

## 基于正交压缩采样系统的脉冲雷达回波信号实时重构方法

张素玲 席峰 陈胜垚 刘中\*  
(南京理工大学电子工程系 南京 210094)

**摘要:** 正交压缩采样是低速获取带通模拟信号同相和正交分量的新型模信转换系统,可广泛应用于雷达、通信等电子系统。但是对于宽带或超宽带脉冲雷达,重构奈奎斯特率的全程回波信号需要大的存储空间和计算量,以致于难以实现实时重构。该文在对正交压缩采样系统特性进行分析的基础上,将测量矩阵近似成一种具有特殊带状结构的矩阵,然后采用分段滑动重构思想实现实时重构。仿真结果表明,在对测量矩阵进行合理近似的基础上,该文提出的重构方法可以极大地节省存储空间和计算时间,实现近似最优的重构性能。

**关键词:** 雷达信号处理;分段滑动重构;正交压缩采样;模拟信息转换

中图分类号: TN957.51

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2016)05-1064-08

DOI: 10.11999/JEIT150767

## A Real-time Reconstruction Scheme of Pulsed Radar Echoes with Quadrature Compressive Sampling

ZHANG Suling XI Feng CHEN Shengyao LIU Zhong

(Department of Electronic Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

**Abstract:** Quadrature Compressive Sampling (QuadCS) is an efficient Analog-to-Information Conversion (AIC) system to sample band-pass analog signals at sub-Nyquist rates. The QuadCS can be widely used in radar and communication systems to acquire sub-Nyquist samples of inphase and quadrature components. However, for wideband or ultra-wideband pulsed radars, it is often impractical to reconstruct Nyquist samples of full-range echoes in real-time because of huge storage and computational loads. Based on the characteristics of QuadCS system, an approximate scheme is proposed to transform the QuadCS measurement matrix into a matrix with a special banded structure. With the banded matrix, a segment-sliding reconstruction method is adopted to perform real-time reconstruction. Simulation results show that with a reasonable approximation of the measurement matrix, the proposed reconstruction scheme achieves nearly optimal reconstruction performance with a significant reduction of data storage and computational time.

**Key words:** Radar signal processing; Segment-sliding reconstruction; Quadrature compressive sampling; Analog-to-Information Conversion (AIC)

### 1 引言

模拟信息转换 (Analog-to-Information Conversion, AIC), 以压缩感知 (Compressed Sensing, CS)<sup>[1-3]</sup>为理论基础, 已成为实现稀疏模拟信号欠采样(或低速采样)的重要手段。与基于奈奎斯特采样理论的模拟数字转换 (Analog-to-Digital Conversion, ADC)不同, AIC以稀疏信号为采样对

象, 以信号信息率为准则, 通过随机线性投影获取稀疏信号的低速采样或测量; 同时, 当描述 AIC 的测量矩阵满足约束等距特性 (Restricted Isometry Property, RIP)<sup>[3]</sup>时, 可从低速测量中恢复采样对象的奈奎斯特采样。AIC 在宽带雷达、电子侦察等领域的应用<sup>[4-8]</sup>, 充分证明其在大带宽信号采集中的可行性和性能优势。根据随机投影实现方式, 人们提出了不同的 AIC 实现结构, 如随机解调 (Random Demodulation, RD)<sup>[9,10]</sup>、随机调制预积分 (Random Modulation Pre-Integrator, RMPI)<sup>[11]</sup>、Xampling<sup>[12]</sup>、正交压缩采样 (Quadrature Compressive Sampling, QuadCS)<sup>[13,14]</sup>等。其中, RD、RMPI 和 Xampling 以低通型信号为采样对象, 而 QuadCS 针对的是带通型信号, 并且可以有效地提取信号的基带同相 (Inphase, I) 和正交 (Quadrature, Q) 分量。

收稿日期: 2015-06-29; 改回日期: 2016-02-22; 网络出版: 2016-03-30

\*通信作者: 刘中 eezi@njust.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(61171166, 61401210, 61571228), 中国博士后科学基金(2014M551597)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61171166, 61401210, 61571228), China Postdoctoral Science Foundation (2014M551597)

文献[7,8]将 QuadCS 用于脉冲多普勒雷达信号采样, 发展了压缩域的脉冲多普勒处理方法。但是, 在一些雷达应用中, 我们希望从 QuadCS 低速采样中恢复雷达信号 I/Q 的奈奎斯特采样。在 CS 理论中, 这一问题可通过稀疏重构来解决。但是, 如本文第 2 节所述, 直接重构属于大规模稀疏重构问题, 需要存储大规模测量矩阵和大的计算量。然而, 现有的稀疏重构算法, 如贪婪追踪算法<sup>[15]</sup>、凸优化算法<sup>[16]</sup>、贝叶斯 CS 算法<sup>[17]</sup>等(见文献[18]及引用的文献), 只适用于小规模稀疏重构。在当前的计算能力下, 通过直接重构恢复全程雷达回波信号是不切实际的和难以实现的。

类似的问题也出现在其它应用领域, 比如, 将 RD 结构用于无限长流信号的欠采样<sup>[19]</sup>。在 CS 理论中, 这一类问题可归结为时变稀疏信号的恢复问题。人们发现可以通过设计稀疏块状测量矩阵进行压缩测量, 继而发展块状的稀疏重构; 亦或通过剖析 AIC 产生的测量矩阵结构, 发展快速可求解的稀疏恢复问题<sup>[19-22]</sup>。文献[22]将 RD 系统用于雷达回波信号采样; 根据基于积分器的 RD 结构, 发现 RD 的测量矩阵具有带状结构, 并据此提出了一种分段滑动重构 (Segment-Sliding Reconstruction, SegSR) 方法, 该方法对测量数据进行重叠分段, 并采用滑动方式一段接一段地重构, 从而实现雷达信号的全程实时重构。

然而, 对于 QuadCS 系统, 其带通滤波器具有无限长的冲激响应, QuadCS 测量矩阵并不具备文献[22]所述的带状结构。本文对带通滤波器的冲激响应进行合理截断, 将 QuadCS 的测量矩阵近似成带状矩阵, 继而采用 SegSR 方法实现实时重构。注意到, 采用近似矩阵实现稀疏重构等同于测量矩阵受到扰动时的稀疏重构问题。文献[23-25]的研究表明, 当扰动满足一定条件时, 可以保证利用扰动后的测量矩阵重构信号的稳定性。本文通过仿真评估了近似矩阵的扰动量, 验证了本文方法实现快速重构的可行性和有效性。

## 2 背景知识

### 2.1 信号模型

脉冲雷达在发射时间内发射一个经过调制的脉冲信号, 然后在接收时间内接收目标反射的回波。经下变频处理, 对于  $K$  个静止的非起伏点目标雷达环境, 在接收时间  $T$  内获取的回波信号可表示为

$$r(t) = \sum_{k=1}^K \sigma_k a(t - t_k) \cos[2\pi f_0(t - t_k) + \phi(t - t_k) + \varphi_k], \quad t \in [0, T), \quad t_k \in [0, T - T_p) \quad (1)$$

其中  $f_0$  是中频载波频率,  $T_p, B, a(t)$  和  $\phi(t)$  分别是

发射信号的时宽、带宽、包络和相位,  $\sigma_k, t_k$  和  $\varphi_k$  分别是第  $k$  个目标对应的反射系数、时延和相位偏移。若  $f_0 > B/2$ , 则  $r(t)$  是载频为  $f_0$ 、带宽为  $B$  的带通信号。记  $\tilde{s}_0(t) = a(t)e^{j\phi(t)}$  为发射信号的复包络,  $\tilde{\sigma}_k = \sigma_k e^{j(\varphi_k - 2\pi f_0 t_k)}$ , 则接收信号  $r(t)$  的复包络可表示为

$$\tilde{s}(t) = \sum_{k=1}^K \tilde{\sigma}_k \tilde{s}_0(t - t_k) \quad (2)$$

这样,  $r(t)$  的 I/Q 信号分别为  $I(t) = \text{Re}\{\tilde{s}(t)\}$  和  $Q(t) = \text{Im}\{\tilde{s}(t)\}$ 。

令  $\tau_0 = 1/B$  表示奈奎斯特采样间隔,  $\tilde{\Psi}(t)$  表示观测时间内由  $\tilde{s}_0(t)$  经过奈奎斯特采样格点的时延组成的波形匹配字典, 即  $\tilde{\Psi}(t) = \{\tilde{\psi}_n(t) | \tilde{\psi}_n(t) = \tilde{s}_0(t - n\tau_0), n = 0, 1, \dots, N-1\}$ , 其中  $N = \lfloor (T - T_p)/\tau_0 \rfloor$ 。如果目标时延满足  $t_k \in \{0, \tau_0, \dots, (N-1)\tau_0\}$ , 利用波形匹配字典  $\tilde{\Psi}(t)$ , 可将  $\tilde{s}(t)$  表示为

$$\tilde{s}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{\sigma}_n \tilde{\psi}_n(t) = \tilde{\Psi}(t)\tilde{\sigma} \quad (3)$$

其中  $\tilde{\sigma} = [\tilde{\sigma}_0 \ \tilde{\sigma}_1 \ \dots \ \tilde{\sigma}_{N-1}]^T$  表示复反射系数向量, 且  $\tilde{\sigma}$  中非零元素个数为  $\|\tilde{\sigma}\|_0 = K$ 。如果  $K \ll N$ , 则称  $\tilde{s}(t)$  为  $K$  稀疏信号, 且稀疏度  $K$  等于目标个数。

### 2.2 正交压缩采样系统

如图 1 所示, QuadCS 系统由低速采样子系统和正交解调子系统组成。在低速采样子系统中,  $p(t)$  是速率不低于  $B$  的取值为  $+1$  和  $-1$  的随机二相码,  $h_{bp}(t)$  是中心频率为  $f_0$ 、带宽为  $B_{cs}$  ( $B_{cs} \ll B$ ) 的带通滤波器。因此, 低速采样子系统输出窄带的  $y(t)$ 。对  $y(t)$  按照带通采样频率<sup>[26]</sup>  $f_{cs} = 4f_0/(4l+1)$  ( $l$  为满足  $l \leq \lfloor (f_0 - B_{cs}/2)/2B_{cs} \rfloor$  的正整数) 进行采样, 可获得低速采样信号  $y[k]$ 。经正交解调子系统解调处理, QuadCS 输出压缩的复包络序列  $\tilde{s}_{cs}[m]$  或压缩的 I/Q 序列  $I_{cs}[m]$  和  $Q_{cs}[m]$ 。经过简单数学推导可得

$$\tilde{s}_{cs}[m] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{\sigma}_n \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_{lp}[i] \int_{-\infty}^{\infty} h_{bp}(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} \cdot p((2m-i)/f_{cs} - \tau) \tilde{\psi}_n((2m-i)/f_{cs} - \tau) d\tau \quad (4)$$

其中  $h_{lp}[i]$  是正交解调子系统低通滤波器的冲激响

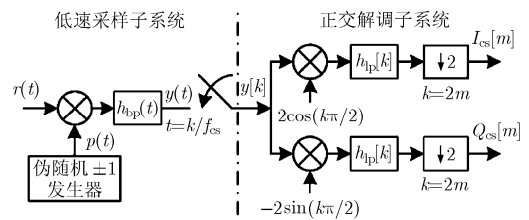


图 1 QuadCS 系统框图

应。在观测时间  $T$  内,  $\tilde{s}_{cs}(t)$  采样值的个数为  $M = \lfloor T/T_{cs} \rfloor$ , 其中  $T_{cs} = 2/f_{cs}$ 。定义  $R = T_{cs}/\tau_0$  为降采样率, 通常,  $R$  为大于 1 的整数。

定义测量向量  $\tilde{s}_{cs} = [\tilde{s}_{cs}[1] \ \tilde{s}_{cs}[2] \ \cdots \ \tilde{s}_{cs}[M]]^T$  和测量矩阵  $\tilde{\mathbf{A}} = [\tilde{a}_{m,n}] \in \mathbb{C}^{M \times N}$ , 其中

$$\tilde{a}_{m,n} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_{lp}[i] \int_{-\infty}^{\infty} h_{bp}(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} p((2m-i)/f_{cs} - \tau) \tilde{\psi}_n((2m-i)/f_{cs} - \tau) d\tau \quad (5)$$

则可将 QuadCS 用矩阵形式描述为

$$\tilde{s}_{cs} = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\sigma} \quad (6)$$

文献[14]证明对正交波形匹配字典,  $\tilde{\mathbf{A}}$  满足 RIP 条件, 即存在常数(称为约束等距常数)  $\delta_K \in (0,1)$  使得

$$(1 - \delta_K) \|\tilde{\sigma}\|_2^2 \leq \|\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\sigma}\|_2^2 \leq (1 + \delta_K) \|\tilde{\sigma}\|_2^2 \quad (7)$$

对于任意  $K$ -稀疏向量  $\tilde{\sigma}$  均成立。因此, 全程雷达回波信号恢复可首先根据稀疏重构问题<sup>1)</sup>

$$\min_{\tilde{\sigma}} \|\tilde{\sigma}\|_0, \text{ s.t. } \tilde{s}_{cs} = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\sigma} = \tilde{\Phi} \tilde{\Psi} \tilde{\sigma} \quad (8)$$

或

$$\min_{\tilde{\sigma}} \|\tilde{\sigma}\|_1, \text{ s.t. } \tilde{s}_{cs} = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\sigma} = \tilde{\Phi} \tilde{\Psi} \tilde{\sigma} \quad (9)$$

估计稀疏向量  $\tilde{\sigma}$ , 然后根据式(3)恢复基带回波信号  $\tilde{s}(t)$ 。然而, 直接求解式(8)或式(9)需要计算大的测量矩阵  $\tilde{\mathbf{A}}$ 。比如, 对于发射信号带宽为 100 MHz、脉冲宽度为 10  $\mu$ s、接收时间为 2490  $\mu$ s 的脉冲雷达系统, 以 1/5 奈奎斯特采样速率采样时, 测量矩阵的大小是  $49800 \times 248000$ , 约需存储  $1.24 \times 10^{10}$  个复数数据, 约占 184 GB 的内存空间(根据 IEEE 双精度标准计算)。根据当前稀疏重构算法计算能力<sup>[15-18]</sup>, 难以实时恢复全程的雷达回波信号。

### 3 实时重构方法

本节将在分析 QuadCS 物理特征基础上, 通过合理近似测量矩阵  $\tilde{\mathbf{A}}$ , 给出实时重构  $\tilde{\sigma}$  的方法。

对于物理可实现的模拟带通滤波器, QuadCS 中的冲激响应  $h_{bp}(t)$  在  $t < 0$  时等于 0。设正交解调子系统的数字低通滤波器  $h_{lp}$  是长度为  $N_{hl}$  的 FIR 滤波器, 则式(5)可改写为

$$\tilde{a}_{m,n} = \sum_{i=0}^{N_{hl}-1} h_{lp}[i] \int_0^{\infty} h_{bp}(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} p((2m-i)/f_{cs} - \tau) \tilde{\psi}_n((2m-i)/f_{cs} - \tau) d\tau \quad (10)$$

对时宽为  $T_p$  的基带复包络  $\tilde{s}_0(t)$ , 字典  $\tilde{\Psi}(t)$  中原子

$\tilde{\psi}_n(t) = \tilde{s}_0(t - n\tau_0)$  ( $n = 0, 1, \dots, N-1$ ) 的时宽也是  $T_p$ , 即对于  $t \notin [n\tau_0, T_p + n\tau_0)$ ,  $\tilde{\psi}_n(t) = 0$ 。因此, 由式(10)得到的测量矩阵  $\tilde{\mathbf{A}}$  满足:

$$\tilde{a}_{m,n} = 0, \quad n/R \geq m \quad (11)$$

其矩阵结构如图 2(a)所示。我们注意到, 尽管  $h_{bp}(t)$  是无限长的, 但是其能量主要集中在有限时间内。因此, 我们可以对  $h_{bp}(t)$  进行截断处理, 采用有限长冲激响应代替无限长冲激响应。假定截断长度为  $T_{hb}$ , 则式(10)转变为

$$\tilde{a}'_{m,n} = \sum_{i=0}^{N_{hl}-1} h_{lp}[i] \int_0^{T_{hb}} h_{bp}(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} p((2m-i)/f_{cs} - \tau) \tilde{\psi}_n((2m-i)/f_{cs} - \tau) d\tau \quad (12)$$

这样, 近似矩阵  $\tilde{\mathbf{A}}' = [\tilde{a}'_{m,n}] \in \mathbb{C}^{M \times N}$  满足:

$$\tilde{a}'_{m,n} = 0, \quad m \leq \lfloor n/R \rfloor \text{ 或}$$

$$m \geq \left\lceil \left( (T_p + n\tau_0 + T_{hb})f_{cs} + N_{hl} - 1 \right) / 2 \right\rceil \quad (13)$$

令  $d = \left\lceil \left( (T_p + T_{hb})f_{cs} + N_{hl} - 1 \right) / 2 \right\rceil$ , 式(13)可改写为

$$\tilde{a}'_{m,n} = 0, \quad n/R < m - d \text{ 或 } n/R \geq m \quad (14)$$

由式(14)产生的近似矩阵  $\tilde{\mathbf{A}}'$  结构如图 2(b)所示。可见,  $\tilde{\mathbf{A}}'$  具有带状结构, 其每一列向量的非零区域长度不超过  $d$ , 每一行向量的非零区域相对于前一行的偏移量是  $R$ 。根据  $d$  的定义, 对于给定的  $T_p, f_{cs}$  和  $N_{hl}$ ,  $d$  随  $T_{hb}$  增大而增大。

矩阵  $\tilde{\mathbf{A}}'$  在结构上与矩阵  $\tilde{\mathbf{A}}$  不同, 呈带状结构, 等同于我们在文献[22]中发展的 RD 测量矩阵结构。因此, 我们可以采用文献[22]中提出的分段滑动重构方法进行重构。根据分段滑动重构原理, 对测量向量和稀疏系数向量进行重叠分段, 每段测量子向量和系数子向量的长度分别为  $\tilde{M} = (S+1)M_p$  和  $\tilde{N} = SN_p$ , 其中  $M_p = d-1$  ( $N_p = M_p R$ ) 表示当前段测量(系数)子向量相对于上一段测量(系数)子向

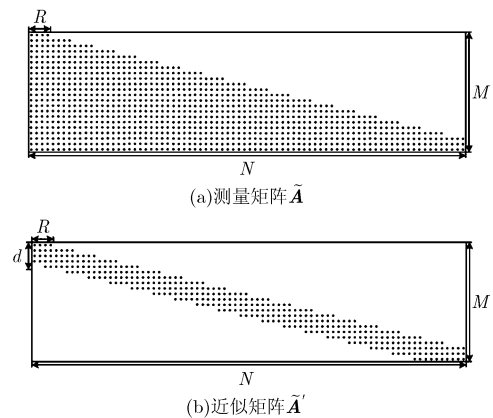


图2 测量矩阵  $\tilde{\mathbf{A}}$  及其近似矩阵  $\tilde{\mathbf{A}}'$  的结构

<sup>1)</sup>式(8)在数学上是一个 NP 问题, 在实际中, 我们通常将式(8)转化为式(9)的凸优化问题进行求解。

量下移的个数， $S$  用来控制  $\tilde{M}$  和  $\tilde{N}$  的大小，一般取 3 或 4。这样，大规模 ( $M \times N$ ) 稀疏重构问题就分解成一系列小规模 ( $\tilde{M} \times \tilde{N}$ ) 重构子问题：

$$\hat{\sigma}^{(l)} = \min_{\tilde{\sigma}^{(l)}} \|\tilde{\sigma}^{(l)}\|_1, \text{ s.t. } \|\tilde{s}_{cs}^{(l)} - \tilde{A}^{(l)} \tilde{\sigma}^{(l)}\|_2 \leq \eta^{(l)} \quad (15)$$

其中  $\tilde{\sigma}^{(l)}$  为第  $l$  段系数子向量； $\tilde{s}_{cs}^{(l)}$  为第  $l$  段虚拟测量子向量，是根据估计值  $\hat{\sigma}^{(l-1)}$  的前  $N_p$  个元素从测量子向量  $\tilde{s}_{cs}^{(l)}$  中去除其引入的测量形成的； $\eta^{(l)}$  与虚拟噪声和近似矩阵引入的噪声有关，其中虚拟噪声源于前一段的估计误差和后一段引入的部分测量。将估计值  $\hat{\sigma}^{(l)}$  的前  $N_p$  个元素作为第  $l$  段输出的重构系数，这样，依次求解每个子问题可重构出稀疏向量  $\tilde{\sigma}$ 。图 3 给出了  $S = 3$  时对测量向量和近似矩阵的划分示意图，关于分段滑动重构方法及分析可参见文献[22]。

#### 4 误差分析

本文提出的实时重构方法是建立在带状近似矩阵  $\tilde{A}$  基础上的，因此有必要分析矩阵近似对重构性能的影响。

根据近似矩阵  $\tilde{A}$  的产生过程(式(12))可知，若定义误差矩阵  $\tilde{E} = [\tilde{e}_{m,n}] \in \mathbb{C}^{M \times N}$ ，其中，

$$\tilde{e}_{m,n} = - \sum_{i=0}^{N_{hb}-1} h_{lp}[i] \int_{T_{hb}}^{\infty} h_{bp}(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} p((2m-i)/f_{cs} - \tau) \tilde{\psi}_n((2m-i)/f_{cs} - \tau) d\tau \quad (16)$$

则  $\tilde{A} = \tilde{A} + \tilde{E}$ 。这样，根据  $\tilde{s}_{cs} = \tilde{A} \tilde{\sigma}$  和  $\tilde{A}$  重构  $\tilde{\sigma}$  的问题可表示为测量矩阵受到扰动时的稀疏重构问题<sup>[23-25]</sup>

$$\hat{\tilde{\sigma}} = \min_{\tilde{\sigma}} \|\tilde{\sigma}\|_1, \text{ s.t. } \|\tilde{s}_{cs} - \tilde{A} \tilde{\sigma}\|_2 \leq \epsilon \quad (17)$$

其中  $\epsilon$  是与  $\tilde{E}$  有关的值。

文献[23~25]对问题式(17)重构可压缩信号进行了研究，文献[25]给出了采用正交匹配追踪 (Orthogonal Matching Pursuit, OMP) 算法精确估计可压缩信号的最佳  $K$  项逼近的支撑集的条件，以及估计值与真实值间绝对误差的上界。对本文稀疏信号而言，令  $\Gamma$  表示  $K$ -稀疏向量  $\tilde{\sigma}$  的支撑集， $\|\cdot\|_2^{(K)}$  表示所有  $K$  列子矩阵的谱范数的最大值，我们有如

下结论：

**定理 1** 若测量矩阵  $\tilde{A}$  受到扰动矩阵  $\tilde{E}$  的干扰，且相对扰动  $\|\tilde{E}\|_2^{(K)} / \|\tilde{A}\|_2^{(K)} \leq \epsilon^{(K)}$ ，当矩阵  $\tilde{A} = \tilde{A} + \tilde{E}$  满足 RIP 条件，且  $K+1$  阶约束等距常数满足：

$$\delta'_{K+1} < \frac{1}{\sqrt{K+1}} - \frac{3}{\sqrt{K+1}} \frac{\epsilon^{(K)} \sqrt{1+\delta_K} \|\tilde{\sigma}\|_2}{\min_{j \in \Gamma} |\tilde{\sigma}_j|} \quad (18)$$

时，OMP 算法经过  $K$  次迭代可以从  $\tilde{s}_{cs}$  和  $\tilde{A}$  中精确估计  $\tilde{\sigma}$  的支撑集，且  $\tilde{\sigma}$  与估计值  $\hat{\tilde{\sigma}}$  之间绝对误差  $\|\hat{\tilde{\sigma}} - \tilde{\sigma}\|_2$  的上界为

$$\|\hat{\tilde{\sigma}} - \tilde{\sigma}\|_2 \leq \frac{\epsilon^{(K)} \sqrt{1+\delta_K} \|\tilde{\sigma}\|_2}{\sqrt{1-\delta_K}} \quad (19)$$

定理 1 是对文献[25]中的定理 1 进行简化得到的，其证明过程在这里不再赘述。

由定理 1 可知，给定测量矩阵  $\tilde{A}$  和稀疏向量  $\tilde{\sigma}$ ， $\epsilon^{(K)}$  越小，对  $\delta'_{K+1}$  的要求越低。根据文献[23]对矩阵  $\tilde{A} = \tilde{A} + \tilde{E}$  的 RIP 分析可知  $\delta'_K \leq \delta'_{K,\max} = (1+\delta_K)(1+\epsilon^{(K)})^2 - 1$ 。因此， $\epsilon^{(K)}$  越小， $\delta'_K$  的上界  $\delta'_{K,\max}$  越小。这样，本文获取近似矩阵  $\tilde{A}$  的原则是使  $\epsilon^{(K)}$  尽可能小，从而保证  $\tilde{A}$  能够满足 RIP，并且约束等距常数可以满足定理 1 的条件(式(18))。注意到  $\delta'_{K+1} > 0$ ，由式(18)可知  $\min_{j \in \Gamma} |\tilde{\sigma}_j| > 3\epsilon^{(K)} \sqrt{1+\delta_K} \|\tilde{\sigma}\|_2$ 。因此，稀疏向量  $\tilde{\sigma}$  中非零元素的幅度必须满足一定条件，才能实现对  $\tilde{\sigma}$  支撑集  $\Gamma$  的精确估计。

根据  $\epsilon^{(K)}$  的定义和误差矩阵  $\tilde{E}$  的产生方式(式(16))可知  $\epsilon^{(K)}$  与截断长度  $T_{hb}$  有关。由于  $K$  值较大时通过遍历所有组合计算  $\|\tilde{E}\|_2^{(K)}$  和  $\|\tilde{A}\|_2^{(K)}$  面临计算复杂度很高的问题，因此我们不直接计算  $\epsilon^{(K)}$  的值。注意到，相对误差  $\epsilon = \|\tilde{A} - \tilde{A}\|_2 / \|\tilde{A}\|_2 = \|\tilde{E}\|_2 / \|\tilde{A}\|_2$  与截断长度  $T_{hb}$  的关系可反映  $\epsilon^{(K)}$  与  $T_{hb}$  的关系，因此，我们在第 6 节中仿真评估相对误差  $\epsilon$  与  $T_{hb}$  间的变化关系，并给出在保证重构精度情况下  $T_{hb}$  的选择范围。

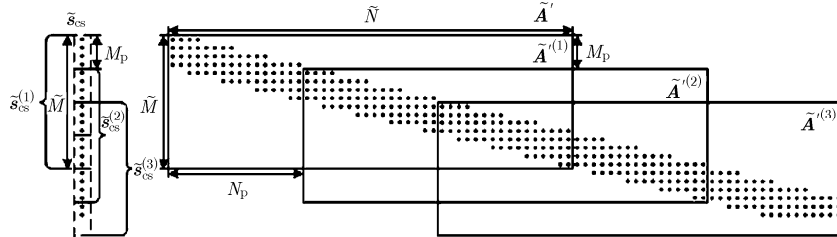


图 3 对测量向量和近似矩阵的划分示意图

## 5 存储量和运算量分析

对于重构问题式(9), 需存储  $M \times N$  的复测量矩阵  $\tilde{\mathbf{A}}$ , 按 IEEE 双精度标准计算, 将占据  $16MN$  字节(byte)的存储空间。对于本文提出的方法, 由于分段滑动重构方法只需存储  $\tilde{M} \times \tilde{N}$  的复测量子矩阵, 因此, 所需存储空间是  $16\tilde{M}\tilde{N}$  byte。注意到  $\tilde{M} = (S+1)(d-1)$  和  $\tilde{N} = S(d-1)R$ 。对于 2.2 小节中的脉冲雷达系统参数, 表 1 给出了直接重构问题式(9)和本文方法所需的存储量, 其中分段滑动重构方法的参数  $S = 3$ 。可见, 本文提出的方法可明显降低存储空间。

采用 OMP 算法直接求解问题式(9)时的运算量为  $O(KMN)$ 。对于本文提出的方法, 采用 OMP 算法求解子问题的运算量为  $O(K^{(l)}\tilde{M}\tilde{N})$ , 其中  $K^{(l)}$  表示系数子向量  $\tilde{\sigma}^{(l)}$  的稀疏度。可见, 本文方法的运算量显著降低。

## 6 仿真

### 6.1 参数设置

仿真实验中发射信号为带宽  $B = 100$  MHz、时宽  $T_p = 10$   $\mu$ s 的线性调频脉冲信号。为使测量矩阵的规模适中以便评估采用近似矩阵直接重构的性能, 设接收时间  $T = 100$   $\mu$ s。对于回波模型式(1), 假设目标时延在分辨率格点上随机取值, 反射系数和相位偏移分别在  $(0, 1]$  和  $(0, 2\pi]$  上均匀分布。此外, 假设时延格点上存在目标的概率是  $p$ , 即目标平均个数是  $pN$ 。设 QuadCS 系统输入信号的载频  $f_0 = 130$  MHz, 伪随机信号  $p(t)$  的速率为 100 MHz, 带通滤波器带宽  $B_{cs} = 10$  MHz, ADC 采样速率  $f_{cs} = 40$  MHz (即降采样率  $R = 5$ )。根据上述参数可知, 接收时间内复压缩测量的个数  $M = 2000$ , 待估计的稀疏系数向量的长度  $N = 9000$ 。

QuadCS 中带通滤波器采用 6 阶巴特沃斯滤波器(冲激响应见图 4), 以实现  $f_0 \pm B_{cs}$  处至少具有  $-35$  dB 的衰减。对于 QuadCS 中的数字低通滤波器, 本文采用窗函数法设计了通带截止频率为  $B_{cs}/2 = 5$  MHz、阻带截止频率为  $B_{cs} = 10$  MHz 和阻带最小衰减为  $-60$  dB 的 FIR 滤波器, 其冲激响应的长度为  $N_{hl} = 31$ 。

如第 4 节所述, 我们希望选择合适的截断长度  $T_{hb}$  对带通滤波器的冲激响应进行截断, 使近似矩阵  $\tilde{\mathbf{A}}$  能很好地逼近测量矩阵  $\tilde{\mathbf{A}}$ 。图 5 给出了相对误差  $\varepsilon = \|\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{A}}\|_2 / \|\tilde{\mathbf{A}}\|_2$  随  $T_{hb}$  的变化关系, 它们是 500 次实验的平均结果, 其中每次实验采用不同的伪随机信号。由于  $T_{hb} < 0.2$   $\mu$ s 时,  $\varepsilon < 0.284$ , 近似矩阵  $\tilde{\mathbf{A}}$  可能无法满足 RIP 条件, 或者约束等距常数不能满足定理 1 的条件, 因此, 下文讨论  $T_{hb} \geq 0.2$   $\mu$ s 的情况。注意到,  $T_{hb} = 0.4$   $\mu$ s 时,  $\varepsilon = 0.056$ ;  $T_{hb} = 0.6$   $\mu$ s 时,  $\varepsilon = 0.012$ 。在后续仿真中设  $T_{hb} = 0.4$   $\mu$ s 和  $T_{hb} = 0.6$   $\mu$ s。

此外, 在进行分段滑动重构时, 根据文献[22]的理论分析和仿真结果, 将控制  $\tilde{M} \times \tilde{N}$  测量子矩阵大小的参数  $S$  设为 3, 并采用文献[22]提出的两步 OMP 算法求解子问题。除特别说明外, 本文的仿真结果均是 500 次蒙特卡洛实验的平均结果。

### 6.2 无噪声背景下的重构

我们通过重构误差、稀疏位置正确发现率和运行时间来评估无噪声背景下的重构性能, 其中重构误差的评估标准为稀疏向量  $\tilde{\sigma}$  与估计值  $\hat{\sigma}$  之间的相对重构误差  $E_r = \|\hat{\sigma} - \tilde{\sigma}\|_2 / \|\tilde{\sigma}\|_2$ , 稀疏位置正确发现率是指稀疏向量  $\tilde{\sigma}$  中非零元素被正确发现的个数与非零元素总个数的比值。

(1) 重构误差和稀疏位置正确发现率: 首先评估采用 OMP 算法求解问题式(17)时的性能。图 6 和图 7 分别是给定概率  $p$  下相对重构误差  $E_r$  和稀疏位置正确发现率随截断长度  $T_{hb}$  的变化曲线。由图可知, 在概率  $p$  给定时, 随着  $T_{hb}$  增大, 相对重构误差  $E_r$  逐渐接近于零、稀疏位置正确发现率逐渐趋近于 1。可见,  $T_{hb}$  越大, 对稀疏向量  $\tilde{\sigma}$  中非零元素幅度的要求越低。这与第 4 节的分析一致。此外, 对于概率  $p = 0.015$ , 当  $T_{hb} \geq 0.6$   $\mu$ s 时稀疏位置正确发现率可达 99% 以上, 并且相对重构误差  $E_r < 0.003$ , 因此, 可以认为选择  $T_{hb} = 0.6$   $\mu$ s 是比较合适的。

下面评估采用分段滑动重构方法求解问题式(17)的性能。为便于比较, 我们将仿真结果展示在图 6 和图 7 中。由图可知, 相比于采用 OMP 算法

表 1 存储量比较

方法	重构问题式(9)	本文方法			
		$T_{hb} = 0.2$ $\mu$ s, $N_{hl} = 31(d = 219)$	$T_{hb} = 0.8$ $\mu$ s, $N_{hl} = 31(d = 231)$	$T_{hb} = 0.2$ $\mu$ s, $N_{hl} = 61(d = 234)$	$T_{hb} = 0.8$ $\mu$ s, $N_{hl} = 61(d = 246)$
存储量(MB)	$1.88 \times 10^5$	43.51	48.43	49.70	54.95

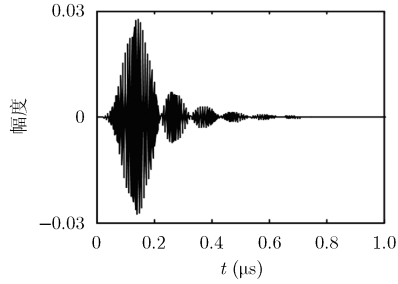


图 4 巴特沃斯带通滤波器的冲激响应

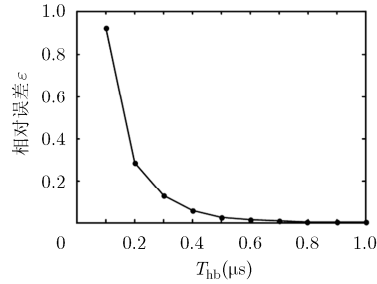


图 5 相对误差  $\epsilon$  与  $T_{hb}$  之间的关系曲线

直接重构，采用分段滑动重构方法时相对重构误差较大、稀疏位置正确发现率较低，这是因为分段滑动重构方法引入了虚拟噪声。注意到， $T_{hb} \geq 0.6 \mu s$  时，相对重构误差  $E_r$  和稀疏位置正确发现率基本保持不变。根据第 5 节对存储量的分析，考虑到  $T_{hb}$  越大，需要的存储量越大，对于仿真的例子我们认为取截断长度  $T_{hb} = 0.6 \mu s$  是比较合适的选择。上述仿真验证了选择合适的截断长度获取近似矩阵的合理性，以及根据近似矩阵采用分段滑动重构方法重构的有效性。

(2)运行时间：这里通过 CPU 时间来说明算法的运行时间。仿真采用的计算机硬件配置为主频 3.1 GHz 的英特尔酷睿 i5-2400 处理器和 4 GB 内存，仿真环境为 MATLAB 2011B。由图 8 可知，本文方法在运行时间上比采用 OMP 算法直接重构显著减少。应当指出，这仅仅是针对适度规模的测量矩阵给出的说明性例子。事实上，本文的方法可以解决直接重构无法实现的大规模重构问题。

### 6.3 噪声背景下的重构

假定回波模型式(1)受到带限、加性高斯白噪声  $n(t)$  的干扰，其中  $n(t)$  的中心频率为  $f_0$ 、带宽为  $B$ 、功率谱密度为  $N_0/2$ 。定义输入信噪比(Input Signal-to-Noise Ratio, ISNR)为  $ISNR = \int_0^T |r(t)|^2 dt / (TN_0B)$ 。评估重构性能时采用重构信噪比 (Reconstruction Signal-to-Noise Ratio, RSNR)，即  $RSNR = \|\tilde{\Psi}\hat{\sigma}\|_2^2 / E[\|\tilde{\Psi}(\hat{\sigma} - \sigma)\|_2^2]$ 。

根据 6.1 小节对截断长度  $T_{hb}$  与相对误差  $\epsilon$  的讨论，以及 6.2 小节在无噪声情况下的仿真结果，我们分别评估了  $T_{hb} = 0.4 \mu s$  和  $T_{hb} = 0.6 \mu s$  时采用 OMP 算法直接重构和分段滑动重构方法重构的 RSNR。图 9(a)是输入信噪比  $ISNR = 10 \text{ dB}$  时 RSNR 随概率  $p$  的变化曲线；图 9(b)是概率  $p = 0.01$  时 RSNR 随  $ISNR$  的变化曲线。由图可知，采用分段滑动重构方法时的 RSNR 接近于 OMP 算法直接重构的结果。此外，对于这两种重构方式，截断长度  $T_{hb} = 0.4 \mu s$  和  $T_{hb} = 0.6 \mu s$  时的结果几乎相同，特别是在  $ISNR \leq 10 \text{ dB}$  的情况下，这是由于采用近似矩阵引入的误差比噪声  $n(t)$  带来的误差小。可见，在噪声背景下，本文的重构方法可以实现近似最优的性能；对仿真例子，在保证重构性能的前提下，可以选择  $T_{hb} = 0.4 \mu s$  以减少存储量和运算量。

## 7 结论

本文研究了基于 QuadCS 系统的脉冲雷达回波信号实时重构问题，通过对 QuadCS 系统特性的分析，提出将测量矩阵近似成具有特殊带状结构矩阵的思想，然后针对近似矩阵采用分段滑动重构方法实现实时重构。对近似处理引入误差的分析表明，只要对测量矩阵进行合理近似，就可针对近似矩阵采用分段滑动重构方法实现快速重构。仿真结果验证了合理近似的可行性以及分段滑动重构的有效性。

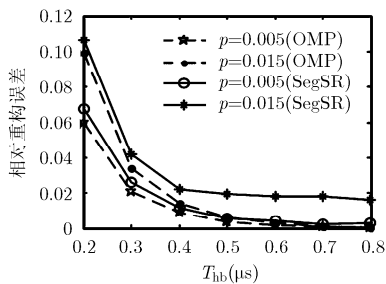


图 6 相对重构误差随  $T_{hb}$  的变化曲线

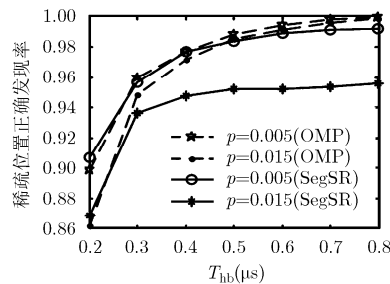


图 7 稀疏位置正确发现率随  $T_{hb}$  的变化曲线

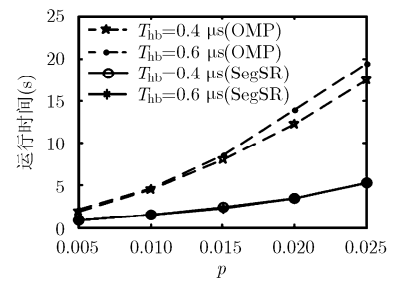


图 8 运行时间

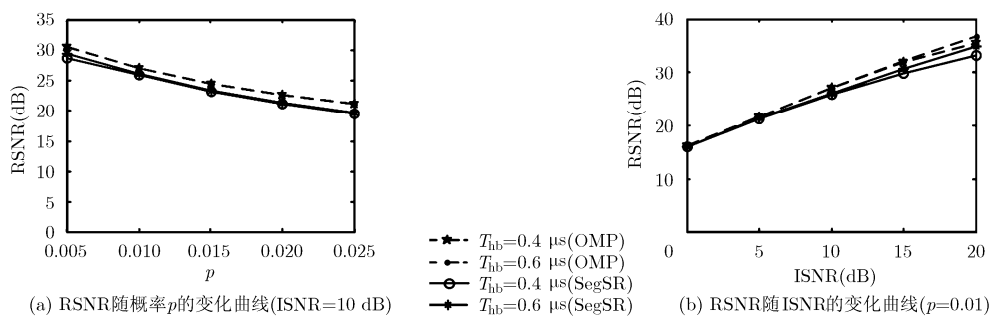


图9 RSNR 的变化曲线

## 参考文献

- [1] DONOHO D L. Compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289–1306. doi: 10.1109/TIT.2006.871582.
- [2] CANDÈS E J and TAO T. Near-optimal signal recovery from random projections: universal encoding strategies?[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(12): 5406–5425. doi: 10.1109/TIT.2006.885507.
- [3] CANDÈS E J and TAO T. Decoding by linear programming [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2005, 51(12): 4203–4215. doi: 10.1109/TIT.2005.858979.
- [4] YOO J, TURNES C, NAKAMURA E B, *et al.* A compressed sensing parameter extraction platform for radar pulse signal acquisition[J]. *IEEE Journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems*, 2012, 2(3): 626–638. doi: 10.1109/JETCAS.2012.2214634.
- [5] BARANSKY E, ITZHAK G, WAGNER N, *et al.* Sub-Nyquist radar prototype: hardware and algorithm[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2014, 50(2): 809–822. doi: 10.1109/TAES.2014.120475.
- [6] BAR-ILAN O and ELDAR Y C. Sub-Nyquist radar via Doppler focusing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(7): 1796–1811. doi: 10.1109/TSP.2014.2304917.
- [7] LIU C, XI F, CHEN S, *et al.* A pulse-Doppler processing scheme for quadrature compressive sampling radar[C]. Proceedings of the 19th International Conference on Digital Signal Processing (DSP), Hong Kong, China, 2014: 676–681. doi: 10.1109/ICDSP.2014.6900750.
- [8] LIU C, XI F, CHEN S, *et al.* Pulse-Doppler signal processing with quadrature compressive sampling[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2015, 51(2): 1217–1230. doi: 10.1109/TAES.2014.130475.
- [9] KIROLOS S, LASKA J, WAKIN M, *et al.* Analog-to-information conversion via random demodulation[C]. Proceedings of the IEEE Dallas/CAS Workshop on Design, Applications, Integration and Software (DCAS), Richardson, TX, USA, 2006: 71–74. doi: 10.1109/DCAS.2006.321036.
- [10] TROPP J A, LASKA J N, DUARTE M F, *et al.* Beyond Nyquist: efficient sampling of sparse bandlimited signals[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, 56(1): 520–544. doi: 10.1109/TIT.2009.2034811.
- [11] BECKER S R. Practical compressed sensing: modern data acquisition and signal processing[D]. [Ph.D. dissertation], California Institute of Technology, Pasadena, CA, USA, 2011.
- [12] MISHALI M, ELDAR Y C, and ELRON A J. Xampling: signal acquisition and processing in union of subspaces[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(10): 4719–4734. doi: 10.1109/TSP.2011.2161472.
- [13] XI F, CHEN S, and LIU Z. Quadrature compressive sampling for radar echo signals[C]. Proceedings of the International Conference on Wireless Communications and Signal Processing (WCSP), Nanjing, China, 2011: 1–5. doi: 10.1109/WCSP.2011.6096838.
- [14] XI F, CHEN S, and LIU Z. Quadrature compressive sampling for radar signals[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(11): 2787–2802. doi: 10.1109/TSP.2014.2315168.
- [15] TROPP J A and GILBERT A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2007, 53(12): 4655–4666. doi: 10.1109/TIT.2007.909108.
- [16] YIN W, OSHER S, GOLDFARB D, *et al.* Bregman iterative algorithms for L1-minimization with applications to compressed sensing[J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2008, 1(1): 143–168. doi: 10.1137/070703983.
- [17] WU Q, ZHANG Y D, AMIN M G, *et al.* Complex multitask Bayesian compressive sensing[C]. Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), Florence, Italy, 2014: 3375–3379. doi: 10.1109/ICASSP.2014.6854226.
- [18] TROPP J A and WRIGHT S J. Computational methods for sparse solution of linear inverse problems[J]. *Proceedings of the IEEE*, 2010, 98(6): 948–958. doi: 10.1109/JPROC.2010.2044010.
- [19] PETROS T B and ASIF M S. Compressive sensing for streaming signals using the streaming greedy pursuit[C]. Proceedings of the Military Communications Conference

- (MILCOM), San Jose, CA, USA, 2010: 1205-1210. doi: 10.1109/MILCOM.2010.5680110.
- [20] ASIF M S and ROMBERG J. Sparse recovery of streaming signals using L1 homotopy[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(16): 4209-4223. doi: 10.1109/TSP.2014.2328981.
- [21] QIN S, ZHANG Y D, WU Q, *et al.* Large-scale sparse reconstruction through partitioned compressive sensing[C]. Proceedings of the 19th International Conference on Digital Signal Processing, Hong Kong, China, 2014: 837-840. doi: 10.1109/ICDSP.2014.6900784.
- [22] ZHANG S, XI F, CHEN S, *et al.* Segment-sliding reconstruction of pulsed radar echoes with sub-Nyquist sampling[OL]. <http://arxiv.org/abs/1503.00434>, 2015.
- [23] HERMAN M A and STROHMER T. General deviants: an analysis of perturbations in compressed sensing[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2010, 4(2): 342-349. doi: 10.1109/JSTSP.2009.2039170.
- [24] HERMAN M A and NEEDELL D. Mixed operators in compressed sensing[C]. Proceedings of the 44th Annual Conference on Information Sciences and Systems (CISS), Princeton, NJ, USA, 2010: 1-6. doi: 10.1109/CISS.2010.5464909.
- [25] DING J, CHEN L, and GU Y. Perturbation analysis of orthogonal matching pursuit[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, 61(2): 398-410. doi: 10.1109/TSP.2012.2222377.
- [26] VAUGHAN R G, SCOTT N L, and WHITE D R. The theory of bandpass sampling[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1991, 39(9): 1973-1984. doi: 10.1109/78.134430.
- 张素玲：女，1985年生，博士生，研究方向为压缩采样、雷达信号处理。
- 席峰：男，1980年生，副教授，研究方向为压缩采样、雷达信号处理、传感器网络。
- 陈胜垚：男，1985年生，副教授，研究方向为压缩采样、雷达信号处理、混沌同步和参数估计。
- 刘中：男，1963年生，教授，研究方向为信号处理、雷达和通信技术、混沌与信息动力学等。