

基于二进制序列族的压缩感知测量矩阵构造

芦存博* 肖嵩 权磊

(西安电子科技大学 ISN 国家重点实验室 西安 710071)

摘要: 构造确定性测量矩阵对压缩感知理论的推广与应用具有重要的意义。该文源于代数编码理论, 提出一种基于二进制序列族的确定性测量矩阵构造算法。相关性是描述矩阵性质的重要准则, 减小相关性可使重建性能提高。该文推导出所构造测量矩阵的相关性小于同条件下的高斯随机矩阵和伯努利随机矩阵。理论分析和仿真实验表明, 该方式构造的测量矩阵的重建性能优于同条件下的高斯随机矩阵和伯努利随机矩阵; 所构造矩阵可由线性反馈移位寄存器结构实现, 易于硬件实现, 有利于压缩感知理论的实用化。

关键词: 信号处理; 压缩感知; 测量矩阵; 二进制序列族

中图分类号: TN911.72

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2016)07-1682-07

DOI: 10.11999/JEIT151076

Construction of Compressed Sensing Measurement Matrix Based on Binary Sequence Family

LU Cunbo XIAO Song QUAN Lei

(National ISN Key Laboratory, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract: It is significant to construct deterministic measurement matrix for the promotion and application of the Compressed Sensing (CS) theory. Originating from the algebraic coding theory, a construction algorithm of Binary Sequence Family (BSF) based deterministic measurement matrix is presented. The coherence is an important criterion to describe the property of matrices. Lower coherence leads to higher reconstruction performance. The coherence of the proposed measurement matrix is derived to be smaller than the corresponding Gaussian random matrix and Bernoulli random matrix. Theoretical analysis and simulation results show that the proposed matrix can obtain better reconstruction results than the corresponding Gaussian random matrix and Bernoulli random matrix. The proposed matrix can make the hardware realization convenient and easy by means of Linear Feedback Shift Register (LFSR) structures, thus being conducive to practical compressed sensing.

Key words: Signal processing; Compressed Sensing (CS); Measurement matrix; Binary Sequence Family (BSF)

1 引言

压缩感知(Compressed Sensing, CS)^[1,2]的概念是2006年Donoho和Candes等人提出的, 它是一种不同于奈奎斯特(Nyquist)采样定律的全新信号采样框架。CS可实现以远低于Nyquist的采样率去采样稀疏信号, 其核心是利用测量矩阵将高维稀疏信号投影到一个低维空间上, 然后利用信号的稀疏性, 通过重建算法以高概率实现原始信号的精确重建。这种提高采样效率的新思路引起了学术界的广泛关

注, CS在数字信号处理、信息论、通信、光学成像、雷达等领域受到高度关注。

CS过程分为两部分: 数据采样和信号重建, 在这两部分中测量矩阵都起着至关重要的作用。首先, 在数据采样中, 好的测量矩阵可以以较少的测量数目达到相同的重构精度。其次, 在信号重建中, 在相同的采样率下得到的数据, 好的测量矩阵对信号可以达到较高的重构精度。总体来说, 好的测量矩阵能够在投影测量时保持原始信号的全部信息, 并可结合测量值重构出原始信号。测量矩阵的性质决定了能否将原始信号的全局信息保存下来。文献[3]提出了测量矩阵必须满足的性质-约束等距性(Restricted Isometry Property, RIP), 即只要测量矩阵满足RIP特性, 那么就能以高概率从低维的测量结果向量中准确地恢复出原信号。相关性(coherence)是建立矩阵RIP的另一个重要方法, 文

收稿日期: 2015-09-21; 改回日期: 2016-01-20; 网络出版: 2016-03-25

*通信作者: 芦存博 444180647@qq.com

基金项目: 国家自然科学基金(61372069), 高等学校学科创新引智计划(111计划)(B08038)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61372069), The Programme of Introducing Talents of Discipline to Universities (111 Project) (B08038)

献[4]指出了相关性跟 RIP 的关系：低相关性的矩阵满足 RIP。矩阵的 RIP^[5,6]和相关性^[7-13]均是分析测量矩阵性质的重要工具，本文将采用相关性对所构造测量矩阵的性质进行分析和说明。

测量矩阵可以分为随机测量矩阵和确定性测量矩阵。在随机矩阵中比较常用的是高斯矩阵和伯努利矩阵。由于随机矩阵能够以很大概率满足 RIP，因此在科研上被广泛应用。但是在随机矩阵中，每一个元素都是独立同分布的，存在不确定性，使得每一个元素都要存储，耗费大量的存储资源，并且随机数的产生对硬件要求很高，不利于硬件实现，使得其实际应用受限。确定性测量矩阵的元素和值都是确定的，可以克服这些不足。许多研究者利用一些技术来构造确定性测量矩阵。例如，文献[7]指出好的原模图低密度奇偶校验码(Low Density Parity Check, LDPC)校验矩阵可以作为测量矩阵；文献[8]采用 m 序列构造出性能较好的测量矩阵；文献[9]利用 Berlekamp-Justesen 码构造测量矩阵；文献[10]采用范德蒙矩阵构造出性能较好的测量矩阵；文献[11]用混沌序列构造测量矩阵；文献[13]用 Reed-Solomon 码构造测量矩阵等。

本文将在文献[14]中二进制序列族(Binary Sequence Family, BSF)的基础上构造一种确定性测量矩阵(Binary Sequence Family based Deterministic Measurement Matrix, BSFDMM)，它是一种由+1和-1组成的双极性矩阵，并推导出了矩阵 BSFDMM 的相关性小于同条件下的高斯随机矩阵和伯努利随机矩阵。理论分析和仿真实验表明，文中矩阵 BSFDMM 的重建性能优于同条件下的高斯随机矩阵和伯努利随机矩阵。

2 基本理论

2.1 压缩感知

设 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$ 是 k 稀疏信号(k 为信号非零值个数)，经过线性测量后得到观测信号 $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^M$ ($M \ll N$)，它们之间的关系可以表示为： $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ，其中矩阵 \mathbf{A} 为测量矩阵，大小为 $M \times N$ 。此过程即为 CS 的数据采样过程，这个过程是线性的。而信号的重建过程是非线性的，信号 \mathbf{x} 可通过式(1)的最小 0 范数优化问题精确重建：

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_0, \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1)$$

上述求解问题是 NP-hard。CS 理论证明了在适当的测量矩阵 \mathbf{A} 下，该问题可以转化为求解最小 1 范数优化问题，即

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1, \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2)$$

该问题可以通过基追踪(Basis Pursuit, BP)算法^[15]，

得到与式(1)等价的最稀疏估计 \mathbf{x} 。目前，有一些直接求解式(1)的贪婪追踪类算法，该类算法通过迭代求解局部最优解，最终逼近全局最优，从而得到原始信号的精确估计。例如，正交匹配追踪(Orthogonal Matching Pursuit, OMP)^[16]。

定义 1 设 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N$ 作为列向量组成矩阵 \mathbf{A} ，则矩阵 \mathbf{A} 的相关性 $\mu(\mathbf{A})$ 定义如下：

$$\mu(\mathbf{A}) = \max_{1 \leq i \neq j \leq N} \frac{|\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle|}{\|\mathbf{a}_i\|_2 \cdot \|\mathbf{a}_j\|_2}$$

其中， $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle = \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_j$ ，表示向量内积。

由文献[17]可得：若 k 满足 $k < \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{\mu(\mathbf{A})} \right]$ ，则

任何 k 稀疏信号 \mathbf{x} 可以通过 BP 算法或者 OMP 算法从欠采样线性测量 $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ 中精确重建出来。可见，减小 $\mu(\mathbf{A})$ ，可重建信号的稀疏度 k 将增大，重建性能提高。因此，为了实现高准确率的重建原始信号，要求构造测量矩阵 \mathbf{A} 时使其相关性 $\mu(\mathbf{A})$ 尽可能减小。

2.2 迹函数

假设 β 为有限域 $\text{GF}(q)$ 的本原域元素，则 $\text{GF}(q)$ 所有域元素可由 0 和 β 的幂次生成，即： $0, \beta^0 = 1, \beta, \dots, \beta^{q-2}$ 。其中后 $q-1$ 个非零元素构成乘法群 $\text{GF}(q) \setminus \{0\}$ ，也可记作 $\text{GF}(q)^*$ 。为方便描述起见，也可将 $\text{GF}(q)$ 所有元素表示为 $\{0, 1, \dots, q-1\}$ 。

定义 2 设 n, m 是正整数，且 m 整除 n ，则从 $\text{GF}(2^n)$ 到 $\text{GF}(2^m)$ 的迹函数为

$$\text{Tr}_m^n(x) = x + x^{2^m} + \dots + x^{2^{m \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor}}, \quad x \in \text{GF}(2^n)$$

当 $m=1$ 时， $\text{GF}(2^m) = \text{GF}(2) = \{0, 1\}$ ，在本文中， $\text{Tr}_1^n(x)$ 简记为 $\text{Tr}(x)$ 。

3 测量矩阵构造

文中矩阵 BSFDMM 是由+1和-1所组成的双极性矩阵，大小固定为 $(2^n - 1) \times 2^{n+1}$ ($n \geq 5$)。在矩阵生成过程中，本文使用了文献[14]中产生 BSC 的迹表示函数，并设计一种数值转换函数将产生的二进制序列转换为双极性序列，这样就将文献[14]中产生的 BSC 转换为相应的双极性序列族，从得到的双极性序列族中选出一部分序列做为列向量就构成了本文中的测量矩阵。

本文矩阵 BSFDMM 的具体实现步骤如下：

步骤 1 根据信息长度 $N = 2^{n+1}$ ($n \geq 5$)，判断 n 为奇数还是偶数，当 n 为奇数时，令 $n = 2l + 1$ ，计算出 l ，选择式(3)所示的迹表示函数；当 n 为偶数时，令 $n = 2l$ ，计算出 l ，选择式(4)所示的迹表示函数；

$$f_{\lambda_0, \lambda_1}(x) = \text{Tr}(\lambda_0 x) + \text{Tr}(\lambda_1 x^3) + \sum_{i=2}^l \text{Tr}(x^{1+2^i}),$$

$$x \in \text{GF}(2^n)^*, \lambda_0, \lambda_1 \in \text{GF}(2^n) \quad (3)$$

$$f_{\lambda_0, \lambda_1}(x) = \text{Tr}(\lambda_0 x) + \text{Tr}(\lambda_1 x^3) + \sum_{i=2}^l \text{Tr}(x^{1+2^i}) + \text{Tr}_1^l(x^{1+2^l}),$$

$$x \in \text{GF}(2^n)^*, \lambda_0, \lambda_1 \in \text{GF}(2^n) \quad (4)$$

$$c_t^{\lambda_0, \lambda_1} = \begin{cases} 1, & b_t^{\lambda_0, \lambda_1} = 0 \\ -1, & b_t^{\lambda_0, \lambda_1} = 1 \end{cases},$$

$$t = \{0, 1, \dots, 2^n - 2\}, \lambda_0, \lambda_1 \in \text{GF}(2^n) \quad (5)$$

步骤 2 选取 $\text{GF}(2^n)$ 上的本原域元素 β , 令 $b_t^{\lambda_0, \lambda_1} = f_{\lambda_0, \lambda_1}(\beta^t)$, 此时 $t \in \{0, 1, \dots, 2^n - 2\}$, $\lambda_0, \lambda_1 \in \text{GF}(2^n)$ 。令 $\mathbf{b}^{\lambda_0, \lambda_1} = \{b_0^{\lambda_0, \lambda_1}, b_1^{\lambda_0, \lambda_1}, \dots, b_{2^n-2}^{\lambda_0, \lambda_1}\}$, 则 $\mathbf{b}^{\lambda_0, \lambda_1}$ 是周期为 $2^n - 1$ 的二进制序列。在参数 (λ_0, λ_1) 取值固定的情况下, 对 $t = 0, 1, \dots, 2^n - 2$, 由式(3)或式(4)可得到二进制序列 $\mathbf{b}^{\lambda_0, \lambda_1} = \{b_0^{\lambda_0, \lambda_1}, b_1^{\lambda_0, \lambda_1}, \dots, b_{2^n-2}^{\lambda_0, \lambda_1}\}$, 将此二进制序列通过式(5)进行数值转换, 得到双极性序列 $\mathbf{c}^{\lambda_0, \lambda_1} = \{c_0^{\lambda_0, \lambda_1}, c_1^{\lambda_0, \lambda_1}, \dots, c_{2^n-2}^{\lambda_0, \lambda_1}\}$, 对参数 (λ_0, λ_1) 在有限域 $\text{GF}(2^n)$ 中迭代取值, 可得到大小为 2^{2n} 的双极性序列族 $\{\mathbf{c}^{0,0}, \mathbf{c}^{0,1}, \dots, \mathbf{c}^{0,2^n-1}, \mathbf{c}^{1,0}, \mathbf{c}^{1,1}, \dots, \mathbf{c}^{1,2^n-1}, \mathbf{c}^{2,0}, \dots, \mathbf{c}^{2^n-1, 2^n-1}\}$;

步骤 3 从上述得到的 2^{2n} 个双极性序列 $\mathbf{c}^{0,0}, \mathbf{c}^{0,1}, \dots, \mathbf{c}^{0,2^n-1}, \mathbf{c}^{1,0}, \mathbf{c}^{1,1}, \dots, \mathbf{c}^{1,2^n-1}, \mathbf{c}^{2,0}, \mathbf{c}^{2,1}, \dots, \mathbf{c}^{2^n-1, 2^n-1}$ 中选出前 2^{n+1} 个序列作为列向量进行如式(6)所示的排列, 进而可以构造大小为 $(2^n - 1) \times 2^{n+1}$ 的双极性矩阵 \mathbf{A} 。

$$\mathbf{A} = [\mathbf{c}^{0,0}, \mathbf{c}^{0,1}, \dots, \mathbf{c}^{0,2^n-1}, \mathbf{c}^{1,0}, \mathbf{c}^{1,1}, \dots, \mathbf{c}^{1,2^n-1}] \quad (6)$$

从上述构造过程可以看出: BSFDMM 矩阵采样率为 $(2^n - 1)/2^{n+1} \approx 2^n/2^{n+1} = 0.5$; BSFDMM 矩阵各列即为不同参数 (λ_0, λ_1) 下的双极性序列, 周期为 $2^n - 1$, 这个双极性序列是由二进制序列族迹表示函数式(3)或式(4)在参数 (λ_0, λ_1) 下的二进制序列进行数值转换函数式(5)映射后得到的, 由此可见, BSFDMM 矩阵是在二进制序列族的基础上构造的, 其构造过程中使用了二进制序列族的方法。

一旦给定数值转换函数式(5)和有限域上的迹表示函数式(3)或式(4), 则能确定出所构造矩阵的每一个元素值, 避免了随机矩阵的不确定性; BSFDMM 矩阵的 $\{-1, 1\}$ 元素结构使其非常便于硬件实现, 数值转换函数式(5)的本质是元素替换, 在硬件实现上只用改变相应元素的输出即可, 非常简单; 又因为矩阵 BSFDMM 的生成过程中, 使用的是文献[14]的迹表示函数, 从文献[14]可得,

BSFDMM 矩阵可由 LFSR 结构实现, 易于硬件实现, 有利于压缩感知理论的实用化。

4 相关性分析

相关性是描述矩阵性质的重要准则, 减小相关性可使重建性能提高。本节给出所构造矩阵 BSFDMM 的相关性大小的上界, 并推导出矩阵 BSFDMM 的相关性小于同条件下的高斯随机矩阵和伯努利随机矩阵, 进而可从理论上证明矩阵 BSFDMM 的重建性能优于同条件下的高斯随机矩阵和伯努利随机矩阵。

假设本文所构造矩阵 BSFDMM 为矩阵 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N] \in \mathbf{R}^{M \times N}$, 其中 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N$ 为矩阵 \mathbf{A} 的列向量, $M = 2^n - 1, N = 2^{n+1}$, 由于矩阵 $\mathbf{A} = [\mathbf{c}^{0,0}, \mathbf{c}^{0,1}, \dots, \mathbf{c}^{0,2^n-1}, \mathbf{c}^{1,0}, \mathbf{c}^{1,1}, \dots, \mathbf{c}^{1,2^n-1}]$ 的列向量是由双极性序列族 $\mathbf{c}^{0,0}, \mathbf{c}^{0,1}, \dots, \mathbf{c}^{0,2^n-1}, \mathbf{c}^{1,0}, \mathbf{c}^{1,1}, \dots, \mathbf{c}^{1,2^n-1}, \mathbf{c}^{2,0}, \dots, \mathbf{c}^{2^n-1, 2^n-1}$ 的一部分序列构成, 所以

$$\mu(\mathbf{A}) = \max_{1 \leq i \neq j \leq N} \frac{|\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle|}{\|\mathbf{a}_i\|_2 \cdot \|\mathbf{a}_j\|_2} \leq \max_{\substack{0 \leq i, j, k, l \leq 2^n - 1 \\ (i, j) \neq (k, l)}} \frac{|\langle \mathbf{c}^{i, j}, \mathbf{c}^{k, l} \rangle|}{\|\mathbf{c}^{i, j}\|_2 \cdot \|\mathbf{c}^{k, l}\|_2} \quad (7)$$

由于序列 $\mathbf{c}^{i, j}$ 和 $\mathbf{c}^{k, l}$ 是由 +1 和 -1 组成的双极性序列, 则有

$$\|\mathbf{c}^{i, j}\|_2 = \|\mathbf{c}^{k, l}\|_2 = \left[\sum_{t=0}^{2^n-2} (c_t^{i, j})^2 \right]^{1/2} = \left[\sum_{t=0}^{2^n-2} (c_t^{k, l})^2 \right]^{1/2}$$

$$= (2^n - 1)^{1/2} \quad (8)$$

对于 $b_t^{i, j}$ 和 $b_t^{k, l}$, 由式(3)和式(4)可得, 存在 $m, n \in \text{GF}(2^n)$, 使得 $b_t^{m, n} = b_t^{i, j} + b_t^{k, l}$ 。此时对于数值转化后的 $c_t^{i, j}$ 和 $c_t^{k, l}$, 由式(5)可得 $c_t^{m, n} = c_t^{i, j} \cdot c_t^{k, l}$ 。对于序列 $\mathbf{b}^{m, n} = \{b_0^{m, n}, b_1^{m, n}, \dots, b_{2^n-2}^{m, n}\}$ 和其数值转换后的序列 $\mathbf{c}^{m, n} = \{c_0^{m, n}, c_1^{m, n}, \dots, c_{2^n-2}^{m, n}\}$, 由式(5)可以得到 $\sum_{t=0}^{2^n-2} c_t^{m, n} = \sum_{t=0}^{2^n-2} (-1)^{b_t^{m, n}}$, 所以可得

$$\langle \mathbf{c}^{i, j}, \mathbf{c}^{k, l} \rangle = \sum_{t=0}^{2^n-2} c_t^{i, j} c_t^{k, l} = \sum_{t=0}^{2^n-2} c_t^{m, n} = \sum_{t=0}^{2^n-2} (-1)^{b_t^{m, n}}$$

$$= \sum_{x \in \text{GF}(2^n)^*} (-1)^{f_{m, n}(x)} = -1 + \sum_{x \in \text{GF}(2^n)} (-1)^{f_{m, n}(x)} \quad (9)$$

在文献[14]中, 两个周期为 v 的二进制序列 $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{v-1})$ 和 $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{v-1})$, 其相关性定义为: $C_{a, b}(\tau) = \sum_{i=0}^{v-1} (-1)^{a_i + b_{i+\tau}}, 0 \leq \tau \leq v-1$, 并且存在 $\text{GF}(2^n)$ 上的本原域元素 β 的迹表示函数 $f(x)$, 使得 $C_{a, b}(\tau) = \sum_{i=0}^{v-1} (-1)^{a_i + b_{i+\tau}} = -1 + \sum_{x \in \text{GF}(2^n)} (-1)^{f(x)}$, 这个形式和式(9)的形式一致。因为在矩阵 BSFDMM 的生成过程中, 使用的是文献[14]的迹表

示函数，所以式(9)以后的推导过程与文献[14]类似，所以由文献[14]可得当 n 为奇数时，

$$\max_{\substack{0 \leq i, j, k, l \leq 2^n - 1 \\ (i, j) \neq (k, l)}} \left| \langle \mathbf{c}^{i, j}, \mathbf{c}^{k, l} \rangle \right| = 1 + 2^{(n+3)/2}; \text{ 当 } n \text{ 为偶数时,}$$

$$\max_{\substack{0 \leq i, j, k, l \leq 2^n - 1 \\ (i, j) \neq (k, l)}} \left| \langle \mathbf{c}^{i, j}, \mathbf{c}^{k, l} \rangle \right| = 1 + 2^{(n/2)+2}。把上述情况和式$$

(8)代入式(7)，可以得到以下结论。

结论 1 对于大小为 $(2^n - 1) \times 2^{n+1}$ ($n \geq 5$) 的 BSFDMM 矩阵 \mathbf{A} ，当 n 为奇数时， $\mu(\mathbf{A}) \leq \frac{1 + 2^{(n+3)/2}}{2^n - 1}$ ；当 n 为偶数时， $\mu(\mathbf{A}) \leq \frac{1 + 2^{(n/2)+2}}{2^n - 1}$ 。

为了比较本文中的 BSFDMM 和同条件下的高斯随机矩阵和伯努利随机矩阵的重建性能，可以比较它们的相关性大小。首先引入以下文献[18]的两个引理：

引理 1 令 $\{x_i\}_{i=1}^p$ 和 $\{y_i\}_{i=1}^p$ 均为独立同分布的零均值高斯随机变量序列，其方差都为 σ^2 ，则

$$\Pr \left(\left| \sum_{i=1}^p x_i y_i \right| \geq t \right) \leq 2 \exp \left(- \frac{t^2}{4\sigma^2(p\sigma^2 + t/2)} \right) \quad (10)$$

引理 2 令 $\{x_i\}_{i=1}^p$ 和 $\{y_i\}_{i=1}^p$ 均为独立同分布的零均值有界随机变量序列，满足 $|x_i| \leq a$ 和 $|x_i y_i| \leq a^2$ ，则

$$\Pr \left(\left| \sum_{i=1}^p x_i y_i \right| \geq t \right) \leq 2 \exp \left(- \frac{t^2}{2pa^4} \right) \quad (11)$$

定理 1 对于大小为 $(2^n - 1) \times 2^{n+1}$ ($n \geq 5$) 的 BSFDMM 矩阵 \mathbf{A} ，其相关性 $\mu(\mathbf{A})$ 小于同条件下的高斯随机矩阵 \mathbf{B} 。

证明 设矩阵 $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{2^n-1}] \in \mathbf{R}^{(2^n-1) \times 2^{n+1}}$ ，其中 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{2^n-1}$ 为矩阵 \mathbf{B} 的列向量。

不失一般性，选取 n 为奇数时的情况，令 $\{x_i\}_{i=1}^{2^n-1}$ 和 $\{y_i\}_{i=1}^{2^n-1}$ 为高斯矩阵 \mathbf{B} 的任意两列，在式(10)中令 $p = 2^n - 1$ ， $t = \frac{1 + 2^{(n+3)/2}}{2^n - 1}$ ， $\sigma^2 = 1$ ，可得

$$\Pr \left(\left| \sum_{i=1}^{2^n-1} x_i y_i \right| \geq \frac{1 + 2^{(n+3)/2}}{2^n - 1} \right) \leq 2 \exp \left\{ - \frac{(1 + 2^{(n+3)/2})^2}{4(2^n - 1)^3 + 2(2^n - 1)(1 + 2^{(n+3)/2})} \right\}$$

令 $z(n) = \frac{(1 + 2^{(n+3)/2})^2}{4(2^n - 1)^3 + 2(2^n - 1)(1 + 2^{(n+3)/2})}$ ，很容易的得知 $z(n)$ 随着 n 的增大而减小，所以可得

$$z(n) \leq z(5) = 0.0024, \text{ 进一步推导可得 } \Pr \left(\left| \sum_{i=1}^{2^n-1} x_i y_i \right| \geq \frac{1 + 2^{(n+3)/2}}{2^n - 1} \right) \leq 2 \exp \{-z(5)\} = 1.995, \text{ 由此可知}$$

$$\left| \sum_{i=1}^{2^n-1} x_i y_i \right| \geq \frac{1 + 2^{(n+3)/2}}{2^n - 1} \text{ 以概率 1 成立。对于矩阵 } \mathbf{B},$$

$$\left| \sum_{i=1}^{2^n-1} x_i y_i \right| \text{ 可以表征它的相关性 } \mu(\mathbf{B}), \text{ 又因为}$$

$\{x_i\}_{i=1}^{2^n-1}$ 和 $\{y_i\}_{i=1}^{2^n-1}$ 选取的任意性，从相关性的定义可知

$$\mu(\mathbf{B}) > \left| \sum_{i=1}^{2^n-1} x_i y_i \right|, \text{ 又因为 } \frac{1 + 2^{(n+3)/2}}{2^n - 1} \geq \mu(\mathbf{A}),$$

所以可得 $\mu(\mathbf{B}) > \mu(\mathbf{A})$ ；当 n 是偶数时，可以得到类似的结论，由此可知定理 1 成立。

定理 2 对于大小为 $(2^n - 1) \times 2^{n+1}$ ($n \geq 5$) 的 BSFDMM 矩阵 \mathbf{A} ，其相关性 $\mu(\mathbf{A})$ 小于同条件下的伯努利随机矩阵 \mathbf{D} ，其中 \mathbf{D} 的元素由 +1 和 -1 组成。

证明 设矩阵 $\mathbf{D} = [\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_{2^n-1}] \in \mathbf{R}^{(2^n-1) \times 2^{n+1}}$ ，其中 $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_{2^n-1}$ 为矩阵 \mathbf{D} 的列向量。

不失一般性，选取 n 为奇数时的情况，令 $\{x_i\}_{i=1}^{2^n-1}$ 和 $\{y_i\}_{i=1}^{2^n-1}$ 为伯努利矩阵 \mathbf{D} 的任意两列，在式(11)中令 $p = 2^n - 1$ ， $t = \frac{1 + 2^{(n+3)/2}}{2^n - 1}$ ， $a = 1$ ，可得

$$\Pr \left(\left| \sum_{i=1}^{2^n-1} x_i y_i \right| \geq \frac{1 + 2^{(n+3)/2}}{2^n - 1} \right) \leq 2 \exp \left\{ - \frac{(1 + 2^{(n+3)/2})^2}{2(2^n - 1)^3} \right\}$$

令 $z(n) = \frac{(1 + 2^{(n+3)/2})^2}{2(2^n - 1)^3}$ ，很容易的得知 $z(n)$ 随着 n 的增大而减小，所以可得 $z(n) \leq z(5) = 0.0049$ ，

进一步推导可得 $\Pr \left(\left| \sum_{i=1}^{2^n-1} x_i y_i \right| \geq \frac{1 + 2^{(n+3)/2}}{2^n - 1} \right) \leq 2 \exp \{-z(5)\} = 1.99$ ，由此可知

$$\left| \sum_{i=1}^{2^n-1} x_i y_i \right| \geq \frac{1 + 2^{(n+3)/2}}{2^n - 1}$$

以概率 1 成立。对于矩阵 \mathbf{D} ， $\left| \sum_{i=1}^{2^n-1} x_i y_i \right|$ 可以表征它的相关性 $\mu(\mathbf{D})$ ，又因为 $\{x_i\}_{i=1}^{2^n-1}$ 和 $\{y_i\}_{i=1}^{2^n-1}$ 选取的任意性，从相关性的定义可知 $\mu(\mathbf{D}) > \left| \sum_{i=1}^{2^n-1} x_i y_i \right|$ ，

又因为 $\frac{1 + 2^{(n+3)/2}}{2^n - 1} \geq \mu(\mathbf{A})$ ，所以可得 $\mu(\mathbf{D}) > \mu(\mathbf{A})$ ；

当 n 是偶数时，可以得到类似的结论，由此可知定理 2 成立。

减小相关性能使可重建信号的稀疏度增大，重建性能提高。由定理 1 和定理 2 可以得到以下结论：

结论 2 矩阵 BSFDMM 的重建性能优于同条件下的高斯随机矩阵。

结论 3 矩阵 BSFDMM 的重建性能优于同条件下的伯努利随机矩阵。

5 实验仿真及分析

比较了本文矩阵 BSFDMM 与相同大小的高斯随机测量矩阵 Gauss 和伯努利随机测量矩阵 Bernoulli 在无噪声条件和有噪声条件下的重建性能,其中矩阵 BSFDMM 分为两种情况:(1) $n = 8$ 对应于 n 是偶数的情况,此时矩阵大小为 255×512 ; (2) $n = 7$ 对应于 n 是奇数的情况,此时矩阵大小为 127×256 。通过随机选取支撑位置,且支撑值服从标准的高斯分布,来生成被采样的 k 稀疏信号 \mathbf{x} ,其长度为 2^{n+1} 。对每个稀疏度 k ,用 MATLAB 生成 1000 次,重构算法选取 OMP 算法,若重建结果 \mathbf{x}_R 满足 $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_R\|_2 < 10^{-6}$,则重建实验成功,重建概率即为精确重建次数与总次数的比值。Gauss 矩阵的每一个元素取值服从独立同分布的标准正态分布。Bernoulli 矩阵的每一个元素取值服从独立同分布的贝努利分布,且元素由 +1 和 -1 组成。

5.1 无噪声重建

实验 1 分别取 $n = 8$ 和 $n = 7$,生成大小为 255×512 和 127×256 的测量矩阵,对大小为 255×512 的测量矩阵,稀疏度 $k = 30 \sim 150$,不同稀疏度下的重建概率对比曲线如图 1(a)所示。对大小为 127×256 的测量矩阵,稀疏度 $k = 10 \sim 80$,不同稀疏度下的重建概率对比曲线如图 2(a)所示。

由图 1(a)的重建曲线可以看出,对于矩阵 BSFDMM,当信号稀疏度达到 60 时,才开始出现重建失败的情况。然而,相同大小的 Gauss 矩阵和 Bernoulli 矩阵在稀疏度分别为 35 和 30 时,就已经开始出现重建失败的情况。当信号稀疏度分别增大到 130 和 125 时,Gauss 矩阵和 Bernoulli 矩阵就完全不能重建出原始信号。而矩阵 BSFDMM 在信号稀疏度增大到 145 时,依然有重建的可能。

从图 2(a)的重建曲线可以看出,对于矩阵 BSFDMM,当信号稀疏度达到 30 时,才开始出现重建失败的情况。然而,相同大小的 Gauss 矩阵和

Bernoulli 矩阵在稀疏度都为 15 时,就已经开始出现重建失败的情况。当信号稀疏度增大到 70 时,Gauss 矩阵和 Bernoulli 矩阵两者都完全不能重建出原始信号。而矩阵 BSFDMM 在信号稀疏度增大到 80 时,依然有重建的可能。

从图 1(a)和图 2(a)的边界条件分析可见,矩阵 BSFDMM 的信号恢复效果比相同大小的 Gauss 矩阵和 Bernoulli 矩阵效果好,这是因为矩阵 BSFDMM 的相关性小于相同大小的 Gauss 矩阵和 Bernoulli 矩阵,可重建信号的稀疏度增大,重建性能提高。

5.2 有噪声重建

实验 2 选取信噪比为 30 dB 的被采样信号,对大小为 255×512 的测量矩阵,稀疏度 $k = 30 \sim 150$,不同稀疏度下的输出信噪比对比曲线如图 1(b)所示;对大小为 127×256 的测量矩阵,稀疏度 $k = 10 \sim 80$,不同稀疏度下的输出信噪比对比曲线如图 2(b)所示。

从图 1(b)和图 2(b)可以看出,矩阵 BSFDMM 的信号恢复效果比相同大小的 Gauss 矩阵和 Bernoulli 矩阵效果好,这是因为矩阵 BSFDMM 的相关性小于后两者,更有利于信号重构。

实验 3 在不同噪声条件下,对大小为 255×512 的测量矩阵,选取稀疏度为 70 的被采样信号,所得输出信噪比对比曲线如图 1(c)所示;对大小为 127×256 的测量矩阵,选取稀疏度为 35 的被采样信号,所得输出信噪比对比曲线如图 2(c)所示。

从图 1(c)和图 2(c)可知,在不同输入噪声条件下,采用本文所构造的 BSFDMM 矩阵,进行重建后的输出信噪比比采用高斯随机测量矩阵和伯努利随机测量矩阵的都要高。随着输入信噪比的增加,3 种矩阵的输出信噪比都随之增加。在图 1(c)中,当输入信噪比小于 40 dB 时,由于噪声的影响,3 种矩阵的输出信噪比曲线整体区分并不是非常明显,

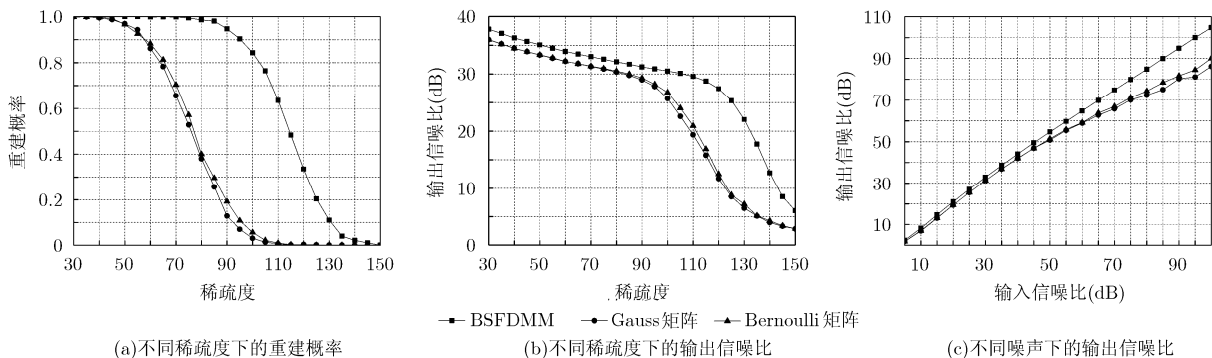
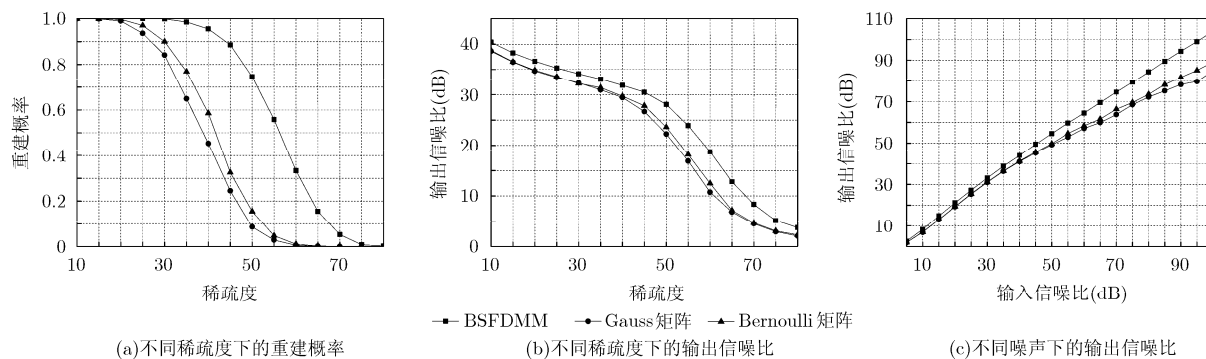


图 1 BSFDMM 大小为 255×512 的情况

图2 BSFDMM 大小为 127×256 的情况

而从输入信噪比大于 40 dB 开始, 3 种矩阵的输出信噪比曲线区分开始明显, 此时 BSFDMM 矩阵相关性小的优势开始明显体现。随着输入信噪比的增加, BSFDMM 矩阵的输出信噪比曲线与其它两种矩阵的曲线的区分越来越明显。从图 2(c)中也可以得到 3 种矩阵输出信噪比曲线类似的规律。

通过上述仿真发现, BSFDMM 矩阵比相同条件下的高斯随机矩阵和伯努利随机矩阵的抗噪声性能都要好, 说明本文矩阵不仅在无噪声条件下表现良好, 在噪声环境中同样具有良好的重建性能, 即表明文中所提矩阵的实用性。

6 结论

在二进制序列族的基础上, 本文构造了一种确定性测量矩阵- BSFDMM, 它是一种由+1 和-1 组成的双极性矩阵, 并通过理论推导, 得到所构造矩阵的相关性小于同条件下的高斯随机矩阵和伯努利随机矩阵。理论分析和仿真实验表明, 在相同条件下, BSFDMM 矩阵不仅在无噪声条件下的重建性能优于高斯随机矩阵和伯努利随机矩阵, 而且在噪声环境下其抗噪声性能也比高斯矩阵和伯努利矩阵要好, 说明了文中矩阵的实用性。矩阵 BSFDMM 可由 LFSR 结构实现, 易于硬件实现, 有利于压缩感知理论的实用化。

参考文献

- [1] CANDLES E J, ROMBERG J, and TAO T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(2): 489-509. doi: 10.1109/TIT.2005.862083.
- [2] DONOHO D L. Compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289-1306. doi: 10.1109/TIT.2006.871582.
- [3] CANDLES E J and TAO T. Decoding by linear programming [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2005, 51(12): 4203-4215. doi: 10.1109/TIT.2005.858979.
- [4] BOURGAIN J, DILWORTH S, FORD K, *et al.* Explicit constructions of RIP matrices and related problems[J]. *Duke Mathematical Journal*, 2011, 159(1): 145-185. doi: 10.1215/00127094-1384809.
- [5] GAN H, LI Z, LI J, *et al.* Compressive sensing using chaotic sequence based on chebyshev map[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 78(4): 2429-2438. doi: 10.1007/s11071-014-1600-1.
- [6] CASTORENA J and CREUSERE C D. The restricted isometry property for banded random matrices[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(19): 5073-5084. doi: 10.1109/TSP.2014.2345350.
- [7] ZHANG J, HAN G, and FANG Y. Deterministic construction of compressed sensing matrices from protograph LDPC codes[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, 22(11): 1960-1964. doi: 10.1109/LSP.2015.2447934.
- [8] 党骅, 马林华, 田雨, 等. m 序列压缩感知测量矩阵构造[J]. 西安电子科技大学学报, 2015, 42(2): 186-192. doi: 10.3969/j.issn.1001-2400.2015.02.031.
- [9] DANG Kui, MA Linhua, TIAN Yu, *et al.* Construction of the compressive sensing measurement matrix based on m sequences[J]. *Journal of Xidian University*, 2015, 42(2): 186-192. doi: 10.3969/j.issn.1001-2400.2015.02.031.
- [10] 夏树涛, 刘璐, 刘鑫吉. 基于 Berlekamp-Justesen 码的压缩感知确定性测量矩阵的构造[J]. 电子与信息学报, 2015, 37(4): 763-769. doi: 10.11999/JEIT140875.
- XIA Shutao, LIU Lu, and LIU Xinji. Deterministic constructions of compressive sensing matrices based on berlekamp-justesen codes[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2015, 37(4): 763-769. doi: 10.11999/JEIT140875.
- 赵瑞珍, 王若乾, 张凤珍, 等. 分块的有序范德蒙矩阵作为压缩感知测量矩阵的研究[J]. 电子与信息学报, 2015, 37(6): 1317-1322. doi: 10.11999/JEIT140860.
- ZHAO Ruizhen, WANG Ruoqian, ZHANG Fengzhen, *et al.* Research on the blocked ordered vandermonde matrix used as measurement matrix for compressed sensing[J]. *Journal of*

- Electronics & Information Technology*, 2015, 37(6): 1317–1322. doi: 10.11999/JEIT140860.
- [11] ZENG L, ZHANG X, CHEN L, *et al.* Deterministic construction of toeplitzed structurally chaotic matrix for compressed sensing[J]. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2015, 34(3): 797–813. doi: 10.1007/s00034-014-9873-7.
- [12] LI S and GE G. Deterministic sensing matrices arising from near orthogonal systems[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2014, 60(4): 2291–2302. doi: 10.1109/TIT.2014.2303973.
- [13] MOHADES M M, MOHADES A, and TADAION A. A reed-solomon code based measurement matrix with small coherence[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2014, 21(7): 839–843. doi: 10.1109/LSP.2014.2314281.
- [14] YU N Y and GONG G. A new binary sequence family with low correlation and large size[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1624–1636. doi: 10.1109/TIT.2006.871062.
- [15] CHEN S S, DONOHO D L, and SAUNDERS M A. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1998, 20(1): 33–61. doi: 10.1137/S1064827596304010.
- [16] TROPP J. Greed is good: algorithmic results for sparse approximation[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2004, 50(10): 2231–2242. doi: 10.1109/TIT.2004.834793.
- [17] DONOHO D L and ELAD M. Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via l_1 minimization[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2003, 100(5): 2197–2202. doi: 10.1073/pnas.0437847100.
- [18] HAUPT J, BAJWA W U, RAZ G, *et al.* Toeplitz compressed sensing matrices with applications to sparse channel estimation[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, 56(11): 5862–5875. doi: 10.1109/TIT.2010.2070191.
- 芦存博: 男, 1989年生, 博士生, 研究方向为无线网络编码、压缩感知加密算法。
- 肖嵩: 女, 1977年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为网络编码、视频/图像联合信源信道编码。
- 权磊: 男, 1989年生, 博士生, 研究方向为无线传感器网络、压缩感知。