

高性能时不变 LDPC 卷积码构造算法研究

穆丽伟^{*①②} 刘星成^③ 张涵^{①②}

^①(华南师范大学物理与电信工程学院 广州 510006)

^②(华南师范大学广东省量子调控工程与材料重点实验室 广州 510006)

^③(中山大学电子与通信工程系 广州 510006)

摘要: 该文基于由 QC-LDPC 码获得时不变 LDPC 卷积码的环同构方法, 设计了用有限域上元素直接获得时不变 LDPC 卷积码多项式矩阵的新算法。以 MDS 卷积码为例, 给出了一个具体的构造过程。所提构造算法可确保所获得的时不变 LDPC 卷积码具有快速编码特性、最大可达编码记忆以及设计码率。基于滑动窗口的 BP 译码算法在 AWGN 信道上的仿真结果表明, 该码具有较低的误码平台和较好的纠错性能。

关键词: LDPC 卷积码; 有限域; 快速编码; 时不变; 最大编码记忆

中图分类号: TN911.22

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2016)09-2274-06

DOI: 10.11999/JEIT151376

New Ensemble of Time-invariant LDPC Convolutional Codes with High Performance

MU Liwei^{①②} LIU Xingcheng^③ ZHANG Han^{①②}

^①(School of Physics and Telecommunication Engineering, South China Normal University, Guangzhou 510006, China)

^②(Guangdong Provincial Key Laboratory of Quantum Engineering and Quantum Materials, South China Normal University, Guangzhou 510006, China)

^③(Department of Electronic and Communications Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: In this paper, a new ensemble of the polynomial matrix of a time-invariant LDPC convolutional code is proposed. Based on the method of deriving time-invariant LDPC convolutional codes from QC (Quasi-Cyclic)-LDPC block codes, the elements over finite fields are used to generate directly the polynomial parity-check matrices of LDPC convolutional codes. A concrete example of using MDS (Maximum-Distance Separable) convolutional codes to derive the polynomial matrices is given. The proposed method ensures the fast encoding property, maximum encoding memory and designed rate. Simulation results show that the proposed LDPC convolutional codes exhibit low error floor and good decoding performance under BP (Belief Propagation) decoding algorithm over AWGN (Additive White Gaussian Noise) channel.

Key words: LDPC convolutional codes; Finite fields; Fast encoding; Time-invariant; Maximum encoding memory

1 引言

众所周知, 卷积码主要用于实时通信系统, 然而, 由于 Viterbi 译码算法的高复杂性, 一般情况下仅使用具有较小约束长度的卷积码。近年来, LDPC

卷积码^[1,2]引起了研究人员的关注。与 LDPC 分组码一样, LDPC 卷积码也由稀疏奇偶校验矩阵定义; 但与 LDPC 分组码不同的是, 它们可对输入码流进行连续编译码。在发送端, 可用基于移位寄存器的编码器对输入信息流进行连续编码; 在接收端, 可用基于置信传播(Belief Propagation, BP)译码算法的滑动窗口译码器对从信道接收的码流进行连续译码^[3]。而且, 与 LDPC 分组码相比, 它们还具有更好的译码性能^[1]。LDPC 卷积码, 因具有比 LDPC 分组码更好的译码性能^[1], 比 Viterbi 更简单的 BP 译码算法, 以及能对输入码流进行连续编译码的特性, 而有更好的应用价值, 比如, 适用于 Ethernet。除此之外, 印度空间研究组织 (Indian Space

收稿日期: 2015-12-08; 改回日期: 2016-05-06; 网络出版: 2016-07-04

*通信作者: 穆丽伟 liweimu@m.scnu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(61401164, 61572534, 60141176, 61002012, 61501126), 广东省自然科学基金(2014A030310308, S2013010016297), 广东省优秀青年教师培养计划(YQ2015046)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61401164, 61572534, 60141176, 61002012, 61501126), The Natural Science Foundation of Guangdong Province of China (2014A030310308, S2013010016297), The High Education Excellent Young Teacher Program of Guangdong Province (YQ2015046)

Research Organization, ISRO)已经开发出了用于全球导航卫星系统(Global Navigation Satellite System, GNSS)的 LDPC 卷积码的 MATLAB 和 C++模块。美国、俄罗斯、欧盟、中国、日本、印度、尼日利亚及许多其他国家正在频带 1559~1610 MHz(L1 频带)、1215~1300 MHz(L2 频带)以及 1164~1215 MHz(L5 频带)上计划/开发 GNSS。每个系统的信息和数据结构都各不相同,数据率变化范围为 25 bit/s 到 500 bit/s。码率 $R=1/2$, 信息长度 $K=7$ 的卷积码已被推荐用于不同信息的前向纠错技术(Forward Error Correction, FEC)中。利用该编码方案的 FEC 技术可用于深空通信、光纤通信以及计算机间的通信等。

LDPC 卷积码主要有两种结构:具有随机结构的码^[4]和具有固定结构的码^[5-7]。后者又称为时不变 LDPC 卷积码,因具有规则结构并能减少系统实现复杂度而受到学者的广泛关注,其奇偶校验矩阵 $\mathbf{H}(D)$ 可由单项式或多项式构成。文献[5]介绍了一种获得时不变 LDPC 卷积码奇偶校验矩阵 $\mathbf{H}(D)$ 的方法。然而,根据文献[5]的分析,由单项式构成的 $\mathbf{H}(D)$ 具有更好的环特性,这种结构可由准循环 LDPC(Quasi-Cyclic LDPC, QC-LDPC)分组码^[8-10]或随机搜索算法^[11,12]获得,显然,由 QC-LDPC 分组码获得 $\mathbf{H}(D)$ 的构造算法更简单。

本文根据由 QC-LDPC 分组码获得 LDPC 卷积码的方法,提出用有限域元素直接获得 LDPC 卷积码的由单项式组成的奇偶校验矩阵 $\mathbf{H}(D)$ 的算法,并举例给出了一种用截短的最大距离可分(Maximum-Distance Separable, MDS)卷积码获得 $\mathbf{H}(D)$ 的具体构造。到目前为止,几乎所有时不变 LDPC 卷积码的构造算法主要考虑其译码性能上的优越性,而忽视了其实现上的便利性,更没有考虑 LDPC 卷积码本身的一个特有优势:快速编码特性。本文算法旨在获得兼具快速编码特性与优异译码性能的时不变 LDPC 卷积码。该构造算法还具有任意时刻上的最大可达编码记忆以及结果码率与设计码率相等的特性。仿真结果表明,本文提出的时不变 LDPC 卷积码在小的约束长度下就具有很好的译码性能。

2 时不变 LDPC 卷积码的奇偶校验矩阵

2.1 具有快速编码的 LDPC 卷积码的二元矩阵

一个码率 $R = (n - m) / n$ 的 LDPC 卷积码可定义为满足方程 $\mathbf{v}\mathbf{H}^T = \mathbf{0}$ ^[1]的序列集合,其中, $\mathbf{v} = (\dots, \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t, \dots)$, $\mathbf{v}_t \in \mathcal{F}_2^n, t \in \mathcal{Z}$,

$$\mathbf{H}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_0(0) \\ \mathbf{H}_1(1) & \mathbf{H}_0(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{H}_{m_s}(m_s) & \dots & \mathbf{H}_0(m_s) \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathbf{H}_{m_s}(t) & \dots & \mathbf{H}_0(t) \\ & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{H}_0^T(t) & \dots & \mathbf{H}_{m_s}^T(t) \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathbf{H}_0^T(t) & \dots & \mathbf{H}_{m_s}^T(t) \\ & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \mathbf{H}_0^T(t) & \dots & \mathbf{H}_{m_s}^T(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_0^T(t) & \dots & \mathbf{H}_{m_s}^T(t) \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \quad (1)$$

式(1)中,符号 T 是矩阵的转置, \mathbf{H}^T 称为 LDPC 卷积码的校验模型, \mathbf{H} 称为 LDPC 卷积码的奇偶校验矩阵。子矩阵 $\mathbf{H}_i(t), i = 0, 1, \dots, m_s$, 是 $m \times n$ 二元矩阵,满足如下特性:

- (1) $\mathbf{H}_i(t) = \mathbf{0}, i < 0, i > m_s$, 任意 t ;
- (2) 存在某一时刻 t , 使得 $\mathbf{H}_{m_s}(t) \neq \mathbf{0}$ 。

我们称 m_s 为 LDPC 卷积码的校验模型记忆,称 $v_s = (m_s + 1) \cdot n$ 为 LDPC 卷积码的约束长度。方程 $\mathbf{v}\mathbf{H}^T = \mathbf{0}$ 可重写为

$$\mathbf{v}_t \mathbf{H}_0^T(t) + \mathbf{v}_{t-1} \mathbf{H}_1^T(t) + \dots + \mathbf{v}_{t-m_s} \mathbf{H}_{m_s}^T(t) = \mathbf{0} \quad (2)$$

如果 $n \times m$ 二元子矩阵 $\mathbf{H}_0^T(t)$ 是满秩的,且最后 $m \times m$ 矩阵为单位阵,可用方程

$$\mathbf{v}_t \mathbf{H}_0^T(t) + \mathbf{v}_{t-1} \mathbf{H}_1^T(t) + \dots + \mathbf{v}_{t-m_s} \mathbf{H}_{m_s}^T(t) = \mathbf{0}$$

对码长为 n 的 LDPC 卷积码进行直接编码获得 m 个校验位,其它 $(n - m)$ 位是输入信息位,直接输出即可^[1]。这种直接对校验矩阵编码的方式,称为快速编码,是 LDPC 卷积码的特有优势,可减少编码复杂度^[1]。

2.2 具有快速编码的时不变 LDPC 卷积码的多项式矩阵

时不变 LDPC 卷积码的子矩阵 $\mathbf{H}_i(t), i = 0, 1, \dots, m_s$, 在任意时刻 t 都是相同的,即 $\mathbf{H}_i(t) = \mathbf{H}_i$ 。此时,时不变 LDPC 卷积码的二元奇偶校验矩阵 \mathbf{H} 可用延迟算子 D 构成的多项式矩阵

$$\mathbf{H}(D) = \begin{pmatrix} D^{v_{0,0}} & D^{v_{0,1}} & \dots & D^{v_{0,n-1}} \\ D^{v_{1,0}} & D^{v_{1,1}} & \dots & D^{v_{1,n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D^{v_{m-1,0}} & D^{v_{m-1,1}} & \dots & D^{v_{m-1,n-1}} \end{pmatrix}$$

表示。例如,校验模型记忆 $m_s = 2$ 的时不变 LDPC 卷积码,其奇偶校验子矩阵 $\mathbf{H}_0 = (11), \mathbf{H}_1 = (10), \mathbf{H}_2 = (11)$, 对应的多项式形式的奇偶校验矩阵可表

示为: $\mathbf{H}(D) = [1 + D + D^2 \ 1 + D^2]$ 。根据二元码与多元码之间的关系可知, 只要令矩阵 $\mathbf{H}(D)$ 最后 m 列对角线上元素为 D^0 , 即可令其具有快速编码特性。

3 构造前准备: 在有限域上构造时不变 LDPC 卷积码的多项式矩阵

本节回顾文献[13]用 QC-LDPC 分组码获得时不变 LDPC 卷积码的构造过程, 提出在有限域上直接获得时不变 LDPC 卷积码多项式矩阵的方法。

令 $\text{GF}(q)$ 是一个有限域, q 是素数或素数的幂, $q > 2$, $\alpha^{-\infty} \triangleq 0, \alpha^0 = 1, \alpha, \dots, \alpha^{q-2}$ 形成 $\text{GF}(q)$ 上所有元素, $\alpha^{q-1} = 1$ 。由 $\text{GF}(q)$ 上的元素构成的 $m \times n$ 基矩阵可表示为

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_0 \\ \mathbf{w}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{0,0} & w_{0,1} & \cdots & w_{0,n-1} \\ w_{1,0} & w_{1,1} & \cdots & w_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m-1,0} & w_{m-1,1} & \cdots & w_{m-1,n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^{v_{0,0}} & \alpha^{v_{0,1}} & \cdots & \alpha^{v_{0,n-1}} \\ \alpha^{v_{1,0}} & \alpha^{v_{1,1}} & \cdots & \alpha^{v_{1,n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^{v_{m-1,0}} & \alpha^{v_{m-1,1}} & \cdots & \alpha^{v_{m-1,n-1}} \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中, $\alpha^{v_{i,j}} \in \text{GF}(q), v_{i,j}$ 是 α 的幂, $0 \leq v_{i,j} < q-1$ 。基矩阵 \mathbf{W} 应满足 α 乘-行约束条件^[13]:

(1) $\alpha^k \mathbf{w}_i$ 和 $\alpha^l \mathbf{w}_i$ 至少在 $n-1$ 个位置上不同,

$0 \leq i < m, 0 \leq k, l < q-1, k \neq l$;

(2) $\alpha^k \mathbf{w}_i$ 和 $\alpha^l \mathbf{w}_j$ 至少在 $n-1$ 个位置不同,

$0 \leq i, j < m, i \neq j, 0 \leq k, l < q-1$ 。

α 乘-行约束条件(1)和条件(2)可确保由基矩阵 \mathbf{W} 获得的 QC-LDPC 分组码及其对应的时不变 LDPC 卷积码没有 4 环。根据文献[14]和文献[8], 基矩阵 \mathbf{W} 对应的 QC-LDPC 分组码矩阵可表示为

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{v_{0,0}} & \mathbf{I}_{v_{0,1}} & \cdots & \mathbf{I}_{v_{0,n-1}} \\ \mathbf{I}_{v_{1,0}} & \mathbf{I}_{v_{1,1}} & \cdots & \mathbf{I}_{v_{1,n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{I}_{v_{m-1,0}} & \mathbf{I}_{v_{m-1,1}} & \cdots & \mathbf{I}_{v_{m-1,n-1}} \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中, $\mathbf{I}_{v_{i,j}}$ 是行循环向右移位 $v_{i,j}$ 的 $(q-1) \times (q-1)$ 单位阵。

根据环同构, 由式(4)可获得时不变 LDPC 卷积码多项式矩阵:

$$\mathbf{H}(D) = \begin{bmatrix} D^{v_{0,0}} & D^{v_{0,1}} & \cdots & D^{v_{0,n-1}} \\ D^{v_{1,0}} & D^{v_{1,1}} & \cdots & D^{v_{1,n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D^{v_{m-1,0}} & D^{v_{m-1,1}} & \cdots & D^{v_{m-1,n-1}} \end{bmatrix} \quad (5)$$

由此可推断, 只要构造一个在有限域 $\text{GF}(q)$ 上满足 α 乘-行约束条件的基矩阵 \mathbf{W} , 把式(3)的基矩阵 α 用延迟算子 D 表示, 就可直接获得时不变 LDPC 卷积码的多项式矩阵 $\mathbf{H}(D)$ 。本文考虑用有限域上的元素作为基矩阵元素, 获得满足 α 乘-行约束条件的基矩阵, 进而构造时不变 LDPC 卷积码。

4 构造具有快速编码的时不变 LDPC 卷积码多项式矩阵

本节根据 LDPC 卷积码的两个独有特性: (1) 快速编码特性, (2) 译码性能与编码记忆成正比^[1]的特性; 设计具有快速编码特性及最大可达编码记忆的 LDPC 卷积码多项式矩阵模型, 并以 MDS 卷积码为例, 给出获得该矩阵模型的具体构造方法。

4.1 建立矩阵模型

由文献[1]可推知, 如果 $m \times n$ 二元子矩阵 $\mathbf{H}_0(t)$ 是满秩的且其中任意 $m \times m$ 矩阵为单位阵, 可用式(2)对一个码率为 $R = (n-m)/n$ 的 LDPC 卷积码进行直接编码获得 m 个校验位, 此时, 码长为 n 的 LDPC 卷积码的其它 $(n-m)$ 位是输入信息位。假设 $\mathbf{H}_0(t)$ 的最后 m 列是单位阵, 式(2)就定义了一个系统编码器, 其编码方程如下:

$$\left. \begin{aligned} v_t^{(j)} &= u_t^{(j)}, j = 1, 2, \dots, n-m \\ v_t^{(j)} &= \sum_{k=1}^{n-m} u_t^{(k)} h_0^{(j-(n-m), k)}(t) + \sum_{i=1}^{m_s} \sum_{k=1}^n v_{t-i}^{(k)} h_i^{(j-(n-m), k)}(t), \\ & j = n-m+1, n-m+2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

校验符号 $v_t^{(j)}, j = n-m+1, \dots, n$, 可由移位寄存器编码获得^[1]。此时, 称矩阵 \mathbf{H} 具有快速编码特性, 这是 LDPC 卷积码的特有优势之一。

根据二元矩阵与多项式矩阵之间的关系, 由式(6)可知令矩阵 $\mathbf{H}(D)$ 最后 m 列对角线上元素为 D^0 , 可确保快速编码特性; 令矩阵 $\mathbf{H}(D)$ 前 m 列对角线上元素为 $D^{\max(v_{i,i})}, i = 0, 1, \dots, m-1$, 可确保每个编码时刻都有最大编码记忆 $\max(v_{i,i})$ (具体取值见 4.2 节), 此时, 校验模型记忆 $m_s = \max\{\max(v_{i,i})\}$, 多项式矩阵 $\mathbf{H}(D)$ 可表示为

$$\mathbf{H}^F(D) = \begin{bmatrix} D^{v_{0,0}} & \cdots & D^{v_{0,m-1}} & \cdots & D^{v_{0,n-m}} & \cdots & D^{v_{0,n-1}} \\ D^{v_{1,0}} & \cdots & D^{v_{1,m-1}} & \cdots & D^{v_{1,n-m}} & \cdots & D^{v_{1,n-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D^{v_{m-1,0}} & \cdots & D^{v_{m-1,m-1}} & \cdots & D^{v_{m-1,n-m}} & \cdots & D^{v_{m-1,n-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{\max(v_{0,0})} & \cdots & D^{v_{0,m-1}} & \cdots & D^0 & \cdots & D^{v_{0,n-1}} \\ D^{v_{1,0}} & \cdots & D^{v_{1,m-1}} & \cdots & D^{v_{1,n-m}} & \cdots & D^{v_{1,n-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D^{v_{m-1,0}} & \cdots & D^{\max(v_{m-1,m-1})} & \cdots & D^{v_{m-1,n-m}} & \cdots & D^0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

该矩阵可确保时不变 LDPC 卷积码具有快速编码特性和每个编码时刻上的最大可达编码记忆。

4.2 构造算法

本节构造 $H^F(D)$ 对应的 $m \times n$ 基矩阵 W^F 。首先, 用有限域元素生成 m 个互不相同的类: W_0, W_1, \dots, W_{m-1} , 该类具有下列特性:

(1) 每类有 $q-1$ 个码字;

(2) 如果码字 $w_i = (w_{i,0}, w_{i,1}, \dots, w_{i,n-1})$ 在类 W_i 中, 那么 $W_i = w_i, \alpha w_i, \dots, \alpha^{q-2} w_i$;

(3) 类 W_i 中的码字 $w_i = (\dots, w_{i,i}, w_{i,i+1}, \dots, w_{i,j}, \dots, w_{i,n-1})$ 称为类的代表, 其中 $w_{i,j} = \alpha^0, j = n - m + i$, 以确保快速编码特性, $w_{i,i} = \alpha^{\max(v_{i,i})}$ 以确保最大编码记忆, $\max(v_{i,i})$ 指在第 $j = n - m + i$ 个元素为 α^0 的所有码字中第 i 个元素的指数最大, 最终 w_i 可表示为 $w_i = (\dots, \alpha^{v_{i,i}}, \alpha^{v_{i,i+1}}, \dots, \alpha^{i,j}, \dots, \alpha^{v_{i,n-1}}) = (\dots, \alpha^{\max(v_{i,i})}, \alpha^{v_{i,i+1}}, \dots, \alpha^0, \dots, \alpha^{v_{i,n-1}})$, 若有多个相同的码字 w_i , 则任选一个;

(4) 来自两个不同类中的任意两个码字至少有 $n-1$ 个位置不同;

(5) 所有码字重量(码字中非零码元个数)为 n 。

然后, 用这 m 个类的代表 w_0, w_1, \dots, w_{m-1} 作为行, 构成 $m \times n$ ($m < n$) 基矩阵:

$$\begin{aligned}
 W &= \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{0,0} & w_{0,1} & \cdots & w_{0,n-1} \\ w_{1,0} & w_{1,1} & \cdots & w_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m-1,0} & w_{m-1,1} & \cdots & w_{m-1,n-1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \alpha^{v_{0,0}} & \cdots & \alpha^{v_{0,m-1}} & \cdots & \alpha^{v_{0,n-m}} & \cdots & \alpha^{v_{0,n-1}} \\ \alpha^{v_{1,0}} & \cdots & \alpha^{v_{1,m-1}} & \cdots & \alpha^{v_{1,n-m}} & \cdots & \alpha^{v_{1,n-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^{v_{m-1,0}} & \cdots & \alpha^{v_{m-1,m-1}} & \cdots & \alpha^{v_{m-1,n-m}} & \cdots & \alpha^{v_{m-1,n-1}} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \alpha^{\max(v_{0,0})} & \cdots & \alpha^{v_{0,m-1}} & \alpha^0 & \cdots & \alpha^{v_{0,n-1}} \\ \alpha^{v_{1,0}} & \cdots & \alpha^{v_{1,m-1}} & \alpha^{v_{1,m}} & \cdots & \alpha^{v_{1,n-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^{v_{m-1,0}} & \cdots & \alpha^{\max(v_{m-1,m-1})} & \alpha^{v_{m-1,m}} & \cdots & \alpha^0 \end{bmatrix} \tag{8}
 \end{aligned}$$

该矩阵具有下列特性:

(1) 行重为 n , 列重为 m ;

(2) 每个码字 w_i 中, $w_{i,j} = \alpha^0, w_{i,i} = \alpha^{\max(v_{i,i})}, i = 0, 1, \dots, m-1, j = n - m + i$ 。

定理 1 基矩阵 W 满足 α 乘行约束条件。

证明 由 α 乘-行约束条件(1)可推知, 两个 n -重矢量 $\alpha^k w_i$ 和 $\alpha^l w_i$ 至多有一个位置有取自有限域 $GF(q)$ 上的相同元素, 即: 基矩阵 W 的每一行至多

有一个 $GF(q)$ 上的 0 元素。显然, 类 W_0, W_1, \dots, W_{m-1} 的特性(2)和特性(5)使得基矩阵 W 满足 α 乘-行约束条件(1), 而类 W_0, W_1, \dots, W_{m-1} 的特性(4)使得基矩阵 W 直接满足 α 乘-行约束条件(2)。由此, 定理 1 得证。

4.3 用截短的 MDS 卷积码构造 $H^F(D)$

因为由 MDS 码生成的 QC-LDPC 分组码具有更好的性能^[15], 本节考虑用码率为 $1/v$ 的截短 MDS 卷积码^[15]的部分码字作为 LDPC 卷积码基矩阵的行元素, 并给出一个具体的构造例子。

根据文献[15], 有限域 $GF(q)$ 上, 码率为 $R=1/v$ 的 MDS 卷积码的多项式生成矩阵可表示为

$$G_v = \{g_1, g_2, \dots, g_v\} \tag{9}$$

其中, g_j 是有限域 $GF(q)$ 上的生成多项式, 写为

$$\begin{aligned}
 g_1 &= \prod_{k=1}^d (x - \alpha^k) \\
 g_j &= g_1 (x \alpha^{-s_j})
 \end{aligned}$$

其中, d 满足约束条件:

$$d_f = L = vd, L = v[1 + \max(\deg \text{rec}(g_j))]$$

$$s_j = [(j-1)(q-1)/v], j = 2, 3, \dots, v$$

假设 G_v 的每个子矩阵 g_j 表示为 $g_j = [g_{j,1}, g_{j,2}, \dots, g_{j,v}]$, $g_{i,j} \in GF(q)$ 。

删除 G_v 的前 $(v-1)$ 列, 获得 G_v^1 , 然后对 G_v^1 进行截短并保留其前 n 列, 获得 $2 \times n$ 矩阵 G'_v 。在本文中, 令 $n = v + 1$, 则

$$G'_v = \begin{bmatrix} g_{1,v} & g_{2,1} & g_{2,2} & \cdots & g_{2,v} \\ 0 & g_{1,v} & g_{2,1} & \cdots & g_{2,v-1} \end{bmatrix}_{2 \times n} \tag{10}$$

由式(10)可看出, G'_v 是一个输入信息位数为 2, 码长为 n , 最小距离为 $(n-1)$ 的 $(n, 2, n-1)$ 的 MDS 码生成矩阵。用二输入信息序列对式(10)编码, 可获得 q^2 个码长为 n 的 MDS 码字, 根据 4.2 节所介绍的构造算法, 可由产生的 MDS 码字获得时不变 LDPC 卷积码的基矩阵 W^F , 进而获得 $H^F(D)$ 。

5 数值结果

本节用 4.3 节的方法构造生成 LDPC 卷积码及其对应的 QC-LDPC 分组码并进行性能仿真。用符号 (m_s, m, n) 表示码率为 $(n-m)/n$ 的 LDPC 卷积码, m_s -校验模型记忆, m -多项式矩阵行数, n -多项式矩阵列数。用符号 (N, M) 表示 QC-LDPC 分组码, N -变量节点数, M -校验节点数。为了进行性能比较, 本文假设 LDPC 卷积码和 QC-LDPC 分组码的译码算法具有相同的处理器复杂度, 即, 分组码的分组长度 N 和卷积码的约束长度 v_s 相同: $N = v_s = (m_s + 1)n$ 。仿真在 AWGN 信道下进行,

最大迭代次数为 50, 采用文献[1]介绍的 BP 译码算法对 LDPC 卷积码及其相应的 QC-LDPC 分组码进行仿真。

图 1 给出在有限域 $GF(2^4)$, $GF(2^5)$, $GF(2^6)$ 和 $GF(2^7)$ 上 LDPC 卷积码的性能结果。图 1 中所有用于比较的 LDPC 卷积码的性能(虚线表示)都是从相关文献中复制而成。由图中可以看出, 本文算法构造的码率 $R = 3/6$, 记忆 $m_s = 126$, 约束长度 $v_s = 378$ 的(62,3,6)LDPC 卷积码的误比特率(Bit Error Rate, BER)性能比 $R = 2/5, v_s = 2105$ 的(389,3,5)时不变 LDPC 卷积码(文献[10]图 12)好约 0.3 dB, 本文算法构造的码率 $R = 3/6$, 约束长度 $v_s = 762$ 的(126,3,6) LDPC 卷积码的 BER 性能比 $R = 2/5, v_s = 1050$ 的具有快速编码特性的(209,3,5)时不变 LDPC 卷积码(文献[13]图 1)好约 0.2 dB, 本文算法构造的码率 $R = 3/6$, 约束长度 $v_s = 90$ 的(14,3,6) LDPC 卷积码的 BER 性能比 $R=2/5, v_s=145$ 的(28, 3,5)时不变 LDPC 卷积码(文献[12]图 7)好约 0.8 dB。由此可知, 与其它时不变 LDPC 卷积码相比, 在更高的码率, 更小的约束长度下, 本文所构造的码译码性能却更好, 从图 1 也可看出其错误平台更低。

图 2 给出了有限域 $GF(49)$ 和 $GF(241)$ 上, 基矩阵均为 3 行 6 列的时不变 LDPC 卷积码及其对应的 QC-LDPC 分组码的性能。图 2 表明 LDPC 卷积码比相应的 QC-LDPC 分组码具有更好的译码增益, 原因之一是在同样码率和约束长度下, LDPC 卷积码具有更好的 girth(最小环长)特性^[10](表 1 给出了相应码的 girth 及其计数结果)。图 2 中, QC-LDPC

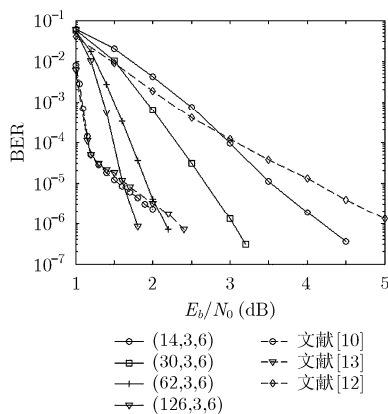


图 1 有限域 $GF(2^4)$, $GF(2^5)$, $GF(2^6)$ 和 $GF(2^7)$ 上的 LDPC 卷积码性能

参考文献

[1] FELTSTROM A and ZIGANGIROV K. Time-varying periodic convolutional codes with low-density parity-check

表 1 码率 3/6 LDPC 卷积码及其对应的 QC-LDPC 码环数

约束长度	分组长度	
	LDPC 卷积码最小环长/最小环数	LDPC 分组码最小环长/最小环数
90	6/12	6/135
186	6/19	6/186
378	6/1	6/126
762	6/121	6/127
288	6/43	6/240
1440	8/181	8/2160

分组码在 BER 为 1×10^{-6} 时仍无误码平台, 性能良好。大量仿真结果表明, 本文算法在中等码率下具有较好的性能。

6 结束语

本文由 QC-LDPC 分组码获得 LDPC 卷积码的方法提出了用有限域上的元素构造时不变 LDPC 卷积码的新方法, 并确保所获得的码具有快速编码特性、最大可达编码记忆以及设计码率。本文以码率为 $1/v$ 的 MDS 卷积码为例, 给出了具体的构造方法及其仿真结果。在 AWGN 信道下的仿真结果表明, 与具有类似结构的码相比, 该构造方法所获得的 LDPC 卷积码在小的约束长度下就具有较低的误码平台和良好的译码性能。该码可用移位寄存器实现的快速编码算法以及可用滑动窗口译码器实现的 BP 译码算法使其适合于硬件实现。

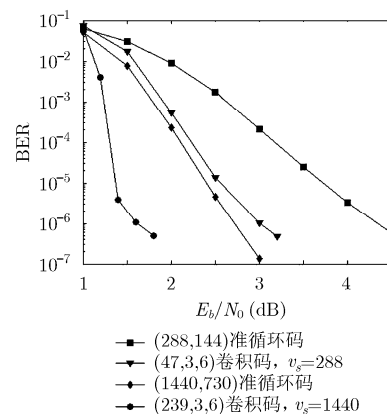


图 2 QC-LDPC 分组码与 LDPC 卷积码的 BER 性能

matrix[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1999, 45(6): 2181-2191.

[2] BOCHAROVA I, KUDRYASHOV B, and JOHANNESSEN R. Searching for binary and nonbinary block and

- convolutional LDPC codes[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2016, 62(1): 163-183.
- [3] ZHAO Yue and LAU F. Implementation of decoders for LDPC block codes and LDPC convolutional codes based on GPUs[J]. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 2015, 25(3): 663-672.
- [4] ZHOU Hua and GOERTZ N. Recoverability of variable nodes in periodically punctured LDPC convolutional code[J]. *IEEE Communications Letters*, 2015, 19(4): 521-524.
- [5] BALDI M, CANCELLIERI G, and CHIARALUCE F. Array convolutional low-density parity-check codes[J]. *IEEE Communications Letters*, 2014, 18(2): 336-339.
- [6] GIOULEKAS F, PETROU C, VGENIS A, *et al.* On the construction of LDPC convolutional code ensembles based on permuted circulant unit matrices[C]. IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems, Marseille, 2014: 407-410.
- [7] JUNHO C and SCHMALEN L. Construction of protographs for large-girth structured LDPC convolutional codes[C]. IEEE International Conference on Communications, London, 2015: 4412-4417.
- [8] SRIDHARAN A and COSTELLO D. A new construction for low density parity check convolutional codes[C]. Proceedings of the IEEE Information Theory Workshop, Bangalore, India, 2002: 212.
- [9] ZHOU Hua and GOERTZ N. Girth analysis of polynomial-based time-invariant LDPC convolutional codes[C]. International Conference on Systems, Signals and Image Processing, Vienna, 2012: 104-108.
- [10] TANNER R, SRIDHARA D, SRIDHARAN A, *et al.* LDPC block and convolutional codes based on circulant matrices[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2004, 50(12): 2966-2984.
- [11] ESMAEILI M and GHOLAMI M. Geometrically-structured maximum-girth LDPC block and convolutional codes[J]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2009, 27(6): 831-845.
- [12] PUSANE A, SMARANDACHE R, VONTOBEL P, *et al.* Deriving good LDPC convolutional codes from LDPC block codes[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 16(6): 897-900.
- [13] MU Liwei, LIU Xingcheng, and LIANG Chulong. Construction of binary LDPC convolutional codes based on finite fields[J]. *IEEE Communications Letters*, 2012, 16(6): 897-900.
- [14] CHEN Chao, BAI Baoming, and WANG Xingmei. Construction of quasi-cyclic LDPC codes based on a two-dimensional MDS code[J]. *IEEE Communications Letters*, 2010, 14(5): 447-449.
- [15] JUSTESEN J. An algebraic construction of rate $1/v$ convolutional codes[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1975, 21(5): 577-580.
- 穆丽伟：女，1980年生，博士，讲师，研究方向为无线通信、信道编码。
- 刘星成：男，1968年生，教授，博士生导师，研究方向为无线通信、信道编码。
- 张涵：男，1981年生，教授，硕士生导师，研究方向为信号处理、无线通信。