathbf{n} | \mathbf{n} \bmod \mathbf{D}_1 = \mathbf{0}, \mathbf{n} \in [-L_a - L_s, L_a + L_s]^2\}$, \mathbf{S}_T 的集合对应的行栈为 $\{l_r \in Z, 0 \leq l_r \leq (2L_a + 2L_s + 1)^2 - 1, r = 0, \dots, K - 1\}$,其中 K 是 \mathbf{S}_T 的规模,通过调制矩阵 \mathbf{D}_1 的基本平行六面体的结构及区域 $[-L_a - L_s, L_a + L_s]^2$,可以发现 $K \leq ((8L_a + 8L_s)^2 / |\mathbf{D}_1| + 4L_a + 4L_s + 1)^{[1]}$ 。

与1维DFT滤波器组的设计相似,2维双原型完全过采样DFT调制滤波器组设计的性能指标主要包括滤波器组的传递失真和混叠失真,这两项决定了滤波器组的重构误差。另外还包括原型滤波器组的阻带能量,设计时期望得到高的阻带衰减。传递失真^[14]可以表示为

$$T_k(\mathbf{w}) = \frac{|D_1|}{|D_2|} e^{\mathbf{T}(\mathbf{w})} \{ \mathbf{A} \mathbf{G}(\mathbf{h}) \mathbf{\Lambda}_k \mathbf{g} \}, \quad k=0,1,\dots,|D_2|-1 \quad (10a)$$

或

$$T_k(\mathbf{w}) = \frac{|D_1|}{|D_2|} e^{\mathbf{T}(\mathbf{w})} \{ \mathbf{A} \mathbf{G}(\mathbf{g}) \mathbf{\Lambda}_k \mathbf{h} \}, \quad k=0,1,\dots,|D_2|-1 \quad (10b)$$

其中, $\mathbf{e}(\mathbf{w}) = [e^{-j\mathbf{w}^T \mathbf{n}_0}, \dots, e^{-j\mathbf{w}^T \mathbf{n}_{K-1}}]^T$, \mathbf{A} 是一个 $K \times (2L_a + 2L_s + 1)^2$ 的矩阵, 表示为

$$\mathbf{A}[r, m] = \begin{cases} 1, & m = l_r, r = 0, \dots, K-1, \\ & m = 0, \dots, (2L_a + 2L_s + 1)^2 - 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (11)$$

$\mathbf{G}(\mathbf{h})$, $\mathbf{G}(\mathbf{g})$ 是块矩阵^[13], $\mathbf{\Lambda}_k$ 是一个对角矩阵, 表示为

$$\mathbf{\Lambda}_k = \text{diag} \left\{ \exp(j2\pi \mathbf{v}_k^T \mathbf{D}_2^{-1} [-L, -L]^T), \dots, \exp(j2\pi \mathbf{v}_k^T \mathbf{D}_2^{-1} [-L, L]^T), \dots, \exp(j2\pi \mathbf{v}_k^T \mathbf{D}_2^{-1} [L, L]^T) \right\}, \quad \mathbf{v}_0 = [0, 0]^T \quad (12)$$

根据式(9a), 式(10a)和式(10b), 可以推出2维双原型DMFB无失真的唯一条件为

$$\mathbf{A} \mathbf{G}(\mathbf{h}) \mathbf{g} = \mathbf{b} \quad \text{或} \quad \mathbf{A} \mathbf{G}(\mathbf{g}) \mathbf{h} = \mathbf{b} \quad (13)$$

其中, \mathbf{b} 是一个除了第 $(K-1)/2$ 个元素有值外, 其它均为零的 $K \times 1$ 的向量, 表示为 $\mathbf{b} = [0, \dots, 0, |D_2| / |D_1|, 0, \dots, 0]^T$, 其证明与文献[13]中相似, 故省略。

另外, 分析和综合原型滤波器的阻带能量表示为

$$\left. \begin{aligned} E(\mathbf{h}) &= \iint_{\Omega} |H(\mathbf{w})|^2 d\mathbf{w} \\ &= \mathbf{h}^T \left\{ \iint_{\Omega} \mathbf{c}(\mathbf{w}, L_a) \mathbf{c}^H(\mathbf{w}, L_a) d\mathbf{w} \right\} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h}^T \mathbf{R}_s(\mathbf{h}) \mathbf{h} \\ E(\mathbf{g}) &= \iint_{\Omega} |G(\mathbf{w})|^2 d\mathbf{w} \\ &= \mathbf{g}^T \left\{ \iint_{\Omega} \mathbf{c}(\mathbf{w}, L_s) \mathbf{c}^H(\mathbf{w}, L_s) d\mathbf{w} \right\} \cdot \mathbf{g} = \mathbf{g}^T \mathbf{R}_s(\mathbf{g}) \mathbf{g} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

其中^H代表共轭转置, \mathbf{R}_s 是一个块 Toeplitz 矩阵, 它的逆可以通过 Wax-Kailath 算法快速求解, 并只需计算一次。

3 2维双原型过采样DFT调制滤波器组的设计

3.1 原型滤波器的设计

基于前面的分析, 原型滤波器的目标函数为总失真和阻带能量的加权和, 设计问题归结为一个无约束的优化问题, 表示为

$$\min_{\mathbf{h}, \mathbf{g}} \left\{ \Phi(\mathbf{h}, \mathbf{g}) = \|\mathbf{A} \mathbf{G}(\mathbf{h}) \mathbf{g} - \mathbf{b}\|_2^2 + \alpha E(\mathbf{h}) + \alpha E(\mathbf{g}) \right\} \quad (15a)$$

或

$$\min_{\mathbf{h}, \mathbf{g}} \left\{ \Phi(\mathbf{h}, \mathbf{g}) = \|\mathbf{A} \mathbf{G}(\mathbf{g}) \mathbf{h} - \mathbf{b}\|_2^2 + \alpha E(\mathbf{h}) + \alpha E(\mathbf{g}) \right\} \quad (15b)$$

式中, $\|\mathbf{A} \mathbf{G}(\mathbf{h}) \mathbf{g} - \mathbf{b}\|_2^2$ 和 $\|\mathbf{A} \mathbf{G}(\mathbf{g}) \mathbf{h} - \mathbf{b}\|_2^2$ 用来控制传递失真, $E(\mathbf{h})$ 和 $E(\mathbf{g})$ 分别为分析和综合原型滤波器的阻带能量, α 是平衡失真和阻带能量的权值。当滤波器组具有高的阻带能量时, 混叠失真几乎可以忽略。

式(15a)和式(15b)的优化问题可以利用双迭代来求解, 当 \mathbf{h} 固定时, 目标函数是关于综合原型滤波器 \mathbf{g} 的无约束的凸二次函数。

$$\min_{\mathbf{g}} \left\{ \Phi(\mathbf{h}, \mathbf{g}) = \|\mathbf{A} \mathbf{G}(\mathbf{h}) \mathbf{g} - \mathbf{b}\|_2^2 + \alpha E(\mathbf{h}) + \alpha E(\mathbf{g}) \right\} \quad (16)$$

令目标函数梯度为零向量, 表示为

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{h}, \mathbf{g})}{\partial \mathbf{g}} = 2(\mathbf{A} \mathbf{G}(\mathbf{h}))^T (\mathbf{A} \mathbf{G}(\mathbf{h})) \mathbf{g} - 2(\mathbf{A} \mathbf{G}(\mathbf{h})) \mathbf{b} + 2\alpha \mathbf{R}_s(\mathbf{g}) = \mathbf{0} \quad (17)$$

可求得 \mathbf{g} 的最优解为

$$\mathbf{g} = \left((\mathbf{A} \mathbf{G}(\mathbf{h}))^T (\mathbf{A} \mathbf{G}(\mathbf{h})) + \alpha \mathbf{R}_s(\mathbf{g}) \right)^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{G}(\mathbf{h}))^T \mathbf{b} \quad (18)$$

同理, 当 \mathbf{g} 固定时, 要求解一个关于分析原型滤波器 \mathbf{h} 的无约束凸二次函数

$$\min_{\mathbf{h}} \left\{ \Phi(\mathbf{h}, \mathbf{g}) = \|\mathbf{A} \mathbf{G}(\mathbf{g}) \mathbf{h} - \mathbf{b}\|_2^2 + \alpha E(\mathbf{h}) + \alpha E(\mathbf{g}) \right\} \quad (19)$$

令目标函数梯度为零向量, 表示为

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{h}, \mathbf{g})}{\partial \mathbf{h}} = 2(\mathbf{A} \mathbf{G}(\mathbf{g}))^T (\mathbf{A} \mathbf{G}(\mathbf{g})) \mathbf{h} - 2(\mathbf{A} \mathbf{G}(\mathbf{g})) \mathbf{b} + 2\alpha \mathbf{R}_s(\mathbf{h}) = \mathbf{0} \quad (20)$$

可求得 \mathbf{h} 的最优解为

$$\mathbf{h} = \left((\mathbf{A} \mathbf{G}(\mathbf{g}))^T (\mathbf{A} \mathbf{G}(\mathbf{g})) + \alpha \mathbf{R}_s(\mathbf{h}) \right)^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{G}(\mathbf{g}))^T \mathbf{b} \quad (21)$$

从一个合适的初始原型滤波器 \mathbf{h}_0 开始, 可以利用式(17)和式(20)双迭代优化原型滤波器, 每次迭代可依次用式(22)更新。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{g}_0 &= \left((\mathbf{A} \mathbf{G}(\mathbf{h}_0))^T (\mathbf{A} \mathbf{G}(\mathbf{h}_0)) + \alpha \mathbf{R}_s(\mathbf{g}) \right)^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{G}(\mathbf{h}_0))^T \mathbf{b} \\ \mathbf{h} &= \left((\mathbf{A} \mathbf{G}(\mathbf{g}_0))^T (\mathbf{A} \mathbf{G}(\mathbf{g}_0)) + \alpha \mathbf{R}_s(\mathbf{h}) \right)^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{G}(\mathbf{g}_0))^T \mathbf{b} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

当设计的滤波器组通道数较多, 滤波器空域支撑较大时, 式(22)涉及到对大型矩阵求逆, 运算量

巨大。因此,为了减少矩阵求逆的运算量,可以利用式(22)的矩阵求逆的等效条件:

$$(BB^T + A)^{-1}B = A^{-1}B(I + B^T A^{-1}B)^{-1} \quad (23)$$

式中, I 代表单位矩阵。由式(23)可将式(22)简化为

$$\left. \begin{aligned} g_0 &= Q_2 B_1 (I_K + B_1^T Q_2 B_1)^{-1} b \\ h &= Q_1 B_2 (I_K + B_2^T Q_1 B_2)^{-1} b \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

其中, $Q_1 = (\alpha R_s(h))^{-1}$, $Q_2 = (\alpha R_s(g))^{-1}$, $B_1 = (AG(h_0))^T$, $B_2 = (AG(g_0))^T$ 。

综上所述,本文设计原型滤波器的算法步骤如下:

第1步 在完全过采样的条件下,确定调制矩阵 D_1 和采样矩阵 D_2 以及原型滤波器的空域支撑 L_a 和 L_s ;

第2步 设计一个初始的分析原型滤波器 h_0 ;

第3步 利用得到的 h_0 , 运用式(23)先求得综合原型滤波器 g_0 , 再利用求得的 g_0 , 最后更新得到新的分析原型滤波器 h ;

第4步 检验迭代终止条件,判断 $\|h - h_0\|_2 \leq \eta$ (η 是给定的很小的正数)是否成立或迭代次数超过一个给定的数 C (试验中 $C = 20$), 如果满足,迭代过程将停止, h 和 g 就是最优的解, 否则令 $h_0 = 0.5(h_0 + h)$ 同时返回到第3步继续进行迭代过程。

该算法中,初始分析原型滤波器可以通过最小二乘法[13]或利用 MATLAB 的 2 维窗口方法('fwind2')快速设计。为了更加有效实现最终结果,选择使用文献[15]中算出来的 h (在相同的条件下仿真得到的 h) 作为本算法中初始的分析原型滤波器 h_0 。

3.2 计算复杂度分析

本文算法的计算复杂度主要由求解分析和综合原型滤波器构成,由式(21)得,需要求解 $(2L_s + 1)^2 \times (2L_s + 1)^2$ 和 $(2L_a + 1)^2 \times (2L_a + 1)^2$ 矩阵的逆,在式(23)中, $I_K + B^T Q B$ 是一个 $K \times K$ 的矩阵,极大降低了所求逆矩阵的阶数,又 $K \leq ((8L_a + 8L_s)^2 / |D_1| + 4L_a + 4L_s + 1)$, 所以矩阵逆的复杂度从 $O((2L + 1)^6)$, $L = L_a, L_s$ 减小到 $O(((8L_a + 8L_s) / |D_1| + 4L_a + 4L_s + 1)^3)$ 。特别当滤波器组具备很大

通道数以及滤波器空域支撑较大时(即 L_a, L_s 和 $|D_1|$ 都很大时),本文算法的计算量会明显减少,适用于计算 2 维大规模的滤波器组。

4 仿真结果与分析

在本节,在相同的环境下将本文算法与现有算法进行仿真对比。一般而言,滤波器组的性能是通过传递失真(用 ε_t 表示),混叠失真(用 ε_a 表示)和原型滤波器的阻带衰减(分析原型滤波器的阻带衰减用 SAA 表示,综合原型滤波器的阻带衰减用 SAA 表示)来测量的。由于重构误差是由传递失真和混叠失真联合决定的,故在仿真时可以忽略。

例1 考虑设计一个 2 维完全过采样的 DFT 调制滤波器组,调制矩阵、采样矩阵和空域支撑分别为

$$D_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, L_a = 8, L_s = 8, \eta = 1 \times 10^{-8}$$

在本文算法中,相关参数为: $\alpha = 1 \times 10^{-2}$, 得到的原型滤波器的幅度响应如图 2 所示。同时用文献[12]中的二阶锥规划算法(BI-SOCP)来设计,相关的参数为 $\varepsilon_{sbe} = 0.01$, $\varepsilon_{tbe} = 10$, $\varepsilon_{pdf} = 2$, 其中 ε_{sbe} , ε_{tbe} , ε_{pdf} 分别是对阻带能量、过渡带能量和通带平坦性的容许误差。为了保证比较的公平性,两种算法都是选用文献[15]方法计算出来的分析原型滤波器作为初始的原型滤波器。在相同的环境下运行,表 1 给出了两种方法所得到的滤波器组的性能与时间对比,从表中可以看出本算法设计的分析滤波器的阻带衰减降低了 12.27 dB,综合滤波器的阻带衰减降低了 7.78 dB,所以本文算法得到的滤波器组具有更好的频率特性。并且本文算法的计算复杂度更低,所花费的时间大大减少。

例2 设计一个 2 维大规模的 DFT 调制滤波器组满足下面的参数设置:

$$D_1 = \begin{bmatrix} 20 & -20 \\ 20 & 20 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 10 & -10 \\ 10 & 10 \end{bmatrix},$$

$$L_a = 50, L_s = 50, \alpha = 1 \times 10^{-3}, \eta = 1 \times 10^{-5}$$

由调制矩阵 D_1 得出该滤波器组有 800 个子带,空域支撑的长度表明原型滤波器的系数上升到了 10201。将文献[15]中的算法与本文算法进行比较,

表 1 本文算法与 BI-SOCP 算法的性能对比

设计算法	SAA (dB)	SAS (dB)	ε_t (dB)	ε_a (dB)	迭代次数	所耗 CPU 时间 (s)
BI-SOCP	-24.01	-28.50	-48.50	-48.33	20	8280.60
本文算法	-36.28	-36.28	-61.55	-44.41	8	0.42

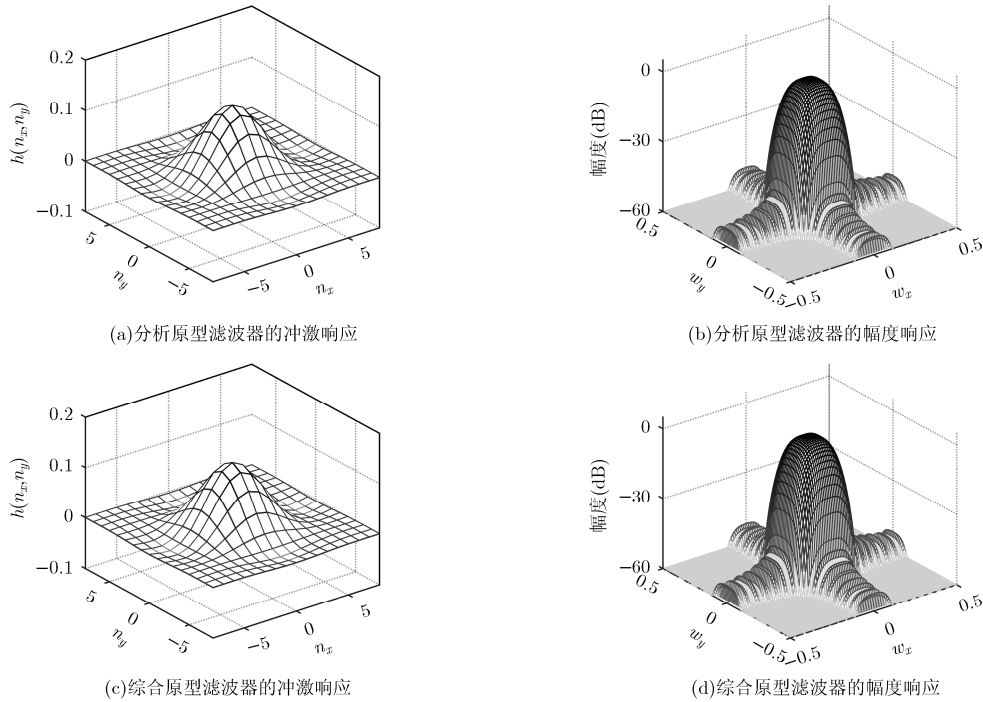


图 2 原型滤波器的冲激响应和归一化幅度响应

本文算法中得到的原型滤波器的归一化幅度响应如图 3 所示。表 2 给出了两种算法的性能对比，本算法在 8 次迭代中 CPU 所耗时间为 45.40 s。同时由于本文算法采用双原型滤波器组来设计，可以调整分析和综合滤波器为不同的空域支撑，设分析滤波器不变，综合原型滤波器的空域支撑增加为 $L_s=55$ ，得到的原型滤波器的幅度响应如图 4 所示。表 3 给出了改变空域支撑时滤波器的性能指标，同样在 8

次迭代中所耗 CPU 时间为 69.34 s，综合表 2 和表 3 可以看出，综合原型滤波器的阻带衰减以及传递失真都有减少，并且本文算法的频率选择更加灵活，更适合快速设计二维双原型大规模的滤波器组。

5 结束语

本文围绕设计二维双原型完全过采样 DFT 调制滤波器组的设计问题，提出了一种基于无约束优化的快速有效的算法。理论分析和仿真结果表明，本

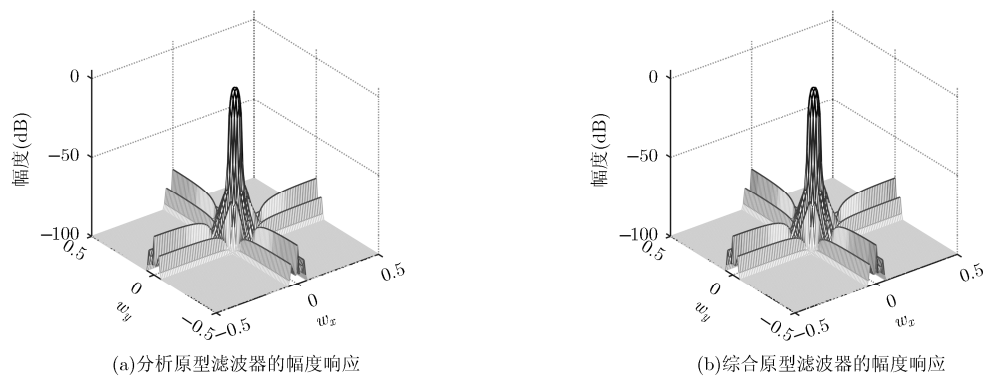


图 3 空域支撑相等时原型滤波器归一化幅度响应

表 2 本文算法与文献[15]算法的性能对比

设计算法	SAA (dB)	SAS (dB)	ϵ_f (dB)	ϵ_a (dB)	迭代次数
文献[15]算法	-48.43	-48.43	-51.61	-67.05	18
本文算法	-47.65	-47.58	-53.08	-69.30	8

表3 改变综合原型滤波器空域支撑时的性能

设计算法	SAA (dB)	SAS (dB)	ε_t (dB)	ε_a (dB)	迭代次数
本文算法	-48.88	-50.94	-60.34	-68.92	8

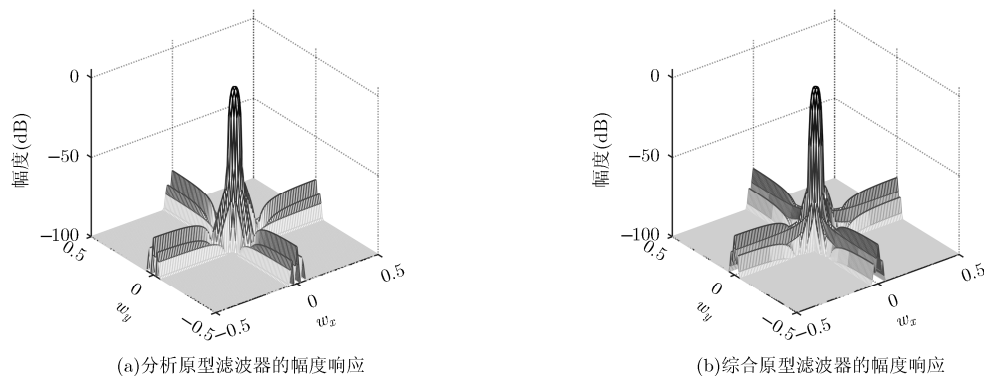


图4 空域支撑不等时原型滤波器归一化幅度响应

文算法得到的滤波器组相比于现有设计方法设计复杂度更低,有着更好的整体性能。并且,当滤波器组具备很大通道数以及空域支撑较大时,本文算法的计算效率有着显著优势,由单原型到双原型的特点也增加了设计原型滤波器时的灵活性,因此本算法很适合2维双原型大规模滤波器组的快速设计。

参考文献

- [1] VAIDYANATHAN P P. Multirate Systems and Filter Banks[M]. Englewood Cliffs: N.J., Prentice Hall, 1993: 188-272.
- [2] LIN Y P and VAIDYANATHAN P P. Theory and design of two-dimensional filter bank: A review[J]. *Multidimensional System & Signal Processing*, 1996, 7(3-4): 263-330. doi: 10.1007/BF01826246.
- [3] GAWANDE J P, RAHULKAR A D, and HOLAMBE R S. Design of new class of regular biorthogonal wavelet filter banks using generalized and hybrid lifting structures[J]. *Signal Image and Video Processing*, 2015, 9(1): 265-273. doi: 10.1007/s11760-015-0814-0.
- [4] SHUI Penglang. Image denoising using 2-D separable oversampled DFT modulated filter banks[J]. *IET Image Processing*, 2009, 3(3): 163-173. doi: 10.1049/iet-ipr.2007.0218.
- [5] SUZUKI T and KUDO H. Two-dimensional non-separable block-lifting-based M-channel biorthogonal filter banks[C]. European Signal Processing Conference, Lisbon, 2014: 291-295.
- [6] RAJAPAKAHA N, MADANAYAKE A, and BRUTON LT. 2D space-time wave-digital multi-fan filter banks for signals consisting of multiple plane waves[J]. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 2014, 25(1): 17-39. doi: 10.1007/s11045-012-0183-6.
- [7] SUZUKI T and KUDO H. Two-dimensional non-separable block-lifting structure and its application to M-channel perfect reconstruction filter banks for lossy-to-lossless image coding[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2015, 24(12): 4943-4951. doi: 10.1109/TIP.2015.2472294.
- [8] WILBUR M R, DAVIDSON T N, and REILLY J P. Efficient design of oversampled NPR GDFT filter banks[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, 52(7): 1947-1963. doi: 10.1109/TSP.2004.828936.
- [9] SHUI Penglang and JIANG Junzheng. Two-dimensional 2x oversampled DFT modulated filter banks and critically sampled modified DFT modulated filter banks[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(11): 5597-5611. doi: 10.1109/TSP.2010.2059016.
- [10] JIANG Junzheng and ZHOU Fang. Iterative design of two-dimensional critically sampled MDFT modulated filter banks[J]. *Signal Processing*, 2013, 93(11): 3124-3132. doi: 10.1016/j.sigpro.2013.03.022.
- [11] JIANG Junzheng, ZHOU Fang, SHUI Penglang, et al. Theory and design of two-dimensional DFT modulated filter bank with arbitrary modulation and decimation matrices[J]. *Digital Signal Processing*, 2015, 44(1): 123-130. doi: 10.1016/j.dsp.2015.05.012.
- [12] JIANG Junzheng and SHUI Penglang. Design of 2D linear phase DFT modulated filter banks using bi-iterative second-order cone program[J]. *Signal Processing*, 2010, 90(12): 3065-3077. doi: 10.1016/j.sigpro.2010.05.011.
- [13] JIANG Junzheng and SHUI Penglang. Design of 2D oversampled linear phase DFT modulated filter banks via

- modified Newton's method[J]. *Signal Processing*, 2012, 92(6): 1411-1421. doi: 10.1016/j.sigpro.2011.11.029.
- [14] JIANG Junzheng, ZHOU Fang, and OUYANG Shan. Design of two-dimensional large-scale DFT modulated filter banks[J]. *IET Signal Processing*, 2013, 7(9): 807-813. doi: 10.1049/iet-spr.2012.0327.
- [15] ZHOU Fang, JIANG Junzheng, and SHUI Penglang. Fast design of 2D fully oversampled DFT modulated filter bank using Toeplitz-block Toeplitz matrix inversion[J]. *Signal Processing*, 2015, 111: 194-198. doi: 10.1016/j.sigpro.2014.12.021.
- [16] 蒋俊正, 王小龙, 水鹏朗. 一种设计 DFT 调制滤波器组的新算法[J]. *西安电子科技大学学报*, 2010, 37(4): 689-693. doi: 10.3969/j.issn.1001-2400.2010.04.019.
- JIANG Junzheng, WANG Xiaolong, and SHUI Penglang. Novel method for designing DFT modulated filter banks[J]. *Journal of Xidian University*, 2010, 37(4): 689-693. doi: 10.3969/j.issn.1001-2400.2010.04.019.
- [17] PETERSEN K B and PETERSEN M S. The Matrix Cookbook[OL]. <http://www2.imm.dtu.dk/pubdb/p.php, 2012.11>.
- [18] WAX M and KAILATH T. Efficient inversion of Toeplitz-block Toeplitz matrix[J]. *IEEE Transactions on Acoustics*, 1983, 31(5): 1218-1221. doi: 10.1109/TASSP.1983.1164208.
- 蒋俊正：男，1983 年生，副教授，硕士生导师，研究方向为多速率滤波器组理论与应用、通信信号处理。
- 郭云：女，1991 年生，硕士生，研究方向为多速率滤波器组的设计及应用。
- 欧阳缮：男，1960 年生，教授，博士生导师，研究方向为自适应信号处理、通信信号处理。