

基于马尔科夫链蒙特卡洛抽样的最大似然时差-频差联合估计算法

赵拥军* 赵勇胜 赵闯

(解放军信息工程大学导航与空天目标工程学院 郑州 450001)

摘要: 该文针对无源定位中参考信号真实值未知的时差-频差联合估计问题, 构建了一种新的时差-频差最大似然估计模型, 并采用马尔科夫链蒙特卡洛(MCMC)方法求解似然函数的全局极大值, 得到时差-频差联合估计。算法通过生成时差-频差样本, 并统计样本均值得到估计值, 克服了传统互模糊函数(CAF)算法只能得到时域和频域采样间隔整数倍估计值的问题, 且不存在期望最大化(EM)等迭代算法的初值依赖和收敛问题。推导了时差-频差联合估计的克拉美罗界, 并通过仿真实验表明, 算法在不同信噪比条件下的估计精度优于 CAF 算法和 EM 算法, 且计算复杂度较低。

关键词: 无源定位; 时差; 频差; 联合估计; 最大似然; 马尔科夫链蒙特卡洛方法

中图分类号: TN971

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2016)11-2745-08

DOI: 10.11999/JEIT160050

Maximum Likelihood TDOA-FDOA Estimator Using Markov Chain Monte Carlo Sampling

ZHAO Yongjun ZHAO Yongsheng ZHAO Chuang

(School of Navigation and Aerospace Engineering, PLA Information Engineering University, Zhengzhou 450001, China)

Abstract: This paper investigates the joint estimation of Time Difference Of Arrival (TDOA) and Frequency Difference Of Arrival (FDOA) in passive location system, where the true value of the reference signal is unknown. A novel Maximum Likelihood (ML) estimator of TDOA and FDOA is constructed, and Markov Chain Monte Carlo (MCMC) method is applied to finding the global maximum of likelihood function by generating the realizations of TDOA and FDOA. Unlike the Cross Ambiguity Function (CAF) algorithm or the Expectation Maximization (EM) algorithm, the proposed algorithm can also estimate the TDOA and FDOA of non-integer multiple of the sampling interval and has no dependence on the initial estimate. The Cramer Rao Lower Bound (CRLB) is also derived. Simulation results show that, the proposed algorithm outperforms the CAF and EM algorithm for different SNR conditions with higher accuracy and lower computational complexity.

Key words: Passive location; Time Difference Of Arrival (TDOA); Frequency Difference Of Arrival (FDOA); Joint estimation; Maximum Likelihood (ML); Markov Chain Monte Carlo (MCMC) method

1 引言

无源定位是近年来备受关注的问题, 在雷达^[1]、声呐^[2]、无线通信^[3]、传感器网络^[4]等领域应用广泛。而时差(Time Difference Of Arrival, TDOA)和频差(Frequency Difference Of Arrival, FDOA)作为无源定位所需的基本参数^[5], 其估计精度将直接决定对目标的定位精度。因此, 研究高精度的时差-频差估计

算法具有重要意义。

互模糊函数(Cross Ambiguity Function, CAF)方法是处理时差-频差联合估计的经典算法^[6], 本质是时差-频差的 2 维相关。在高信噪比和高采样率条件下, 互模糊函数方法可以得到时差-频差的精确估计, 但其需要在参数空间上进行网格搜索求解, 效率较低, 且只能得到时域和频域采样间隔整数倍的时差-频差估计值。为此, 一些针对互模糊函数计算的快速算法被提出, 如基于快速傅里叶变换, 分数阶傅里叶变换, 两步估计等的改进算法^[7-10]。这些算法一定程度上减小互模糊函数的计算量。此外, 基于高阶累积量^[11], 小波变换^[12], 以及自适应算法也被提出, 在一些特定情况得到了优于传统 CAF 算法的估计效果。但本质上, 这些改进算法仍然是时差-频差的 2 维相关, 其估计精度仍受到时域和频域

收稿日期: 2016-01-13; 改回日期: 2016-06-08; 网络出版: 2016-09-01

*通信作者: 赵拥军 zhaoyongjuntg@126.com

基金项目: 国家自然科学基金(61401469, 41301481, 61501513), 国家高技术研究发展计划(2012AA7031015)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61401469, 41301481, 61501513), The National High Technology Research and Development Program of China (2012AA7031015)

采样间隔的限制。为此,文献[13]提出了基于期望最大化(Expectation Maximum, EM)的时差-频差估计算法。EM 算法不受采样间隔的限制,但由于其求解过程中需多次对矩阵求逆,计算量过大,限制了信号的实时处理,且作为一种迭代算法,EM 算法存在初值依赖和局部收敛问题。

马尔科夫链蒙特卡罗方法(Markov Chain Monte Carlo, MCMC)方法作为一种重要的 Monte Carlo 方法,是以概率统计理论为指导的,用随机数抽样来解决参数估计问题的一类数值计算方法,因其较高的灵活性,以及在复杂高维、高度非线性等问题中表现出的优异性能^[4],近年来在参数估计领域中得到了广泛的应用。文献[15]利用 MCMC 方法估计降水-径流模型中的未知参数;文献[16]采用 MCMC 方法实现合成孔径雷达中运动目标的线性调频(chirp)回波信号参数估计。文献[17]针对阵列信号测角问题,通过引入可逆跳转马尔科夫链蒙特卡罗(Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo, RJMCMC)方法实现了真正意义上的信号源数和到达角度的联合估计。文献[18]将 MCMC 方法应用到时延估计问题中,得到了优于传统算法的估计性能。这类算法的思想是建立待估参数的概率模型或随机过程,然后利用 MCMC 方法对概率模型或随机过程抽样,通过对样本的统计实现参数的估计,具有估计精度高、计算复杂度低的优点。

本文针对无源定位中参考信号真实值未知的时差-频差联合估计问题,构建了一种新的时差-频差最大似然估计模型,并采用 MCMC 方法求解似然函数的全局极大值,得到时差-频差估计。MCMC 方法通过生成时差-频差样本,并对样本进行统计得到估计值,可以突破传统算法只能得到采样间隔整数倍的限制,具有较高的估计精度,且计算复杂度较低。

2 信号模型和似然函数

考虑如图1所示的无源双基地雷达系统。参考天线用于接收来自外辐射源的直达信号,监视天线用于接收目标回波信号^[1]。

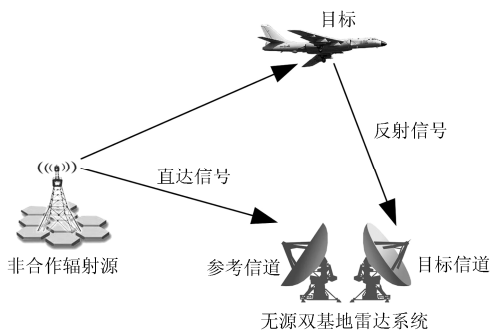


图1 无源双基地雷达系统配置

假设参考天线接收到的信号真实值为 $s(t)$, 则两路接收机接收到的信号可建模为^[10]

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= s(t) + w_1(t) \\ x_2(t) &= ae^{j\varphi} s(t - \tau) e^{j2\pi\nu t} + w_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中, $w_1(t), w_2(t)$ 为零均值的高斯白噪声, a, φ 为冗余参数, 分别表示增益系数和相移。 τ 和 ν 为待估参数, 分别为两路信号的时差和频差。本文的主要工作是要通过对 $x_1(t), x_2(t)$ 的观测来估计两路信号的时差和频差。

对 $x_1(t), x_2(t)$ 以间隔 T_s 采样, 得到信号的离散形式为

$$\left. \begin{aligned} x_1(nT_s) &= s(nT_s) + w_1(nT_s), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \\ x_2(nT_s) &= ae^{j\varphi} s(nT_s - \tau) e^{j2\pi\nu nT_s} + w_2(nT_s), \\ & \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

由于估计过程中参考信号的真实值 $s(nT_s)$ 是未知的, 因此难以直接根据式(2)得到时差和频差的似然函数。为此, 从频域出发, 推导时差和频差的似然函数。首先对 $x_1(n), x_2(n)$ 做离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform, DFT), 得到信号的频域形式为

$$X_1(k) = S(k) + W_1(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} X_2(k) &= ae^{j\varphi} S(k - NT_s\nu) e^{-j2\pi(k - NT_s\nu)\tau / (NT_s)} \\ &+ W_2(k), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (4)$$

令 $m = k - NT_s\nu / (2\pi)$, $b = ae^{j\varphi}$, 那么式(4)可以表示为

$$\begin{aligned} X_2(m + NT_s\nu) &= bS(m) e^{-j2\pi m\tau / (NT_s)} \\ &+ W_2(m + NT_s\nu) \end{aligned} \quad (5)$$

式中, $X_2(m + NT_s\nu) = \text{DFT}[x_2(n) e^{-j2\pi\nu nT_s}]$ 。DFT 变换具有周期性, 因此 m 的范围仍为 $0, 1, \dots, N-1$ 。

将式(3)代入式(5), 并整理化简, 可以消去未知量 $S(k)$, 得到仅含有观测量和待估参量的表达式。

$$X_\nu(k) = bX_\tau(k) + W(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6)$$

式中, $X_\nu(k) = X_2(k + NT_s\nu)$, $X_\tau(k) = X_1(k) e^{-j2\pi k\tau / (NT_s)}$, $W(k) = W_2(k + NT_s\nu) - bW_1(k) e^{-j2\pi k\tau / (NT_s)}$ 。令 $\mathbf{X}_\nu = [X_\nu(0), X_\nu(1), \dots, X_\nu(N-1)]^T$, $\mathbf{X}_\tau = [X_\tau(0), X_\tau(1), \dots, X_\tau(N-1)]^T$, $\mathbf{W} = [W(0), W(1), \dots, W(N-1)]^T$, 那么式(6)可以表示为式(7)的向量形式:

$$\mathbf{X}_\nu = b\mathbf{X}_\tau + \mathbf{W} \quad (7)$$

由于 $w_1(n), w_2(n)$ 为高斯白噪声, 经过 DFT 等一系列线性变换后, 向量 \mathbf{W} 仍满足高斯性, 其元素 $W(k)$ 的均值为

$$\begin{aligned} E[W(k)] &= E[W_2(k + NT_s\nu) \\ &- bW_1(k) e^{-j2\pi k\tau / (NT_s)}] = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

假设 $W_1(k)$ 和 $W_2(k)$ 的方差相同, 记为 $\text{var}[W_1(k)] = \text{var}[W_2(k)] = \sigma_0^2$, 那么可以得到 $W(k)$ 的方差为 $\text{var}[W(k)] = E[W(k)^*W(k)] - \{E[W(k)]\}^2$

$$= E\left[W_2(k + NT_s\nu)^*W_2(k + NT_s\nu) + b^*bW_1(k)^*W_1(k)e^{j2\pi k\tau/(NT_s)}e^{-j2\pi k\tau/(NT_s)}\right] = \sigma_0^2 + |b|^2\sigma_0^2 \quad (9)$$

根据噪声 \mathbf{W} 的概率统计特性, 得到给定参数 (b, τ, ν) 条件下, $\mathbf{X}_\tau, \mathbf{X}_\nu$ 的概率密度函数为 $p(\mathbf{X}_\tau, \mathbf{X}_\nu; b, \tau, \nu)$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp\left[-\frac{1}{\sigma^2}(\mathbf{X}_\nu - b\mathbf{X}_\tau)^H(\mathbf{X}_\nu - b\mathbf{X}_\tau)\right] \quad (10)$$

式中, σ^2 为噪声 $W(k)$ 的方差。

对式(10)中的概率密度函数取对数并去掉常数项, 得到对数似然函数为

$$L(b, \tau, \nu) = -\frac{1}{\sigma^2}(\mathbf{X}_\nu - b\mathbf{X}_\tau)^H(\mathbf{X}_\nu - b\mathbf{X}_\tau) \quad (11)$$

对数似然函数 $L(b, \tau, \nu)$ 关于 τ, ν 高度非线性, 但是关于冗余参数 b 的二次函数。因此可以通过对 $L(b, \tau, \nu)$ 关于 b 求偏导, 并令偏导为零, 来消除冗余参数 b 。

$$\frac{\partial L(b, \tau, \nu)}{\partial b} = \frac{2}{\sigma^2} \mathbf{X}_\tau^H(\mathbf{X}_\nu - b\mathbf{X}_\tau) = 0 \quad (12)$$

对式(12)求解, 得到 b 关于 (τ, ν) 的表达式为

$$\hat{b} = (\mathbf{X}_\tau^H \mathbf{X}_\tau)^{-1} \mathbf{X}_\tau^H \mathbf{X}_\nu \quad (13)$$

将式(13)代入式(11), 并忽略掉与 (b, τ, ν) 无关的项, 得到仅含有 (τ, ν) 的对数似然函数为

$$L_c(\tau, \nu) = \frac{1}{\mathbf{X}_1^H \mathbf{X}_1} \mathbf{X}_\tau^H \mathbf{X}_\nu \mathbf{X}_\nu^H \mathbf{X}_\tau \quad (14)$$

3 时差-频差联合估计

为表示方便, 定义向量 $\boldsymbol{\theta} = [\tau, \nu]^T$ 。 $L_c(\boldsymbol{\theta})$ 是关于 $\boldsymbol{\theta}$ 的非线性函数, 无法利用解析方法得到时差-频差的估计值。为此, 常用方法是通过多维网格搜索或利用迭代方法求解。但网格搜索方法效率低, 且其只能得到时域和频域采样间隔整数倍的时差和频差。而迭代方法往往需要一个较为准确的初始估计, 否则难以收敛至全局最优解。

文献[19]提出的处理非线性问题全局最优解的基本理论为寻找一种无需搜索且不存在初值依赖的全局最优算法奠定了基础。根据文献[19]的理论, 使得对数似然函数 $L_c(\boldsymbol{\theta})$ 取得全局最大值的变量 $\boldsymbol{\theta}$ 可以通过式(15)得到

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\iint \boldsymbol{\theta} \exp\{\rho L_c(\boldsymbol{\theta})\} d\boldsymbol{\theta}}{\iint \exp\{\rho L_c(\boldsymbol{\theta})\} d\boldsymbol{\theta}} \quad (15)$$

定义 $\exp\{\rho L_c(\boldsymbol{\theta})\}$ 的归一化函数为

$$L'_{c,\rho}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\exp\{\rho L_c(\boldsymbol{\theta})\}}{\iint \exp\{\rho L_c(\boldsymbol{\theta})\} d\boldsymbol{\theta}} \quad (16)$$

由于 $L'_{c,\rho}(\boldsymbol{\theta})$ 满足 $\iint L'_{c,\rho}(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} = 1$, 所以可以将其作为 $\boldsymbol{\theta}$ 的伪概率密度函数。 $\rho \rightarrow \infty$ 时, $L'_{c,\rho}(\boldsymbol{\theta})$ 是位于 $L_c(\boldsymbol{\theta})$ 全局最大值处的狄克拉函数。那么, 令式(16)中的 ρ 取较大值 ρ_0 , 则式(15)中估计值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 可以通过式(17)积分式近似:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \iint \boldsymbol{\theta} L'_{c,\rho_0}(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} \quad (17)$$

式(17)中的积分难以直接通过解析方法计算。但是如果能够得到足够多服从 $L'_{c,\rho_0}(\boldsymbol{\theta})$ 分布的 $\boldsymbol{\theta}$ 样本, 则可以通过数值计算方法估计式(17)中的积分。假设已经得到了 R 个 $\boldsymbol{\theta}$ 的样本, 那么式(17)中积分可通过统计样本均值近似得到。

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{R} \sum_{t=1}^R \boldsymbol{\theta}^{(t)} \quad (18)$$

式中, $\boldsymbol{\theta}^{(t)}$ 表示按照 $L'_{c,\rho_0}(\boldsymbol{\theta})$ 分布生成的第 t 个 $\boldsymbol{\theta}$ 的样本。根据大数定理, 当样本数量足够多时, 式(18)中样本的均值将逼近式(17)中的积分结果。但由于 $L'_{c,\rho_0}(\boldsymbol{\theta})$ 的形式较为复杂, 很难直接生成服从该分布的样本。而 MCMC 方法可以通过构建一条马尔科夫链来生成服从 $L'_{c,\rho_0}(\boldsymbol{\theta})$ 分布的样本。

3.1 MCMC 方法

MCMC 方法的第 1 个“MC”, Markov Chain, 表示利用 Markov Chain 从目标分布中抽取样本, 第 2 个“MC”, Monte Carlo, 则表示在抽取的样本下利用 Monte Carlo 方法对积分进行计算。它的基本思想是通过建立一个平稳分布为 $\Pi(\boldsymbol{\theta})$ 的马尔科夫链来得到服从 $\Pi(\boldsymbol{\theta})$ 分布的样本, 然后通过对样本的统计来估计参数值。对于本文最大似然估计模型, 平稳分布 $\Pi(\boldsymbol{\theta})$ 即为 $\boldsymbol{\theta}$ 的后验分布。

Metropolis-Hasting(M-H)抽样是构造马尔科夫链的常用方法。MCMC 方法的精髓在于构造合适的马尔科夫链, 因此算法的主要目的是对马尔科夫链 $\{\boldsymbol{\theta}^{(t)} | t = 0, 1, 2, \dots\}$, 在给定一个 $\boldsymbol{\theta}^{(t-1)}$ 所处状态下, 产生下一步的状态 $\boldsymbol{\theta}^{(t)}$ 。M-H 算法构造马尔科夫链的主要步骤总结如下:

- (1)构造合适的提议函数 $q(\bullet)$;
- (2)从待估参数的状态空间中产生一个初始状态 $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$;
- (3)重复(直至马氏链达到平稳状态):
 - (a)从 $q(\bullet)$ 中产生候选样本 $\boldsymbol{\theta}^*$, 计算接受概率 $\alpha(\boldsymbol{\theta}^*, \boldsymbol{\theta}^{(t-1)}) = \min\left[1, \frac{\Pi(\boldsymbol{\theta}^*)q(\boldsymbol{\theta}^{(t-1)}|\boldsymbol{\theta}^*)}{\Pi(\boldsymbol{\theta}^{(t-1)})q(\boldsymbol{\theta}^*|\boldsymbol{\theta}^{(t-1)})}\right]$ (19)

(b)从 $U[0,1]$ 产生随机数 u ;

(c)若 $u \leq \alpha(\theta^*, \theta^{(t-1)})$, 接受候选状态 θ^* , 即链的状态 $\theta^{(t)} = \theta^*$; 否则链保持原状态, 即 $\theta^{(t)} = \theta^{(t-1)}$;

(d)增加 t , 返回到(a)。

如何构造提议函数 $q(\bullet)$ 是 M-H 抽样的关键问题之一, 常用的两种方法是: 随机游走法(Random Walk, RW)采样法和独立马尔可夫链(Independent Markov Chain, IMC)采样法。IMC 方法认为候选状态和马尔可夫链当前所处状态无关, 容易实施, 但要求选取的提议函数于目标分布较为接近, 否则表现很差, 故一般很少采用。RW 方法通过在当前状态加上一个随机扰动来生成候选状态, 对提议函数的要求较低。因此, 本文采用随机游走法来构建提议函数。

随机游走法的提议函数满足 $q(\theta^* | \theta^{(t-1)}) = q(\theta^* - \theta^{(t-1)}) = q(z)$, 即在每一次迭代中, 从 $q(z)$ 中产生增量 z , 然后按照 $\theta^* = \theta^{(t-1)} + z$ 得到候选状态。其中 $q(z)$ 通常选取均匀分布或正态分布。本文选取 $q(z)$ 为 2 维正态分布, 即候选状态 $\theta^* | \theta^{(t-1)} \sim N(\theta^{(t-1)}, \Sigma)$, Σ 是 2×2 的正定矩阵, 这里选取 $\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2\}$ 。 σ_1, σ_2 表示增量方差, 对链的生成影响很大。如果增量方差过大, 则游走的范围太宽, 大部分提出的候选状态将落入分布的低概率区, 从而被拒绝, 此时马尔可夫链变化过程很慢, 收敛较慢或出现近似收敛的情况。如果取得过小, 那么样本游走的范围将会变得很窄, 需要很长时间才能采样整个状态空间, 导致收敛到目标分布的速度也会变得很慢。上述两种情况都会导致算法不能在有限时间的采样过程中得到较好的服从目标分布的样本。

为此, 本文采用自适应的随机游走采样方法, 自适应地控制增量方差的大小, 使其随着抽样次数的增加取值不断减小, 即游走的范围不断缩小。在抽取第 t 个样本时,

$$\sigma_i = \sigma_{\max,i} \exp\left[\lambda_i \left(\frac{R-t}{R} - 1\right)\right], \quad i = 1, 2 \quad (20)$$

其中, $\sigma_{\max,i}$ 表示参数 σ_i 可以达到的最大值, 需要根据具体问题确定; R 为总的抽样次数; 当 $t = 0$ 时, σ_i 取最大值 $\sigma_{\max,i}$, 当 $t = R$ 时, σ_i 取最小值 $e^{-\lambda_i} \sigma_{\max,i}$, 调整 λ_i 可以控制 σ_i 减小的速度。采用自适应随机游走采样法可以在较短的时间内获得更好的服从目标分布的样本。

3.2 基于 MCMC 的时差-频差估计

由于 $L_{c,\rho_0}(\theta)$ 中归一化项 $\iint \exp\{\rho_0 L_c(\theta)\} d\theta$ 为常数, 并不影响 θ 样本的相对分布, 且难于计算。因此, 在构建马尔科夫链的平稳分布时将其忽略。

$$\Pi(\theta) = \exp\{\rho_0 L_c(\theta)\} \quad (21)$$

同时为避免式中指数运算的数值过大, 令

$$\rho_0 = \frac{\rho_1}{\mathbf{X}_2^H \mathbf{X}_2} \quad (22)$$

其中, ρ_1 为常数, 用于平稳分布函数的形状。 ρ_1 的不同取值对应 $\Pi(\theta)$ 的形状如图 2 所示。

从图 2 可以看出, ρ_1 越大, 平稳分布函数形状越尖锐, 反之则越平缓。选择较大的 ρ_1 可以消除平稳分布函数峰值附近的旁瓣, 从而减少采样过程中对参数估计无益的样本数, 使得样本集中于峰值附近, 提高估计精度。但 ρ_1 并非越大越好, 过大的 ρ_1 会使得构造的平稳分布函数丢失一些有用信息, 同时过于尖锐的函数形状也会造成采样困难。 ρ_1 的选取参见文献[19]。

那么最终构建马尔科夫链的平稳分布函数为

$$\Pi(\theta) = \exp\left\{\frac{\rho_1}{(\mathbf{X}_1^H \mathbf{X}_1)(\mathbf{X}_2^H \mathbf{X}_2)} \mathbf{X}_\tau^H \mathbf{X}_\nu \mathbf{X}_\nu^H \mathbf{X}_\tau\right\} \quad (23)$$

确定马尔科夫链的平稳分布后, 即可利用其生成服从 $\Pi(\theta)$ 的时差-频差样本。假设已经得到了 R 个时差-频差样本, 那么式(17)中时差-频差的估计可通过统计样本均值近似得到。

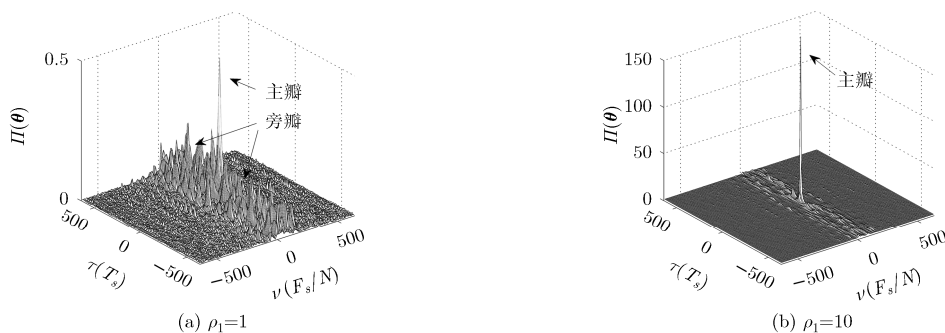


图 2 ρ_1 对平稳分布函数形状的影响

$$\hat{\theta} = \frac{1}{R-r} \sum_{t=r+1}^R \theta^{(t)} \quad (24)$$

其中, $\theta^{(t)}$ 为利用马尔科夫链生成的第 t 个 θ 的样本。样本收敛至平稳分布需要一定时间, 在抽样初始阶段未收敛的 r 个样本, 并不能反映参数的后延分布, 对于参数估计没有意义, 故将其舍弃, 不参与统计。

综上, 利用 MCMC 方法进行时差-频差联合估计的具体实现过程总结如下:

(1) 以间隔 T_s 对两路信号进行离散采样, 得到 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$;

(2) 对离散信号 $x_1(n), x_2(n)$ 作 FFT, 得到 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$;

(3) 初始化: 在时差-频差的取值范围 $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ 内随机产生一个初始状态 $\theta^{(0)} = [\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)}]^T$;

(4) 抽取第 t 个样本 $\theta^{(t)} = [\theta_1^{(t)}, \theta_2^{(t)}]^T$:

(a) 生成候选样本 $\theta^* \sim N(\theta^{(t-1)}, \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2\})$, σ_1, σ_2 按照式(20)自适应调整;

(b) 将候选样本 θ^* 和前一时刻样本 $\theta^{(t-1)}$ 代入式(19)计算接受概率 $\alpha(\theta^*, \theta^{(t-1)})$;

(c) 从 $U[0, 1]$ 产生随机数 u ;

(d) 若 $u \leq \alpha(\theta^*, \theta^{(t-1)})$, 接受候选状态 θ^* , 即链的状态 $\theta^{(t)} = \theta^*$; 否则链保持原状态, 即 $\theta^{(t)} = \theta^{(t-1)}$;

(5) 若 $t < R, t \leftarrow t+1$, 返回步骤(3); 否则抽样结束, 利用式(24)估计时差-频差。

4 CRLB 分析

本节推导的时差-频差 CRLB 是关于参考信号 $x_1(n)$ 信噪比的表达式。为此, 首先定义参考信号 $x_1(n)$ 的信噪比为

$$\text{SNR} = 10 \lg \left(\frac{\mathbf{S}^H \mathbf{S}}{N \sigma_0^2} \right) \quad (25)$$

其中, σ_0^2 为两路接收机接收到的噪声方差, \mathbf{S} 为参考信号真实值 $s(n)$ 的 DFT 变换构成的向量。由式(25)可得

$$\sigma_0^2 = \frac{\mathbf{S}^H \mathbf{S}}{N 10^{\text{SNR}/10}} \quad (26)$$

根据式(9), 噪声 $W(k)$ 的方差为 $\sigma^2 = \sigma_0^2 + |b|^2 \sigma_0^2$, 那么 σ^2 关于信噪比 SNR 的表达式为

$$\sigma^2 = (1 + |b|^2) \frac{\mathbf{S}^H \mathbf{S}}{N 10^{\text{SNR}/10}} \quad (27)$$

对于时差-频差联合估计问题, Fisher 信息矩阵为 2×2 的方阵。根据 Fisher 信息矩阵的定义, 对式

(10) 中的概率密度函数 $p(\mathbf{X}_\nu, \mathbf{X}_\tau; b, \theta)$ 取对数, 并对 θ 求偏导,

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{X}_\nu, \mathbf{X}_\tau; b, \theta)}{\partial \theta} = \frac{-1}{\sigma^2} \left(\frac{\partial \mathbf{X}_\nu}{\partial \theta} - b \frac{\partial \mathbf{X}_\tau}{\partial \theta} \right)^H (\mathbf{X}_\nu - b \mathbf{X}_\tau) \quad (28)$$

式中,

$$\frac{\partial \mathbf{X}_\nu}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N \times 1} & \text{DFT} \left\{ -j2\pi n T_s x_2(n) e^{-j2\pi \nu n T_s} \right\} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}_\tau}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} -\frac{j2\pi k}{N T_s} X_1(k) e^{-\frac{j2\pi k \tau}{N T_s}} & \mathbf{0}_{N \times 1} \end{bmatrix}_{k=0,1,\dots,N-1} \quad (30)$$

那么, Fisher 信息矩阵为

$$\mathbf{J} = E \left[\left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{X}_\nu, \mathbf{X}_\tau; b, \theta)}{\partial \theta} \right)^H \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{X}_\nu, \mathbf{X}_\tau; b, \theta)}{\partial \theta} \right) \right] \\ = \frac{N 10^{\text{SNR}/10}}{(1 + |b|^2) \mathbf{S}^H \mathbf{S}} \left(\frac{\partial \mathbf{X}_\nu}{\partial \theta} - b \frac{\partial \mathbf{X}_\tau}{\partial \theta} \right)^H \left(\frac{\partial \mathbf{X}_\nu}{\partial \theta} - b \frac{\partial \mathbf{X}_\tau}{\partial \theta} \right) \quad (31)$$

CRLB 是无偏算法估计误差的理论下限, 其等于 Fisher 信息矩阵的逆。那么时差和频差的估计误差方差满足式(32)中的不等式

$$E \left[\left(\hat{\theta}_i - \theta_i \right)^2 \right] \geq \left(\mathbf{J}^{-1} \right)_{ii} \quad (32)$$

其中, $\left(\mathbf{J}^{-1} \right)_{ii}$ 表示矩阵 \mathbf{J}^{-1} 主对角线上的第 i 个元素。

5 仿真实验

选取一段 BPSK 信号作为辐射源信号, 进行仿真实验。BPSK 信号参数设置为: 码元速率 $\text{RB} = 1 \text{ MHz}$, 信号载频 $f_c = 5 \text{ MHz}$ 。采样频率 $F_s = 1/T_s = 128 \text{ MHz}$, 信号快拍数 $N = 1024$, 两路信号之间的时差 $\tau = 100.6(T_s)$, 频差 $\nu = 10.5(F_s/N)$ 。信号的信噪比初步设置为 10 dB , MCMC 方法的参数初步设置为 $\rho_1 = 10$, $\sigma_{\max,1} = N/4(T_s)$, $\sigma_{\max,2} = N/4(F_s/N)$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 8$ 。

图3给出了信号信噪比为 10 dB 时利用 MCMC 方法抽取的时差频差样本。可以看出, 抽样过程开始后, 样本很快收敛至平稳分布, 然后围绕着时差频差真实值上下波动。统计不同样本数量下 MCMC 算法估计的均方根误差 (Root Mean Square Error, RMSE), 结果如图4所示。可以看出, 随着样本数量的增加, 时差和频差的估计精度均不断提高, 但提高的速度变慢, 在样本数量增加至 2000 后, 基本不再提高。且样本数量的增加意味着计算复杂度的增加, 因此, 作为折中, 在后续仿真中样本数量设置为 $R = 2000$ 。

为分析参数 ρ_1 的选取对算法估计性能的影响,

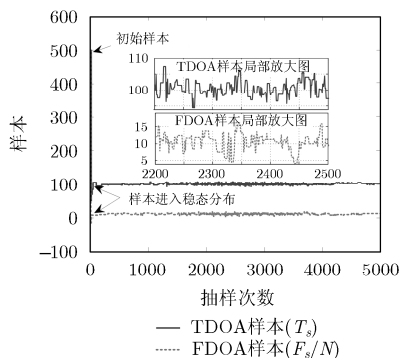


图3 MCMC方法抽取样本图

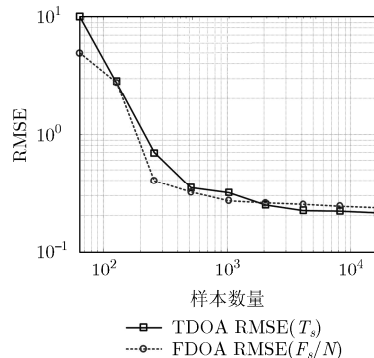


图4 不同样本数量下算法的RMSE

分别将 ρ_1 设置为从1至20。仿真结果如图5所示。可以看出, ρ_1 的选取的确对算法的性能有显著影响: 与之前的分析一致, ρ_1 过小或过大时, 算法的估计性能均会下降。而 ρ_1 的值在7~13的范围内时, 算法的估计性能较优且基本相同。因此, 在后续仿真中, ρ_1 的值设置为10。

参数 $\sigma_{\max,1}, \sigma_{\max,2}$ 决定自适应随机游走法的游走速度。将 $\sigma_{\max,1}, \sigma_{\max,2}$ 设置为从0.1~1 $N(T_s, F_s/N)$, 对应算法的估计误差如图6所示。可以看出, $\sigma_{\max,1}, \sigma_{\max,2}$ 过大或过小时, 算法估计性能均无法达到最优。 $\sigma_{\max,1}, \sigma_{\max,2}$ 过大时, 抽样过程中样本被拒绝的概率较大, 导致算法在有限抽样次数内的抽取的样本数量较少, 从而造成算法性能的下降。而 $\sigma_{\max,1}, \sigma_{\max,2}$ 过小时, 算法游走速度过慢, 在有限次数内也难以得到足够数量的样本。图6中, 当 $\sigma_{\max,1}, \sigma_{\max,2}$ 的值在0.3~0.5 $N(T_s, F_s/N)$ 时, 算法的估计性能较优。因此, 在后续仿真中, $\sigma_{\max,1} = 0.4N(T_s)$, $\sigma_{\max,2} = 0.4N(F_s/N)$ 。

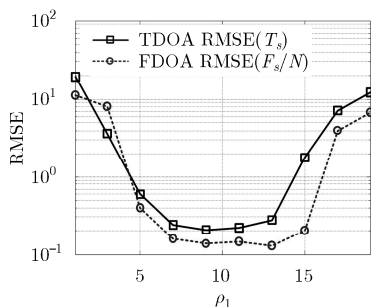
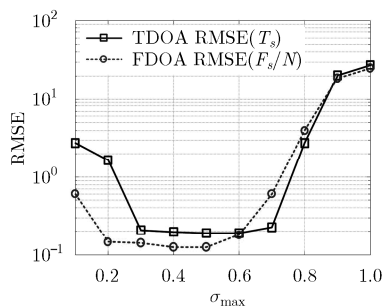
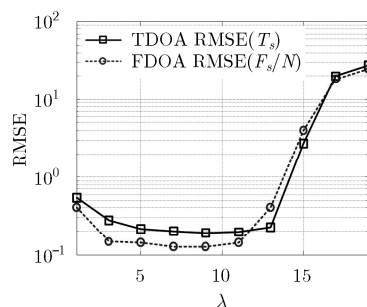
参数 λ_1, λ_2 决定算法游走速度下降的快慢, 因此对算法的估计性能也有影响。将其分别设置为1~20, 相应的算法估计误差如图7所示。可以看出, λ_1, λ_2 的值为5~11时, 算法的估计性能较优。因此, 在后续仿真中, λ_1, λ_2 的值设置为8。

为评估算法估计性能, 在不同信噪比条件下利用算法进行蒙特卡罗仿真。算法的估计误差为1000

次仿真的RMSE。为了突出本文基于MCMC的ML(MCMC-ML)算法性能, 将算法的RMSE与基于FFT的CAF(FFT-CAF)算法^[10]、EM算法^[13]和CRLB对比。仿真结果如图8所示。

从图8(a)可以看出, 随着信噪比的增加, 几种算法的时差估计精度均有提高。但FFT-CAF算法在信噪比增加至5 dB后, 估计精度基本保持不变, 不再随信噪比的增加而提高。原因在于FFT-CAF只能得到时域和频域采样间隔整数倍的时差-频差估计, 估计精度受到限制。EM算法和MCMC-ML算法均可得到频域和时域采样间隔非整数倍的时差-频差估计, 因此在-5 dB至20 dB信噪比范围内, 估计精度可随着信噪比的增加而不断提高, 但EM算法的估计精度对初值依赖严重。初值较差时, EM算法的估计精度低于CAF算法。而在给定较为准确的初值时, EM算法的估计精度高于CAF算法, 较高信噪比条件下估计精度与MCMC-ML算法相近, 但在信噪比较低时的估计精度低于本文MCMC-ML算法。图8(b)表明, MCMC-ML算法在频差估计中性能同样优于FFT-CAF算法和EM算法, 但与时差估计相比不同的是, 几种算法对频差估计的精度均相对较高, 这主要由信号的互模糊特性决定。

算法的计算复杂度也是衡量算法优劣的重要指标。为此, 这里比较本文MCMC-ML算法, 基于网格搜索的ML(Grid search-ML)算法, FFT-CAF算

图5 ρ_1 对算法性能的影响图6 $\sigma_{\max,1}, \sigma_{\max,2}$ 对算法性能的影响图7 λ_1, λ_2 对算法性能的影响

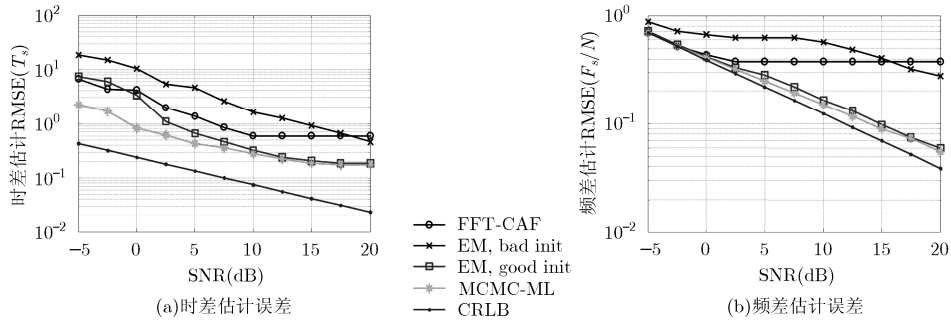


图 8 不同信噪比条件下算法的估计误差

法及EM算法的计算复杂度。由于实际运算过程中运算量主要由复数乘法运算次数决定，因此将算法复数乘法的次数作为衡量算法计算复杂度的指标。为便于统计，这里将共轭运算和指数运算均作为一次复数乘法运算参与统计。结果如表1所示。其中， N_τ, N_ν 分别为Grid search-ML算法和FFT-CAF算法在时差和频差取值区间划分点数。 R 为MCMC算法的样本数。 N_{iter} 为EM算法的迭代次数。

从表1可以看出，4种算法中，Grid search-ML算法的计算复杂度最高，难以满足实时处理的要求。而与之相比，MCMC-ML算法的计算复杂度很低，与FFT-CAF算法的计算复杂度相当。EM算法计算复杂度较高，原因在于EM算法在期望最大化的迭代过程中需多次对 $N \times N$ 的矩阵求逆，造成算法计算复杂度的急剧增加。从计算复杂度的表达式可以看出，本文MCMC-ML算法的计算复杂度主要由信号快拍数和样本数量决定，计算复杂度随着生成样本数的增加而增加。对于仿真BPSK信号情况，

MCMC-ML算法的计算复杂度低于FFT-CAF快速计算方法，可以满足信号实时处理的要求。

6 结论

针对无源双基地定位中参考信号真实值未知的时差-频差联合估计问题，本文构建了一种新的时差-频差最大似然估计模型，并采用MCMC方法求解最大似然模型，得到时差-频差估计。MCMC方法通过生成时差-频差的样本，进而通过统计样本均值得到时差-频差估计。算法的计算复杂度与利用FFT的CAF快速计算方法基本相同，但是克服了CAF算法只能得到时域和频域采样间隔整数倍的时差-频差估计问题，可以得到采样间隔非整数倍的时差-频差估计，因此估计精度高于CAF算法。而与EM算法相比，本文算法不存在迭代的初值依赖和收敛问题，且计算复杂度远低于EM算法。推导了时差-频差联合估计的CRLB，并通过仿真实验表明，算法的估计精度优于CAF算法和EM算法。

表 1 不同算法的计算复杂度对比

算法	计算复杂度	BPSK信号计算复杂度比
MCMC-ML	$R(0.5N \log_2 N + 8N + 1) + N \log_2 N + 4N + 1$	1.000
Grid search-ML	$N_\tau N_\nu (0.5N \log_2 N + 8N)$	2095.900
FFT-CAF	$N_\tau (0.5N_\nu \log_2 N_\nu + N_\nu)$	1.102
EM	$N_{iter} [2N^3 + 5N^2 + 0.5N \log_2 N + 3N]$	808.070

参考文献

[1] HIGGINS T, WEBSTER T, and MOKOLE E L. Passive multistatic radar experiment using WiMAX signals of opportunity. Part 1: Signal processing[J]. *IET Radar, Sonar & Navigation*, 2016, 10(2): 238-247. doi: 10.1049/iet-rsn.2015.0020.

[2] LI Ruiyang and HO K. Efficient closed-form estimators for multistatic sonar localization[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2015, 51(1): 600-614. doi: 10.1109/TAES.2014.140482.

[3] ZEMMARI R, BROETJE M, BATTISTELLO G, et al. GSM passive coherent location system: Performance prediction and measurement evaluation[J]. *IET Radar, Sonar & Navigation*, 2014, 8(2): 94-105. doi: 10.1049/iet-rsn.2013.0206.

[4] DECARLI N, GUIDI F, and DARDARI D. A novel joint RFID and radar sensor network for passive localization: Design and performance bounds[J]. *IEEE Journal of Selected*

- Topics in Signal Processing*, 2014, 8(1): 80–95. doi: 10.1109/JSTSP.2013.2287174.
- [5] 曲付勇, 孟祥伟. 基于约束总体最小二乘方法的到达时差到达频差无源定位算法[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(5): 1075–1081. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.01019.
QU Fuyong and MENG Xiangwei. Source localization using TDOA and FDOA measurements based on constrained total least squares algorithm[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014, 36(5): 1075–1081. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.01019.
- [6] STEIN S. Algorithms for ambiguity function processing[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1981, 29(3): 588–599. doi: 10.1109/TASSP.1981.1163621.
- [7] TOLIMIERI R and WINOGRAD S. Computing the ambiguity surface[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1985, 33(5): 1239–1245. doi: 10.1109/TASSP.1985.1164688.
- [8] AUSLANDER L and TOLIMIERI R. Computing decimated finite cross-ambiguity functions[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1988, 36(3): 359–364. doi: 10.1109/29.1532.
- [9] OZDEMIR A K and ARIKAN O. Fast computation of the ambiguity function and the Wigner distribution on arbitrary line segments[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2001, 49(2): 381–393. doi: 10.1109/78.902121.
- [10] TAO R, ZHANG W Q, and CHEN E Q. Two-stage method for joint time delay and Doppler shift estimation[J]. *IET Radar, Sonar & Navigation*, 2008, 2(1): 71–77. doi: 10.1049/iet-rsn:20060014.
- [11] SHIN D C and NIKIAS C L. Complex ambiguity functions using nonstationary higher order cumulant estimates[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1995, 43(11): 2649–2664. doi: 10.1109/78.482115.
- [12] NIU X, CHING P C, and CHAN Y T. Wavelet based approach for joint time delay and Doppler stretch measurements[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1999, 35(3): 1111–1119. doi: 10.1109/78.784079.
- [13] BELANGER S P. Multipath TDOA and FDOA estimation using the EM algorithm[C]. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Minneapolis, USA, 1993: 168–171. doi: 10.1109/ICASSP.1993.319621.
- [14] GILAVERT C, MOUSSAOUI S, and IDIER J. Efficient Gaussian sampling for solving large-scale inverse problems using MCMC[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(1): 70–80. doi: 10.1109/TSP.2014.2367457.
- [15] BATES B C and CAMPBELL E P. A Markov chain Monte Carlo scheme for parameter estimation and inference in conceptual rainfall-runoff modeling[J]. *Water Resources Research*, 2001, 37(4): 937–947. doi: 10.1029/2000WR900363.
- [16] 林彦, 王秀坛, 彭应宁, 等. 基于MCMC的线性调频信号最大似然参数估计[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2004, 44(4): 511–514. doi: 10.3321/j.issn:1000-0054.2004.04.020.
LIN Yan, WANG Xiutan, PENG Yingning, et al. Maximum likelihood parameter estimation of chirp signals based on MCMC[J]. *Journal of Tsinghua University(Science and Technology)*, 2004, 44(4): 511–514. doi: 10.3321/j.issn:1000-0054.2004.04.020.
- [17] NG W, REILLY J P, KIRUBARAJAN T, et al. Wideband array signal processing using MCMC methods[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(2): 411–426. doi: 10.1109/TSP.2004.838934.
- [18] 李晶, 赵拥军, 李冬海. 基于马尔科夫链蒙特卡罗的时延估计算法[J]. 物理学报, 2014, 63(13): 67–73. doi: 10.7498/aps.63.130701.
LI Jing, ZHAO Yongjun, and LI Donghai. Time delay estimation using Markov chain Monte Carlo method[J]. *Acta Physica Sinica*, 2014, 63(13): 67–73. doi: 10.7498/aps.63.130701.
- [19] PINCUS M. A closed form solution of certain programming problems[J]. *Operations Research*, 1968, 16(3): 690–694. doi: 10.1287/opre.16.3.690.
- 赵拥军: 男, 1964年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为雷达信号处理、阵列信号处理。
- 赵勇胜: 男, 1990年生, 硕士生, 研究方向为无源定位。
- 赵 闯: 男, 1978年生, 教授, 主要研究方向为雷达信号处理。