

## 基于半正定松弛的 MIMO 盲检测

李浩\* 彭华

(解放军信息工程大学信息工程学院 郑州 450001)

**摘要:** 为解决 MIMO 系统盲检测问题, 该文以最大似然序列检测为估计准则, 通过推导建立了一种新的半正定松弛(SemiDefinite Relaxation, SDR)求解模型, 使得到的松弛解的秩等于发送天线数。为了解决了松弛解秩大于 1 时估计原始发送序列的难题, 该文提出一种特征向量近似法和随机法相结合的方法。通过限定目标函数的取值上限, 使算法能够根据目标函数值自适应判断求解发送序列个数, 从而减少每次求解的约束个数和 SDR 的求解次数, 分析表明算法的计算复杂度与发送天线数成线性关系。最后, 通过仿真表明所提算法能够在与秩 1 的算法性能保持相当的条件减少计算时间, 并验证了算法计算复杂度与发送天线数成线性关系。

**关键词:** 多输入多输出; 盲检测; 半正定松弛

**中图分类号:** TN92

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1009-5896(2016)11-2893-07

**DOI:** 10.11999/JEIT151444

## Blind Detection of MIMO via Semidefinite Relaxation

LI Hao PENG Hua

(School of Information Systems Engineering, PLA Information Engineering University, Zhengzhou 450001, China)

**Abstract:** In order to solve the problem of blind detection of MIMO system, this paper takes maximum-likelihood sequence detection as the criterion and derives the formulas to get a model based on Semidefinite Relaxation. The rank of SDR solution equals to the number of the transmit antennas. For the rank of SDR solution is greater than 1, a new method is proposed to approximate the solution of the original problem, which combines the eigenvector approximation method and randomization method. By setting the upper limit of objective function, the proposed method could judge the number of detection sequence adaptively and reduce constrains number and the number of solving SDR. The analysis shows that the computation complexity of proposed method has linear relationship with the number of transmit antennas. At last, simulation results indicate that compared with Rank-1 algorithm, the proposed detector could provide the same bit error performance with decrease of computation cost, and validate the linear relationship between the computation complexity and the number of transmit antennas.

**Key words:** Multiple-Input Multiple-Output (MIMO); Blind detection; Semidefinite Relaxation (SDR)

### 1 引言

近年来, 半正定松弛由于其低计算复杂的特点被广泛应用于信号处理和通信领域<sup>[1,2]</sup>, 对于一些十分困难的优化问题, 半正定松弛是一种十分有效的次最优算法, 通常在计算复杂度和性能上具有较好的折中。BPSK 信号的 MIMO 检测可以看作布尔二次规划(Boolean Quadratic Program, BQP)问题, 对其做适当的替换和松弛就能够变为半正定规划(semidefinite program), 从而将 NP-Hard 问题转变为凸优化问题, 该问题可以用内点法(interior point

method)进行求解, 而计算复杂度仅为多项式级, 这种对原问题进行松弛、通过对半正定规划求解的方法被称为半正定松弛。

半正定松弛(SemiDefinite Relaxation, SDR)应用于 MIMO 非盲检测的文献出现在本世纪初<sup>[3]</sup>。紧接着, 文献[4,5]对利用 SDR 实现 MIMO 软检测进行了讨论。之后, 文献[6,7]分别利用 SDR 实现了对 M-PSK 信号和高阶 QAM 信号的 MIMO 检测, 文献[8]对高阶信号检测的各种方法的性能与复杂度进行了分析与比较。与此同时, 许多学者与对基于 SDR 的 MIMO 检测算法做了性能分析, 其中文献[9,10]对 SDR 检测与最大似然(Maximum Likelihood, ML)检测的等价准则进行了讨论, 给出了 SDR 算法与 ML 的等价条件。另外一些研究人员<sup>[11,12]</sup>则对算法在不同信噪比等条件下的检测性能进行了讨论,

收稿日期: 2015-12-22; 改回日期: 2016-07-08; 网络出版: 2016-09-30

\*通信作者: 李浩 leo.lihao@163.com

基金项目: 国家自然科学基金(61401511)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (61401511)

证明了许多重要的结论与定理, 并对误码性能的理论限做了分析, 进一步完善了基于 SDR 的 MIMO 检测算法的理论体系。

针对 MIMO 盲检测问题, 文献[13]利用 OSTBC 的正交性实现了基于 SDR 的 OSTBC 盲最大似然检测, 但对于 BLAST (Bell Labs Layered Space Time) 方案则无法应用。文献[14]通过加入信源相关性的约束条件用 SDR 实现了已知符号集的盲源分离, 该算法可以应用于 MIMO 信号的盲检测, 但算法建立的 SDR 模型的秩仅为 1, 对每一个信源都要进行一次求解, 因此计算复杂度较高, 为叙述方便我们称这种算法为秩 1 的盲检测算法。

本文致力于 MIMO 系统的盲检测问题, 安排如下: 第 1 节为前言; 第 2 节介绍 MIMO 盲检测的信号模型和估计准则; 第 3 节将 MIMO 盲检测问题转换为二次约束的二次规划 (Quadratically Constrained Quadratic Program, QCQP) 问题, 并做适当的松弛建立一种新的 MIMO 盲检测 SDR 求解模型; 第 4 节提出一种主特征向量和随机法相结合的方法估计原始问题的解, 解决了松弛解秩大于 1 条件下估计原始问题解的难题; 第 5 节通过分析 SDR 模型目标函数的误差上限来设定检测序列个数门限, 加入信源相关性的约束条件, 设计了松弛解的个数能够自适应变化的 SDR MIMO 盲检测算法, 并对算法的计算复杂度进行了分析; 第 6 节给出算法的仿真结果与对比; 最后对全文算法进行总结。

## 2 信号模型

考虑 MIMO 系统接收端的接收信号模型, 假设信号精确同步(包括载波同步和定时同步等), 系统中有  $N_r$  个接收天线和  $N_t$  个发送天线, 每个天线发送  $K$  个符号, 且不失一般性假设各信源独立, 定义:

$$\mathbf{Y} \triangleq [\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_n, \dots, \mathbf{y}_{N_r-1}], \mathbf{S} \triangleq [\mathbf{s}_0, \dots, \mathbf{s}_n, \dots, \mathbf{s}_{N_t-1}] \quad (1)$$

其中, 矩阵  $\mathbf{Y}$  的第  $n$  列  $\mathbf{y}_n$  表示第  $n$  个天线接收到的长为  $K$  的序列, 矩阵  $\mathbf{S}$  的第  $n$  列  $\mathbf{s}_n$  表示第  $n$  个天线发送的长为  $K$  的序列, 假设信道为平坦衰落模型, 则信号模型可表示为

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S}\mathbf{H} + \mathbf{V} \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{H}$  表示维数为  $N_t \times N_r$  信道转移矩阵,  $\mathbf{V}$  为维数为  $K \times N_r$  的矩阵, 表示  $N_r$  个接收天线上相互独立的零均值加性高斯白噪声, MIMO 信号的盲检测就是在信道矩阵  $\mathbf{H}$  未知的条件下对上述模型中的发送序列  $\mathbf{S}$  进行估计。一种性能较好的检测方法是最大似然序列检测(Maximum Likelihood Sequence Detection, MLSD)<sup>[15]</sup>, 其检测准则为

$$\mathbf{S}_{\text{MLSD}} = \arg \max_{\mathbf{S} \in \Omega} p(\mathbf{Y} | \mathbf{S}) \quad (3)$$

其中  $\Omega$  表示发送符号构成的  $N_t \times K$  维矩阵的集合。

当信道系数为常数时, 可进一步对其做等价最小均方差:

$$\mathbf{S}_{\text{MLSD}} = \arg \min_{\mathbf{S} \in \Omega} \text{tr}[(\mathbf{Y} - \mathbf{S}\mathbf{H})^H (\mathbf{Y} - \mathbf{S}\mathbf{H})] \quad (4)$$

式中,  $\text{tr}(\ast)$  表示矩阵的迹,  $(\ast)^H$  表示共轭转置。本文将用基于 SDR 的盲检测算法解决上述问题, 通常 SDR 算法分为两步: (1)对原问题进行松弛转化为半正定规划问题, 并用内点法等得到松弛解; (2)用 SDR 求得的松弛解估计原始问题的解。下面分两个部分进行说明和分析。

## 3 半正定松弛(SDR)求解模型

当信道矩阵  $\mathbf{H}$  的逆矩阵存在, 且  $\mathbf{H}\mathbf{W} = \mathbf{I}$  时, 对式(2)的信号模型等号两边乘以滤波矩阵  $\mathbf{W}$ , 则有  $\mathbf{Y}\mathbf{W} = \mathbf{S} + \mathbf{V}\mathbf{W}$ , 进而最小均方误差等价

$$\mathbf{S}_{\text{MLSD}} = \arg \min_{\mathbf{S} \in \Omega} \text{tr}[(\mathbf{Y}\mathbf{W} - \mathbf{S})^H (\mathbf{Y}\mathbf{W} - \mathbf{S})] \quad (5)$$

令代价函数  $J = \text{tr}[(\mathbf{Y}\mathbf{W} - \mathbf{S})^H (\mathbf{Y}\mathbf{W} - \mathbf{S})]$ , 对  $J$  求导并令其为 0, 即  $\partial J / \partial \mathbf{W}^* = 0$ , 可得  $\mathbf{Y}^H \mathbf{S} - \mathbf{Y}^H \mathbf{Y}\mathbf{W} = 0$ , 若  $\mathbf{Y}^H \mathbf{Y}$  的逆矩阵存在, 此时要求  $K > N_r$ , 则有

$$\mathbf{W} = (\mathbf{Y}^H \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{Y}^H \mathbf{S} \quad (6)$$

将式(6)代入式(5)可得发送信号的最大似然序列估计式等价

$$\mathbf{S}_{\text{MLSD}} = \arg \min_{\mathbf{S} \in \Omega} \text{tr}(\mathbf{S}^H \mathbf{Q} \mathbf{S}) \quad (7)$$

其中,  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_K - \mathbf{Y}(\mathbf{Y}^H \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{Y}^H$ ,  $\mathbf{I}_K$  为  $K$  维的单位阵。式(7)是一个以已知发送符号集合  $\Omega$  为约束的二次规划问题, 这是一个 NP 难问题, 直接求解的计算复杂度十分高, 因此对约束条件做适当的松弛。下面以发送信号为 BPSK 为例进行分析讨论, 则式(7)中的复数运算变为实数运算, 且  $\mathbf{S}$  中的元素是布尔变量:

$$\mathbf{S}_{\text{MLSD}} = \arg \min_{\mathbf{S} \in (\pm 1)^{N_t \times K}} \text{tr}(\mathbf{S}^T \mathbf{Q} \mathbf{S}) \quad (8)$$

令  $\mathbf{X} = \mathbf{S}\mathbf{S}^T$ , 由于各信源独立易得矩阵  $\mathbf{X}$  的秩和对角线元素均等于发送天线数  $N_t$ , 则式(8)可以变为一个 QCQP 问题:

$$\left. \begin{aligned} & \min_{\mathbf{X} \in \Psi^{K \times K}} \text{tr}(\mathbf{X}\mathbf{Q}) \\ & \text{s.t. } \mathbf{X} \succeq 0, \text{rank}(\mathbf{X}) = N_t \\ & X_{kk} = N_t, k = 0, 1, \dots, K-1 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中  $\Psi^{K \times K}$  表示维数为  $K \times K$  的实对称阵的集合,  $\mathbf{X} \succeq 0$  表示  $\mathbf{X}$  为半正定矩阵,  $\text{rank}(\ast)$  表示矩阵的秩,  $X_{kk}$  表示矩阵  $\mathbf{X}$  中第  $k$  行第  $k$  列的元素。矩阵  $\mathbf{X}$  是秩为  $N_t$  的约束使式(9)的求解十分复杂, 因此对该约束进行松弛得到半正定规划问题:

$$\left. \begin{aligned} & \min_{\mathbf{X} \in \Psi^{K \times K}} \text{tr}(\mathbf{X}\mathbf{Q}) \\ & \text{s.t. } \mathbf{X} \succeq 0, X_{kk} = N_t, k = 0, 1, \dots, K-1 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

该问题是一个凸优化问题, 文献[1,8]给出了用内点法、CVX 工具箱等求解算法和工具, 由此可以得到松弛解  $\mathbf{X}_{\text{SDR}}$ 。上面论述虽然以 BPSK 信号为例进行说明, 但是 QPSK, 16QAM 等复信号和多模的 PAM 信号也能够通过变量代换、实虚分解等变换得到 QCQP 模型并通过松弛得到式(10), 只是模型维数有所增加, 具体方法可以参考文献[16]等。

#### 4 原始问题求解

由  $\mathbf{X} = \mathbf{S}\mathbf{S}^T$  可知矩阵  $\mathbf{X}$  的秩等于  $N_t$ , 松弛解  $\mathbf{X}_{\text{SDR}}$  是根据第 2 节中提出的 SDR 盲检测模型求得的对  $\mathbf{X}$  的近似估计, 受算法的数值计算误差、噪声、松弛约束条件带来的影响,  $\mathbf{X}_{\text{SDR}}$  的秩不是严格等于发送天线数, 但是  $\mathbf{X}_{\text{SDR}}$  的  $N_t$  个最大的特征值远大于其他特征值, 这样带来的难题是传统的一些根据松弛解估计原始问题解的方法均无法应用。例如, 秩 1 近似法是用矩阵  $\mathbf{X}_{\text{SDR}}$  的最后一列去近似估计维度为 1 的原始解, 对于这种秩大于 1 的需求无法满足。如果直接采用随机法, 由于  $\mathbf{S}$  是  $K \times N_t$  的矩阵, 维数较大, 所需随机的次数较多, 计算复杂度较高, 因此提出了一种特征向量近似和随机法相结合的估计方法。

##### 4.1 特征向量近似

松弛解  $\mathbf{X}_{\text{SDR}}$  是一个秩近似等于  $N_t$  的实半正定矩阵, 则其特征值分解一定可以写为  $\mathbf{X}_{\text{SDR}} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T$  的形式, 其中  $\mathbf{U}$  是一个正交矩阵,  $\mathbf{D}$  是一个对角线元素按降序排列的对角阵, 记这些元素值为  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{K-1}$ , 对应的特征向量为正交矩阵  $\mathbf{U}$  的各列记为  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{K-1}$ , 由此可得  $\mathbf{X}_{\text{SDR}} = \lambda_0 \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_0^T + \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T \dots + \lambda_{K-1} \mathbf{u}_{K-1} \mathbf{u}_{K-1}^T$ 。由于  $\mathbf{X}_{\text{SDR}}$  的  $N_t$  个最大的特征值远大于其他的特征值, 舍去  $K - N_t$  个特征值的对应项,  $\mathbf{X}_{\text{SDR}}$  的秩为  $N_t$  的近似估计可表示为

$$\mathbf{X}_{\text{SDR}} \approx \lambda_0 \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_0^T + \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T \dots + \lambda_{N_t-1} \mathbf{u}_{N_t-1} \mathbf{u}_{N_t-1}^T \quad (11)$$

对比  $\mathbf{X} = \mathbf{S}\mathbf{S}^T = \mathbf{s}_0 \mathbf{s}_0^T + \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_1^T \dots + \mathbf{s}_{N_t-1} \mathbf{s}_{N_t-1}^T$  可以看出, 特征向量  $\mathbf{u}_n$  是对  $\mathbf{s}_n$  的合理估计, 由于序列  $\mathbf{s}_n$  是二进制序列, 因此对特征向量  $\mathbf{u}_n$  取符号则可得  $\mathbf{s}_n$  的估计值:

$$\hat{\mathbf{s}}_n^{\text{eig}} = \text{sgn}(\mathbf{u}_n) \quad (12)$$

一般对秩为 1 的  $\mathbf{X}_{\text{SDR}}$  估计原始问题解所用的主特征向量近似法正是上述方法  $N_t = 1$  时的特殊情况。需要指出的是虽然各个信源的发送序列  $\mathbf{s}_n$  相互独立, 但是由于数据长度有限难以满足正交的条件, 导致这种近似估计存在误差, 使得基于正交分解的特征向量近似法误码率较高, 只把特征向量法得到的估计值作为初始值, 因此下面通过引入随机的方法以提升算法的性能。

##### 4.2 随机法

首先来分析随机方法的原理, 考虑一个随机矢量  $\boldsymbol{\xi}$  服从均值为 0, 协方差为  $\mathbf{X}$  的高斯分布, 记为  $\boldsymbol{\xi} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{X})$ 。进而考虑以下随机 QCQP 问题:

$$\min_{\mathbf{X} \in \Psi^{K \times K}, \mathbf{X} \succeq \mathbf{0}} E_{\boldsymbol{\xi} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{X})} \{ \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\xi} \} \quad (13)$$

上述问题通过对协方差矩阵  $\mathbf{X}$  的控制来约束随机矢量  $\boldsymbol{\xi}$  的选取, 并使目标函数的期望值最小, 不难得到式(14):

$$\mathbf{X} = E_{\boldsymbol{\xi} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{X})} \{ \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\xi}^T \} \quad (14)$$

则从期望的角度该问题等价于秩为 1 的  $\mathbf{X}$  对应的 QCQP 问题:

$$\min_{\mathbf{X} \in \Psi^{K \times K}} \text{tr}(\mathbf{X}\mathbf{Q}) \quad (15)$$

因此, 式(10)在得到松弛解  $\mathbf{X}_{\text{SDR}}$  之后, 一种合理的估计原始问题的解的方法就是产生一个随机变量  $\boldsymbol{\xi} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{X}_{\text{SDR}})$ , 通过多次随机选取将目标函数最小的  $\boldsymbol{\xi}$  作为原始问题的估计值。

与上述不同的是 MIMO 盲检测模型中  $\mathbf{X}$  的秩等于  $N_t$ , 需要对目标函数进行分解:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{X}\mathbf{Q}) &= \text{tr}(\mathbf{S}\mathbf{S}^T\mathbf{Q}) = \text{tr}(\mathbf{s}_0 \mathbf{s}_0^T \mathbf{Q}) + \text{tr}(\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_1^T \mathbf{Q}) \dots \\ &\quad + \text{tr}(\mathbf{s}_{N_t-1} \mathbf{s}_{N_t-1}^T \mathbf{Q}) \end{aligned} \quad (16)$$

由于各个信源  $\mathbf{s}_0, \dots, \mathbf{s}_n, \dots, \mathbf{s}_{N_t-1}$  之间相互独立, 因此使上述目标函数最小就需要使每个求和子式  $\text{tr}(\mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{Q})$  最小, 对应随机法可知, 一种可行的估计办法就是选取使目标函数最小的  $N_t$  个独立的  $\boldsymbol{\xi}_n$  作为  $\mathbf{s}_n$  的估计值, 同样由于序列  $\mathbf{s}_n$  是二进制序列, 因此有

$$\hat{\mathbf{s}}_n = \text{sgn}(\boldsymbol{\xi}_n) \quad (17)$$

另外, 信源之间虽然独立, 但是因为数据长度有限, 任意两个发送序列  $\mathbf{s}_n, \mathbf{s}_m$  ( $n \neq m$ ) 通常具有相关性, 所以需要通过相关系数的大小判定两个序列是否“独立”。序列  $\mathbf{s}_n$  的期望为 0, 方差为 1, 根据相关系数的公式可得

$$\rho = (\mathbf{s}_n, \mathbf{s}_m) / K \quad (18)$$

其中  $(\mathbf{s}_n, \mathbf{s}_m)$  表示两个向量的内积, 只有相关系数小于  $\rho$  相关阈值  $\rho_{\text{max}}$  (通常取 0.5 即可) 的序列才认为是两个不同的序列, 最终可以得到发送符号矩阵的估计  $\hat{\mathbf{S}}$ 。这种随机法是以一定的概率趋于最优值的, 显然随机的次数越多性能越好, 为了从一定程度上消除随机性带来的影响, 将随机法得到的估计值  $\hat{\mathbf{S}}$  代入式(6)求得滤波矩阵  $\mathbf{W}$  并重新计算发送序列。

对  $N_t$  个序列做上述随机选取, 一种可行的思路是分别对每个序列做  $M_{\text{rand}}$  次随机 (即共进行  $N_t \times M_{\text{rand}}$  次随机), 选取出目标值最小的序列作为估计值, 这样做简单易实现, 但计算量较大。由于  $N_t$  个

序列每次随机的协方差矩阵相同, 可以综合考虑  $N_t$  个序列只进行  $M_{\text{rand}}$  次随机, 使每次随机出的序列合理分配到  $N_t$  个待估序列去, 下面对随机法的步骤进行说明:

步骤 1 记  $\hat{\mathbf{s}}_n$  表示随机法的估计值, 用特征向量近似法的估计值  $\hat{\mathbf{s}}_n^{\text{sig}}$  作为初始值, 即  $\hat{\mathbf{s}}_n = \hat{\mathbf{s}}_n^{\text{sig}}$ , 计算  $N_t$  个目标值  $J_n = \text{tr}(\hat{\mathbf{s}}_n \hat{\mathbf{s}}_n^T \mathbf{Q})$ , 并对  $J_n$  及其对应的  $\hat{\mathbf{s}}_n$  按  $J_n$  的升序排列, 对松弛解  $\mathbf{X}_{\text{SDR}}$  做分解(例如 Cholesky 分解), 使  $\mathbf{X}_{\text{SDR}} = \mathbf{V}^T \mathbf{V}$ , 设定相关阈值  $\rho_{\text{max}}$  和随机次数  $M_{\text{rand}}$ , 令  $m = 0$ ;

步骤 2 产生随机矢量  $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_m \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_K)$ , 令  $\boldsymbol{\xi}_m = \tilde{\boldsymbol{\xi}}_m \mathbf{V}$ , 则随机矢量  $\boldsymbol{\xi}_m \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{X}_{\text{SDR}})$ , 记  $\boldsymbol{\eta}_m = \text{sgn}(\boldsymbol{\xi}_m)$  作为第  $m$  次随机到的二进制序列, 计算  $J_m^* = \text{tr}(\boldsymbol{\eta}_m \boldsymbol{\eta}_m^T \mathbf{Q})$ , 根据式(18)计算  $\boldsymbol{\eta}_m$  与  $\hat{\mathbf{s}}_n (n = 1, 2, \dots, N_t)$  的相关性  $\rho_n$ :

若  $\max(\rho_n) < \rho_{\text{max}}$  且  $J_m^* < \max(J_n)$ , 则令  $n' = \arg \max_n J_n, \hat{\mathbf{s}}_{n'} = \boldsymbol{\eta}_m, J_{n'} = J_m^*$ ;

若  $\max(\rho_n) \geq \rho_{\text{max}}$ , 则令 Index 表示满足  $\rho_n \geq \rho_{\text{max}}$  的下标集合, 若  $J_m^* < \min(J_{\text{Index}})$ , 则令  $n' = \arg \min J_{\text{Index}}, \hat{\mathbf{s}}_{n'} = \boldsymbol{\eta}_m, J_{n'} = J_m^*$ ;

令  $m = m + 1$  并判断  $m < M_{\text{rand}}$ , 若成立, 则回到步骤 2; 若成立到步骤 3;

步骤 3 估计值  $\hat{\mathbf{S}} = [\hat{\mathbf{s}}_0, \dots, \hat{\mathbf{s}}_n, \dots, \hat{\mathbf{s}}_{N_t-1}]$  代入式(6)求得滤波矩阵  $\mathbf{W}$  并重新计算发送序列:  $\hat{\mathbf{S}} = \text{sgn}(\mathbf{Y}\mathbf{W})$ 。

## 5 算法分析与总结

由于 SDR 是对原问题的松弛求解, 且检测模型中的  $\mathbf{Q}$  矩阵受到噪声的影响使松弛解产生误差, 进而影响原始问题的求解结果和目标函数值并导致了误码率的上升, 因而我们对原始问题的目标值进行简要分析。第  $n$  个发送序列的估计值  $\hat{\mathbf{s}}_n$  的目标函数值为  $J_n = \text{tr}(\hat{\mathbf{s}}_n \hat{\mathbf{s}}_n^T \mathbf{Q})$ , 如果该序列没有误码, 则有

$$\begin{aligned} J_n &= \text{tr}[(\mathbf{Y}\mathbf{w}_n - \mathbf{s}_n)^T (\mathbf{Y}\mathbf{w}_n - \mathbf{s}_n)] \\ &= (\mathbf{V}\mathbf{w}_n)^T (\mathbf{V}\mathbf{w}_n) \end{aligned} \quad (19)$$

其中,  $\mathbf{w}_n$  为该序列对应的滤波向量, 是滤波矩阵  $\mathbf{W}$  的第  $n$  列, 由式(19)可以看出  $J_n$  的理想值是噪声经过滤波向量  $\mathbf{w}_n$  滤波后的能量。对任意一个发送序列, 估计序列每发生一个比特的错误则  $J_n$  增量的期望为

$$\text{E}[(\mathbf{V}_k \mathbf{w}_n + 2)(\mathbf{V}_k \mathbf{w}_n + 2) - (\mathbf{V}_k \mathbf{w}_n)(\mathbf{V}_k \mathbf{w}_n)] = 4 \quad (20)$$

另外, 已知  $\mathbf{H}\mathbf{W} = \mathbf{I}$ , 由于  $\mathbf{H}$  是随机矩阵, 因此  $\mathbf{W}$  也同样是随机矩阵, 那么如果两个估计序列的误码率相同则其目标函数值的期望有

$$\text{E}[(\mathbf{V}\mathbf{w}_n)^T (\mathbf{V}\mathbf{w}_n)] = \text{E}[(\mathbf{V}\mathbf{w}_m)^T (\mathbf{V}\mathbf{w}_m)], n \neq m \quad (21)$$

由此可以得出以下两个结论: (1)最小的目标函数值对应的发送序列的估计值最准确误码率最低; (2)如果其他发送序列估计值与最小的目标函数值对应的发送序列估计值具有相近的误码率, 则两者的目标函数值相差不大。因此, 可以通过其他目标函数值与最小的目标函数值的差值来判断该发送序列估计值的误码率能否与最优的估值序列相近。令

$$J_{\text{min}} = \min_n J_n, n' = \arg \min_n J_n \quad (22)$$

即第  $n'$  个发送序列估计值  $\hat{\mathbf{s}}_{n'}$  具有最小的目标函数值  $J_{\text{min}}$ 。由此, 设定取值范围为  $[0, +\infty)$  的常数  $\gamma$  作为判断阈值, 如果原始问题第  $n$  个发送序列估计值的目标函数值  $J_n$  小于  $J_{\text{min}} + \gamma$ , 则认为求解结果正确; 否则求解错误。因为估计序列每发生一个比特的错误目标函数值增量的期望等于 4, 所以通常将  $\gamma$  设定为 4 的倍数。当  $\gamma = 0$  时表示只认为具有最小目标函数值的序列估计值正确; 当  $\gamma = +\infty$  时表示所有当前的序列估计值均正确; 当  $\gamma$  取其他常数时, 则可以得到满足  $J_n < J_{\text{min}} + \gamma$  的  $\hat{N}_t$  个序列估计值, 认为这些估值是原始问题正确的求解结果, 其中  $\hat{N}_t$  表示每次正确求解的序列个数, 此时未求解的信源个数表示为  $\tilde{N}_t = N_t - \hat{N}_t$ , 对于这些剩余的  $\tilde{N}_t$  个序列需重新建立 SDR 模型进行求解, 具体过程如下:

步骤 1 更新接收信号  $\mathbf{Y}$ , 令每一路接收序列  $\mathbf{y}_m$  都减去上一次求解的发送序列  $\hat{\mathbf{s}}_n$  在  $\mathbf{y}_m$  上的投影, 更新对应的  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_K - \mathbf{Y}(\mathbf{Y}^H \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{Y}^H$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_m &= \mathbf{y}_m - \sqrt{D_{\mathbf{y}_m} / D_{\hat{\mathbf{s}}_n}} \text{cor}(\mathbf{y}_m, \hat{\mathbf{s}}_n) \hat{\mathbf{s}}_n, \\ m &= 0, 1, \dots, N_r - 1, n = 0, 1, \dots, \hat{N}_t - 1 \end{aligned} \quad (23)$$

其中  $D_{\mathbf{y}_m}$  和  $D_{\hat{\mathbf{s}}_n}$  分别表示  $\mathbf{y}_m$  和  $\hat{\mathbf{s}}_n$  的方差,  $\text{cor}(\mathbf{y}_m, \hat{\mathbf{s}}_n)$  表示  $\mathbf{y}_m$  和  $\hat{\mathbf{s}}_n$  的相关系数;

步骤 2 加入表示发送序列“独立”的约束条件, 令待求解序列的相关性与已求解序列的相关性小于相关阈值  $\rho_{\text{max}}$ , 即  $\text{tr}(\mathbf{A}_m \mathbf{X}) < \rho_{\text{max}}^2 K^2$ , 其中  $\mathbf{A}_m = \hat{\mathbf{s}}_m \hat{\mathbf{s}}_m^T$ , 由此得到新的 SDR 模型:

$$\left. \begin{aligned} &\min_{\mathbf{X} \in \Psi^{K \times K}} \text{tr}(\mathbf{X}\mathbf{Q}) \\ &\text{s.t. } \mathbf{X} \succeq \mathbf{0}, X_{kk} = \tilde{N}_t, k = 0, 1, \dots, K - 1 \\ &\text{tr}(\mathbf{A}_m \mathbf{X}) < \rho_{\text{max}}^2 K^2, m = 0, 1, \dots, N_t - \tilde{N}_t - 1 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

步骤 3 根据式(24)求解得到松弛解  $\mathbf{X}_{\text{SDR}}$ , 并通过特征向量近似法和随机法求得原始问题的解  $\hat{\mathbf{s}}_n$ , 由  $J_n < J_{\text{min}} + \gamma$  判断此次求解得到的发送序列个数  $\hat{N}_t$ , 若  $\tilde{N}_t = \hat{N}_t$  则输出所有序列, 否则令  $\tilde{N}_t = \tilde{N}_t - \hat{N}_t$ , 返回步骤 1。

下面对算法的计算复杂度进行分析, 每次 SDR 求解算法内点法在给定计算精度  $\varepsilon (\varepsilon < 1)$  的条件下计算复杂度为  $O((K^3 L + K^2 L^2 + L^3) \sqrt{K} \lg \varepsilon^{-1})$ , 一般

$\varepsilon$  为常数, 因而记为  $O((K^3L + K^2L^2 + L^3)\sqrt{K})$ , 其中  $L$  表示约束条件个数, 式(24)中对角线元素的约束互不相关, 因而可看作 1 个约束条件。上述算法中特征值分解的计算复杂度是  $O(K^3)$ , 秩 1 的算法和上述算法所应用的 Cholesky 分解的计算复杂度是  $O(K^3)$ , 两种算法中每次 SDR 求解的随机的计算复杂度均是  $O(K^2)$ , 由此可以看出两种算法的计算消耗主要集中在内点法求解。秩 1 算法做了  $N_t$  次 SDR 求解, 每次求解的约束条件个数都增加 1 个, 可得  $N_t$  次 SDR 求解的计算复杂度为

$$O\left(\sum_{L=1}^{N_t}(K^3L + K^2L^2 + L^3)\sqrt{K}\right) = O\left((K^3N_t^2 + K^2N_t^3 + N_t^4)\sqrt{K}\right) \quad (25)$$

在第 3 节中已经指出  $K > N_r$ , 因此秩 1 算法的计算复杂度约为:  $O(K^{3.5}N_t^2)$ , 计算复杂度是发送天线数的多项式级。本文算法的平均 SDR 求解次数和每次求解的约束条件个数则通过  $\gamma$  的取值来控制的, 所以 SDR 求解的计算复杂度为从  $O(K^{3.5})$  ( $\gamma = \infty$  时) 到  $O(K^{3.5}N_t^2)$  ( $\gamma = 0$  时), 而当  $\infty > \gamma > 0$  时平均计算复杂度约为  $O(K^{3.5}N_t)$ , 计算复杂度与发送天线数成线性关系。综上可得, 本文提出的算法能够改变  $\gamma$  的取值, 控制 SDR 的求解次数, 从而实现误码性能和计算复杂度的折中。

## 6 仿真实验

为了对比本文提出的算法(Rank-adaptive)和秩 1 的算法(Rank-1)的性能给出以下仿真实验, 每组实验进行 500 次蒙特卡洛仿真, 实验条件如下: (1)发送序列: 发送序列为相互独立的随机序列, 若无特殊说明则信号长度为 100(即  $K = 100$ ), 发送信号是调制方式为 BPSK 的信号; (2)发送接收天线数: 若无特殊说明接收天线数与发送天线数相等, 一般选取  $N_r = N_t = 4$ ; (3)随机信道: 试验采用随机信道, 则每次蒙特卡洛仿真中 MIMO 信道矩阵的系数随机产生, 各元素(若信道为复信道则实部和虚部独立)均服从均值为 0、方差为 1 的高斯分布; (4)信噪比: 定义信噪比为

$$E_s/N_0 = 10\lg\left(\frac{\sigma_{y_n}^2}{\sigma_{v_n}^2}\right) \quad (26)$$

即将第  $n$  个天线接收信号的功率及其加性高斯白噪声的功率比值作为对比算法信噪比性能的标准。

第 1 组实验对比本文提出的算法和秩 1 的算法在不同信噪比条件下的性能, 实验进行了 500 次蒙特卡洛仿真, 每次仿真的发送序列和信道系数均按上述方法产生。图 1 给出了该组实验的仿真结果, 图中纵轴表示误比特率, 横轴表示信噪比, 4 条曲线分别表示秩 1 的算法、本文提出的算法在  $\gamma = 4$ ,

$\gamma = 12$  和  $\gamma = \infty$  时的性能曲线。由结果可以看出在相同的发送接收环境下, 本文提出的算法在  $\gamma = 4$  时与秩 1 算法的误比特性能几乎相同, 算法性能随  $\gamma$  的增长而下降。由第 5 节的分析可知, 两种算法的计算消耗主要集中在内点法求解过程, 因此本文以 SDR 求解的次数和求解时间作为对比标准。表 1 给出了 4 种算法在不同信噪比下 SDR 平均求解次数, 从仿真结果可以看出本文算法在  $\gamma = 4$  时的 SDR 求解次数减少 50% 以上, 且随  $\gamma$  的增长而下降, 当  $\gamma = \infty$  时则只需 1 次 SDR 求解。表 2 给出了 4 种算法在不同信噪比下 CVX 工具箱求解 SDR 的平均时间, 从求解时间来看计算复杂度降低了 56% 以上, 比 SDR 求解次数降低的比例更高。这是因为 SDR 求解的计算复杂度随约束条件个数成多项式级增加, 而求解次数与约束条件有线性关系, 所以求解时间会随求解次数成多项式级增加, 表 1 和表 2 中的数据恰好反映了这一关系。

由于发送天线数的增加会增加松弛解秩的维度, 因此第 2 组实验将对不同发送天线数对算法的影响。图 2 给出了该组实验的仿真结果, 图中纵轴表示误比特率, 横轴表示信噪比, 其中两条实线分别表示发送天线数为 6 时秩 1 算法和本文算法( $\gamma = 4$ )的性能曲线, 虚线则表示发送天线数为 8 时秩 1 算法和本文算法( $\gamma = 4$ )的性能曲线, 可以看出两种算法的性能曲线几乎相同, 表明发送天线数对本文算法与秩 1 算法的影响相同。由于平均求解

表 1 4 种算法在不同信噪比下 SDR 平均求解次数

算法	$E_s/N_0(\text{dB})$					平均
	0	5	10	15	20	
秩 1 算法	4	4	4	4	4	4
本文算法 $\gamma = 4$	1.18	2.14	2.43	2.26	1.98	1.998
本文算法 $\gamma = 12$	1.00	1.28	1.83	1.80	1.58	1.498
本文算法 $\gamma = \infty$	1	1	1	1	1	1

表 2 4 种算法在不同信噪比下平均求解时间(s)

算法	$E_s/N_0(\text{dB})$					平均
	0	5	10	15	20	
秩 1 算法	7.73	7.73	7.81	7.91	8.01	7.84
本文算法 $\gamma = 4$	2.01	3.16	4.31	4.19	3.43	3.42
本文算法 $\gamma = 12$	1.10	1.60	2.76	2.86	2.37	2.13
本文算法 $\gamma = \infty$	1.11	1.12	1.13	1.15	1.17	1.14

时间更能反映计算复杂度，因此给出了不同发送天线数在不同信噪比下平均求解时间，如表 3 所示。可以看出本文算法的平均求解时间在  $N_t = 6$  时为 5.16 s，在  $N_t = 8$  时仅为 6.95 s，与秩 1 算法相比，分别减少 66%和 72%。为更加直观地给出算法复杂度的对比，在综合表 2，表 3 的数据的基础上对  $N_t = 10$ ， $N_t = 12$  时进行算法仿真，记录两种算法的平均求解时间，图 3 给出了仿真结果。图中横轴表示发送天线数，纵轴表示平均求解时间，可以看出秩 1 算法的平均求解时间随发送天线数的增加近似成多项式级上升，而本文算法的平均求解时间与发送天线数则成线性关系，仿真结果验证了第 5 节中对算法计算复杂度的分析。

第 3 组实验对比一定信噪比条件下不同发送序列长度的对算法的影响，图 4 给出了信噪比为 15 dB 时该组实验的仿真结果，图中纵轴表示误比特率，

横轴表示发送序列的长度，两条曲线分别表示秩 1 的算法、本文提出的算法在  $\gamma = 4$  时的性能曲线。仿真结果可以看出算法性能随数据量的增加而提升，该实验结果验证了信源“独立”对于算法的影响，数据长度越长信源的独立性越明显，盲检测的效果越好。

第 4 组实验对比不同接收天线数对算法的影响，图 5 给出了该组实验的仿真结果，图中纵轴表示误比特率，横轴表示信噪比，其中两条实线分别表示接收天线数为 5 时秩 1 算法和本文算法的性能曲线，虚线则表示接收天线数为 3 时秩 1 算法和本文算法的性能曲线。仿真结果表明当接收天线数增多时，由于接收到更多的信号副本使得两种算法的性能均得到提升，且两种算法的性能在超定的情况下几乎相同，但在欠定的情况下两种算法均有较大的性能损失，并且本文算法的性能损失更为明显，这是因为本文算法松弛解的秩与发送天线数相同，当接收天线数小于发送天线数时由于接收维度的缺失，会使松弛解的秩等于接收天线数，进而导致原始问题解的估计误差增大、误码率增加。

表 3 算法在不同发送天线数下平均求解时间(s)

算法	$E_s/N_0$ (dB)					平均
	0	5	10	15	20	
$N_t=6$	15.14	15.15	15.21	15.35	15.44	15.26
秩 1 算法						
$N_t=6$	2.63	3.80	6.64	6.95	5.81	5.16
本文算法						
$N_t=8$	24.68	24.66	24.72	24.83	24.88	24.75
秩 1 算法						
$N_t=8$	3.64	4.61	8.09	10.15	8.35	6.96
本文算法						

### 7 总结

本文致力于 MIMO 系统的盲检测问题，以最大似然序列检测为准则，建立了一种新的 SDR 求解模型，使得松弛解的秩等于发送天线数，并根据松弛解的秩大于 1 的特点还提出了一种特征向量和随机

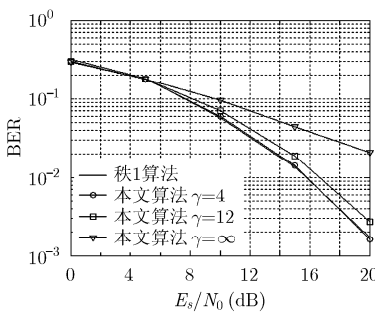


图 1 不同信噪比下算法性能对比

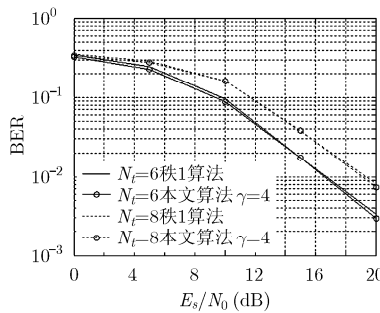


图 2 不同发送天线数算法性能对比

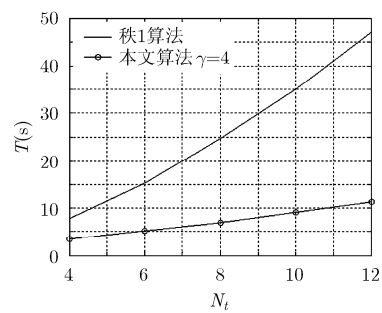


图 3 不同发送天线数下平均求解时间

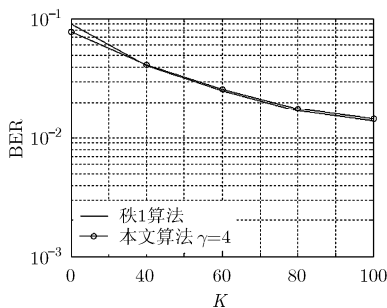


图 4 不同数据量算法性能对比

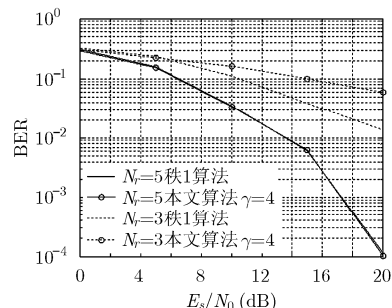


图 5 不同接收天线数算法性能对比

法相结合的估计原始问题解的方法, 通过限定目标函数的取值上限, 使算法自适应对多路发送序列进行检测, 且算法的计算复杂度与发送天线数成线性关系。最后, 通过仿真验证了本文算法能够在与秩 1 的算法性能保持相当的条件下降低计算复杂度, 计算复杂度的改善随发送天线数的增加而更加明显。

### 参 考 文 献

- [1] LUO Zhiqian, MA Wingkin, ANTHONY S M, *et al.* Semidefinite relaxation of quadratic optimization problems[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2010, 27(3): 20–34.
- [2] 罗涛, 刘宏伟, 严俊坤, 等. 基于半正定秩松弛方法的稳健波束形成[J]. *电子与信息学报*, 2014, 36(7): 1545–1551. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.01046.  
LUO Tao, LIU Hongwei, YAN Junkun, *et al.* Robust beamforming via semidefinite rank relaxation[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014, 36(7): 1545–1551. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.01046.
- [3] MA Wingkin, DAVIDSON T N, WONG K M, *et al.* Quasi-maximum-likelihood multiuser detection using semi-definite relaxation with application to synchronous CDMA[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, 50(4): 912–922.
- [4] STEINGIMSSON B, LUO Zhiqian, and WONG K. Soft quasi-maximum-likelihood detection for multiple-antenna wireless channels[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2003, 51(11): 2710–2719.
- [5] NEKUII M, KISIALIOU M, DAVIDSON T N, *et al.* Efficient soft-output demodulation of MIMO QPSK via semidefinite relaxation[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2011, 5(8): 1426–1437.
- [6] MA Wingkin, CHING Pakchung, and DING Zhi. Semidefinite relaxation based multiuser detection for M-ary PSK multiuser systems[J]. *IEEE Transaction on Signal Processing*, 2004, 52(10): 2862–2872.
- [7] WIESEL A, ELDAR Y C, and SHAMAI S. Semidefinite relaxation for detection of 16-QAM signaling in MIMO channels[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2005, 12(9): 653–656.
- [8] SHAO Z Y, CHEUNG S W, and YUK T I. Comparison of semidefinite relaxation detectors for high-order modulation MIMO systems[J]. *International Journal of Antennas and Propagation*, 2014, 6(3): 1–8.
- [9] JALDEN J, MARTIN C, and OTTERSTEN B. Semidefinite programming for detection in linear systems-optimality conditions and space-time decoding[C]. *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Hong Kong, 2003: 9–12.
- [10] KIM Minjoon, PARK Jangyong, KIM Killwan, *et al.* Exact ML criterion based on semidefinite relaxation for MIMO systems[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2014, 21(3): 343–346.
- [11] JALDEN J and OTTERSTEN B. The diversity order of the semidefinite relaxation detector[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2008, 54(4): 1406–1422.
- [12] XU Zi, HONG Mingyi, and LUO Zhiqian. Probabilistic analysis of semidefinite relaxation for binary quadratic minimization[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2014, 24(3): 1265–1293.
- [13] 韩飞. 正交空时分组码的最大似然盲检测算法研究[D]. [硕士学位论文], 西南交通大学, 2014.
- [14] LI Qingyu, BAI Erwei, and DING Zhi. Blind source separation of signals with known alphabets using epsilon-approximation algorithms[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2003, 51(1): 1–10.
- [15] MANUEL A and MIGUEZ V J. Maximum-likelihood sequence detection in time- and frequency-selective MIMO channels with unknown order[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2009, 58(1): 499–504.
- [16] 薛江. 基于多通道接收的短波信道盲均衡算法研究[D]. [硕士学位论文], 解放军信息工程大学, 2012.

李 浩: 男, 1986 年生, 博士生, 研究方向为通信信号处理、盲信号处理。

彭 华: 男, 1973 年生, 教授, 研究方向为通信信号处理、软件无线电。