### 基于正则化的半监督等距映射数据降维方法

王宪保 陈诗文 姚明海\*

(浙江工业大学信息工程学院 杭州 310023)

摘 要:针对等距映射(ISOMAP)算法无监督,不能生成显式映射函数等局限性,该文提出一种正则化的半监督等距映射(Reg-SS-ISOMAP)算法。该算法首先利用训练样本的标签样本构建 K 联通图(K-CG),得到近似样本间测地线距离,并作为矢量特征代替原始数据点;然后通过测地线距离计算核矩阵,用半监督正则化方法代替多维尺度分析(MDS)算法处理矢量特征;最后利用正则化回归模型构建目标函数,得到低维表示的显式映射。算法在多个数据集上进行了比较实验,结果表明,文中提出的算法降维效果稳定,识别率高,显示了算法的有效性。

关键词:数据降维;流形学习;半监督学习;正则化

中图分类号: TP391 文献标识码: A

**DOI**: 10.11999/JEIT150694

## A 文章编号: 1009-5896(2016)01-0241-05

# Data Dimensionality Reduction Method of Semi-supervised Isometric Mapping Based on Regularization

WANG Xianbao CHEN Shiwen YAO Minghai

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: This paper proposes Regularized Semi-Supervised ISOmetric MAPping (Reg-SS-ISOMAP) algorithm to solve the problem that ISOmetric MAPping (ISOMAP) algorithm is unsupervised and can not generate explicit mapping function. At first, this algorithm creates K-Connectivity Graph (K-CG) by labeled samples in training samples to get geodesic distance between approximate samples and takes it as feature vector substituting for original data. Then, it takes the geodesic distance as kernel and processes feature vector through semi-supervised regularization not MultiDimensional Scaling (MDS) algorithm. At last, it constructs objective function by regularization regression model which is low dimension and explicit mapping. The algorithm is simulated on different data sets, results show that it is stable in dimension reduction and high recognition rate.

Key words: Data dimensionality reduction; Manifold learning; Semi-supervised learning; Regularization

#### 1 前言

数据降维方法可以分为线性降维和非线性降维,线性降维主要有主成分分析(Principal Component Analysis, PCA),线性判别分析(Linear Discriminant Analysis, LDA),多维尺度分析(MultiDimensional Scaling, MDS)等。但在大多数的应用中,数据一般分布在非线性几何结构上。

非线性降维主要有等距映射(ISOmetric MAPping, ISOMAP), 局部线性嵌入(Local Linear Embeedding, LLE)<sup>[1]</sup>, 拉普拉斯特征映射(Laplacian Eigenmap, LE)<sup>[2]</sup>, 局部切空间排列(Local Tangent Space Alignment, LTSA)<sup>[3]</sup>等。非

线性降维使得数据分布更加接近它们的空间流形<sup>国</sup>,但也存在局限性: (1)假定数据位于欧氏空间上,且样本较少时降维不明显; (2)直接得到数据集的低维结果,不能得出显示映射; (3)属于非监督式的,不能使用类别标签信息。

半监督学习从大量未标签样本和少量标签样本中进行学习,利用数据集的几何结构来指导分类,是近年来的一个研究方向。它通常基于两个假设: (1)流形假设,即样本分布在低维流形上; (2)聚类假设,即位于同一聚类中的样本属于同一类别。

YANG 等人<sup>[5]</sup>提出的半监督等距映射(Semi-Supervised ISOmetric MAPping, SS-ISOMAP)利用标签样本得到的低维表示来处理其余的样本,但降维效果没有提高。文献[6]提出的半监督主成分分析方法(Semi-Supervised Principal Component Analysis, SS-PCA)能够将图片进行去噪,但仍然缺少显式映射。文献[7]提出的半监督判别正交邻域保

收稿日期: 2015-06-08; 改回日期: 2015-09-21; 网络出版: 2015-11-19 \*通信作者: 姚明海 ymh@zjut.edu.cn

基金项目: 浙江省自然科学基金(LZ14F030001, LY14F030009)

Foundation Items: Zhejiang Provincial Natural Science Foundation (LZ14F030001, LY14F030009)

持 投 影 方 法 (Semi-supervised Discriminative Orthogonal Neighborhood-Preserving Projection, SDONNP)用未标签样本的几何结构提高了算法的分类精确度,但仍难以构建准确的显式映射。HE等人 <sup>[8]</sup> 提 出 的 半 监 督 最 大 边 缘 投 影 (Semi-Supervised Maximum Margin Projection, SS-MMP)可发现局部流形结构,但处理多类别多流形的数据时,降维效果下降。CAI等人<sup>[9]</sup>提出的半监督内核判别分析 (Semi-Supervised Kenrel Discriminant Analysis, SS-KDA)用未标签样本估计内在几何结构,用标签样本最大化类间距离,但算法仍属于线性降维方法。文献[10]提出的等距投影 (Isometric Projection, IsoProjection)在多方面进行了改进,但应用于高维数据时,降维效果不理想。

本文提出一种基于正则化的半监督 ISOMAP 数据降维方法(Regularized Semi-Supervised ISOmetric MAPping, Reg-SS-ISOMAP),算法首先利用标签样本构建半监督邻域图,然后用测地线距离作为矢量特征代替原始数据点,并计算核矩阵,最后用构建的半监督正则化方法处理矢量特征,得到显式映射。实验结果与上述已有方法进行比较,显示了本文算法良好的降维效果。

#### 2 ISOMAP 概述

ISOMAP 是一种非线性降维算法,其计算过程可分为3个步骤:

- (1)构造邻域关系图G,如果样本i是j的近邻点,那么这两点有边连接,边长为 $d_x(i,j)$ 。
- (2) 计 算 近 似 测 地 线 距 离 矩 阵  $D = \{d_G(i,j)\}_{N\times N}$ 。 如果样本点 i 和 j 有边连接,则  $d_G(i,j) = d_x(i,j)$ , 否则  $d_G(i,j) = \infty$ 。 在 G 中利用 Floyd 算法或 Dijkstra 算法寻找最短路径。
- (3)在  $\mathbf{D}$  上运行MDS算法,获得数据点的低维表示。 假设  $\lambda_p$  是矩阵  $\tau(\mathbf{D})$  的第 p 个特征值,  $\tau(\mathbf{D}) = -(1/2)\mathbf{H}S\mathbf{H}$ , $\mathbf{H}$  是中心化矩阵,  $S = d_G^2(i,j)$ , $V_p^i$  是第 p 个特征向量的第 i 个分量,那么低维空间输出变量  $\mathbf{z}_i$  的第 p 个分量即为  $\sqrt{\lambda_p}V_p^i$ 。

MDS 算法使得 ISOMAP 只能获得数据的低维表示,不能得到显示映射关系。且要求测地线距离是欧式的,数据采样均匀、充足。其局限性可归结为以下几点:

- (1)只能应用于嵌入流形可展曲面;
- (2)只能在一个流形下产生较好的降维结果;
- (3)当新样本出现时,需要重新计算新增样本和 原有样本集组成的更大规模的数据集;
  - (4)是无监督算法,无法利用类别信息。

#### 3 Reg-SS-ISOMAP 算法

#### 3.1 半监督邻域图构建和矢量特征求取

传统的构建方法不能保证多流形数据邻域图的连通性。本文提出 K连通图(K-Connectivity Graph, K-CG)方法,步骤如下:

步骤 1 给定邻域值,连接同类最近邻域点,并引入缩小因子减小同类间的距离,引入扩大因子增大异类间的距离;而未标签样本直接连接最近邻域点。 假定可得到 P 个小流形,则可定义为 $G^i = \{x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i\}, i = 1, 2, \dots, P, n$  为样本个数;

步骤 2 如果计算步骤 1 中使用 $\varepsilon$ -NN 方法,则计算邻域中的平均样本个数 K。设 $k_i$ 是 $x_i$ 的邻域值,那么 $K = \sum_{i=1}^{N} k_i/N$ ,N是全部样本个数;

步骤 3 每个小流形分别连接 K 个同类数据点 到邻近流形,从而构建整个流形。定义  $G^i$  和  $G^j$  间的 K 个最短数据点对为  $\{(x^i_{j(a)}, x^j_{i(a)}), a=1,2,\cdots,K\}$  。

可以看出,K-CG 图构建方法具有以下优点:

- (1)不需要增大 K 值来防止不连通的发生;
- (2)测地线距离可以更好地近似;
- (3)得到的测地线距离比 K NN 或  $\varepsilon$  NN 更短。 设  $d_G(x_i, x_j)$  是点  $x_i$  和  $x_j$  的测地线距离,那么矢量特征为  $\mathbf{c}_i = [d_G(x_i, x_1), d_G(x_i, x_2), \cdots, d_G(x_i, x_N)]^{\mathrm{T}}$ 。

#### 3.2 半监督正则化方法

为了提高降维的鲁棒性,防止目标函数的过度 拟合,利用正则化回归模型[11,12]:

$$\Phi' = \arg\min \left\{ \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l} \varphi(\boldsymbol{c}_{i}, \boldsymbol{y}_{i}, \Phi) + \gamma_{K} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{K}^{2} + \gamma_{I} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{I}^{2} \right\}$$

$$(1)$$

 $\Phi'$  为能量函数,其中 l 是标签样本个数, $y_i \in R^d$ , $i = 1, 2, \cdots, l$  是样本标签, $\varphi(c_i, y_i, \Phi) = \|\Phi(c_i) - y_i\|^2$  是平均损失函数, $\gamma_K$  和  $\gamma_I$  是两个正则化参数。  $\|\Phi\|_K^2$  是映射能力的度量, $\|\Phi\|_K^2$  是保持数据结构能力的度量。

正则项  $\|\boldsymbol{\Phi}\|_{K}^{2}$  通常定义为再生核希伯特空间函数的范数。给定半正定核  $k(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ ,就有关联范数  $H_{K}$ 。任何  $\phi_{s}\in H_{K}$  都可以表示为  $\phi_{s}(\cdot)=\sum_{i}\eta_{i}^{s}k(\boldsymbol{u}_{i},\cdot)$ 。对于  $\boldsymbol{\Phi}=[\phi_{1},\phi_{2},\cdots,\phi_{d}]^{\mathrm{T}}$ , $\|\boldsymbol{\Phi}\|_{K}^{2}$  可以被定义为

$$\|\Phi\|_{K}^{2} = \sum_{s=1}^{d} \|\phi_{s}\|_{K}^{2} = \sum_{s=1}^{d} \sum_{i,j} \eta_{i}^{s} \eta_{j}^{s} k(\boldsymbol{u}_{i}, \boldsymbol{u}_{j})$$
 (2)

正则项 $\|\boldsymbol{\phi}\|$ ,通常使用数据的几何结构和标签信息 $^{[13,14]}$ 寻找保持结构能力的合理准则,所以定义为

$$\|\boldsymbol{\Phi}\|_{I}^{2} = \frac{1}{N^{2}} \sum_{i}^{N} \sum_{j}^{N} \boldsymbol{W}_{ij} \left\| \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{c}_{i}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{c}_{j}) \right\|^{2}$$
(3)

其中N是样本个数。通过最小化 $\|\mathbf{\Phi}\|_{r}^{2}$ ,就能最大化 不同类间的距离和最小化同类间的距离。

所以,式(1)又可以表示为

$$\Phi' = \arg\min\left\{\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l} \|\Phi(\boldsymbol{c}_i) - \boldsymbol{y}_i\|^2 + \gamma_K \|\Phi\|_K^2 + \frac{\gamma_I}{N^2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{W}_{ij} \|\Phi(\boldsymbol{c}_i) - \Phi(\boldsymbol{c}_j)\|^2\right\}$$
(4)

其中 $\gamma_{\kappa}$ 是目标空间函数的系数,默认为 $0.005/l,\gamma_{I}$ 是内在几何函数的系数,默认为 $0.05N^2/l$ 。

最小化优化问题的显式映射表示为

$$\Phi(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{b}_{i} k(\mathbf{c}_{i}, \mathbf{c})$$
 (5)

其中  $\boldsymbol{b}_i = [\boldsymbol{b}_{1i}, \boldsymbol{b}_{2i}, \cdots, \boldsymbol{b}_{di}]^{\mathrm{T}} \in R^d, \boldsymbol{c}$  是由测地线距离构 成的矢量特征, $k(\cdot,\cdot)$  是核函数<sup>[15]</sup>。

对式(4)进行矩阵运算,得到目标函数

$$\begin{split} B' &= \arg\min\left\{\frac{1}{l}\operatorname{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\boldsymbol{J} - \boldsymbol{Y})(\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\boldsymbol{J} - \boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}} \right. \\ &+ \gamma_{K}\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}) + \frac{\gamma_{I}}{N^{2}}\operatorname{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\boldsymbol{L}\boldsymbol{K}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})\right\} \end{split}$$

其中  $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{d \times N}$  是  $\boldsymbol{\Phi}$  的系数矩阵,  $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{d \times N}$  是标签矩 阵,  $K \in \mathbb{R}^{N \times N}$  是内核矩阵,  $L = S - W \in \mathbb{R}^{N \times N}$  表 示拉普拉斯矩阵, 8 是对角线矩阵且对角值  $S_{ii} = \sum_{i=1}^{N} W_{ij}$ ,  $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  是对角选择矩阵, 前 l 个值 

$$\frac{1}{l}(\mathbf{Y} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{J})(\mathbf{K}\mathbf{J})^{\mathrm{T}} + \gamma_{K}\mathbf{B}\mathbf{K} + \frac{\gamma_{I}}{N^{2}}\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{L}\mathbf{K} = 0 \quad (6)$$

则式(6)的最小二乘解为

$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{Y} \left( \boldsymbol{K} \boldsymbol{J} + \gamma_K l \boldsymbol{I} + \frac{\gamma_I l}{N^2} \boldsymbol{K} \boldsymbol{L} \right)^{-1}$$

低维表示通过显式映射得到,即 $Z = \Phi'(c) =$  $\sum_{i=1}^{N} oldsymbol{b}_{i}^{'} k(oldsymbol{c}_{i}, oldsymbol{c})$ ,其中 $oldsymbol{b}_{i}^{'}$ 是 $oldsymbol{B}^{\prime}$ 的第i列。

#### 3.3 Reg-SS-ISOMAP 算法

Reg-SS-ISOMAP 的计算过程可分为三个步骤: 步骤 1 通过 K - CG 方法构建邻域关系图。

步骤 2 在图 G 中寻找最短路径,然后用矢量 特征来代替原始数据。

步骤3 通过半监督正则化方法处理矢量特征, 得到显式映射,并得到数据的低维表示。

可以看出, Reg-SS-ISOMAP 的时间复杂度由3 部分组成, K-CG 构建为  $O(kN^2)$ , Dijkstra 为  $O(kN\log N)$ , 矩阵求逆为 $O(N^3)$ , 因此, 整个算法 的时间复杂度为 $O(kN^2 + kN \log N + N^3)$ 。

#### 实验及结果分析

#### 4.1 手写数字降维与识别

使用 MNIST 数据库检测算法的降维效果。共

10 类、每类 100 个样本进行实验。 先对数据做 PCA 降维,保留98%的主成分。取每类70个作为训练样 本, 其中 50%已知标签, 其余用于测试。结合 KNN 分类器分别观察 7 种算法的识别率, 目标维数 d 依 次取 1~30 维, 邻域 K 取 7。实验在 i5 处理器, 4G 内存的电脑上用 MATLAB 仿真。图 1 和图 2 显示 了 7 种方法在不同维数下已学习未标签样本和测试 样本的识别率,表1和表2显示了识别率趋于稳定 后未标签样本的平均识别率和测试样本的识别率。

从图 1、图 2 及表 1、表 2 可以看出:

表 1 未标签样本 9~30 维平均识别率

算法	正确识别率(%)
Reg-SS-ISOMAP	83.50
SS-ISOMAP	78.24
SS-PCA	81.96
SDONNP	80.04
SS-MMP	78.10
SS-KDA	61.87
IsoProjection	62.78

表 2 测试样本 9~30 维平均识别率

	正确识别率(%)
Reg-SS-ISOMAP	82.49
SS-ISOMAP	78.06
SS-PCA	81.93
SDONNP	79.85
SS-MMP	73.81
SS-KDA	61.80
IsoProjection	63.14

- (1) Reg-SS-ISOMAP 算法识别率最高,不仅弥 补了 SS-PCA 不能处理新样本的缺点,平均识别率 也比 SS-PCA 分别提高了 1.54%和 0.56%。
- (2)Reg-SS-ISOMAP 算法在 1~10 目标维数时, 识别率远远高于其他算法, 反映了算法在低维空间 下更好地构建了显式映射。
- (3)SS-KDA 算法和 IsoProjection 算法虽然能够 构建显式映射,但算法不适用于手写数字,降维后 所得到识别率远远低于其他算法。

图 3显示了各算法的运行消耗时间, Reg-SS-ISOMAP 的时间复杂度小于 IsoProjection, 仅次于 SS-MMP, 在7种算法中排在第3的位置。

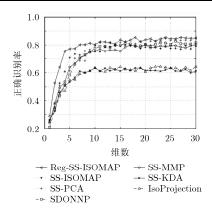


图 1 未标签样本识别结果比较

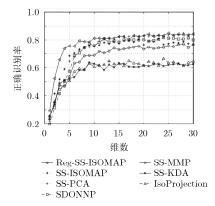


图 2 测试样本识别结果比较

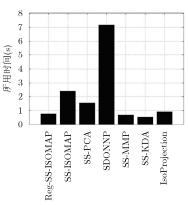


图 3 不同算法时间在 MNIST 上的比较

#### 4.2 ORL 人脸数据库验证

首先利用 PCA 降维,保留 99%的主成分。取每类 6 个作为训练样本, 50%已知标签,其余用于测试。结合 KNN 分类器观察七种算法的识别率,目标维数 d 分别取 10,20,30,40,50。表 3 和表 4 显示了实验结果,分析可知:

(1)SS-KDA 算法得到最高的识别率,但其在手写数字实验中却最低,说明此算法具有很大的不稳定性。而 Reg-SS-ISOMAP 算法在 ORL 数据库上虽能取到较好的降维效果,但识别率还有待提高。

表 3 未标签样本不同目标维数的识别率(%)

算法 -	目标维数						
	10	20	30	40	50		
Reg-SS-ISOMAP	82.50	86.67	89.17	88.33	90.83		
SS-ISOMAP	72.33	76.00	80.17	78.00	75.83		
SS-PCA	83.67	84.50	88.33	91.00	90.50		
SDONNP	86.33	87.00	88.17	90.83	88.33		
SS-MMP	69.17	76.17	80.67	82.50	82.83		
SS-KDA	89.50	90.83	88.67	92.00	91.50		
IsoProjection	68.50	70.67	75.50	76.83	77.71		

表 4 测试样本不同目标维数的识别率(%)

算法	目标维数						
开仏	10	20	30	40	50		
Reg-SS-ISOMAP	81.87	83.12	85.12	87.50	87.50		
SS-ISOMAP	71.87	78.62	77.50	78.38	75.87		
SS-PCA	82.37	86.75	89.50	87.62	89.00		
SDONNP	86.37	88.25	89.12	89.37	87.50		
SS-MMP	40.92	56.50	67.00	70.75	71.50		
SS-KDA	89.62	87.87	90.12	90.63	88.65		
IsoProjection	68.50	74.00	75.12	77.37	80.23		

(2)SS-MMP 算法未标签样本识别率和测试样本识别率相差 10%以上,说明在 ORL 数据集上构建的显示映射不能像 Reg-SS-ISOMAP 那样既能准确得到未标签样本的低维表示,又能准确得到测试样本的低维表示。

#### 4.3 UCI 数据库验证

将7种算法分别在表5中的4个数据集上进行降维,并用 KNN 分类器进行比较,取各算法的最佳识别率。50%训练样本为标签数据。

表 5 实验所用数据集

数据集	类别数	降维前/后维数	训练/测试样本数
dia	2	8/5	336/200
son	2	60/5	100/90
iri	3	4/3	90/60
$_{ m ukm}$	4	5/2	120/80

从表 6、表 7 可以看出:

- (1)Reg-SS-ISOMAP 算法对所有测试样本,在4 个数据集上的平均识别率是最高的。在 dia, son, iri 数据集上识别率高于 IsoProjection 算法,但在 ukm 上低于 IsoProjection 算法。
- (2)IsoProjection算法虽然在手写数字实验中的效果不理想,但在 UCI 数据库上效果还比较好。
- (3)Reg-SS-ISOMAP 算法弥补了 SS-ISOMAP 邻域值大的缺点,未标签样本和测试样本的平均识 别率也比 SS-ISOMAP 提高了 8.28%和 8.31%。

#### 5 结束语

本文提出了一种基于正则化的半监督 ISOMAP 数据降维方法。算法首先利用标签样本构建半监督 邻域图,然后用求得的测地线距离作为矢量特征代替原始数据点,并通过测地线距离计算核矩阵,最后用构建的半监督正则化方法处理矢量特征,得到

数据集	Reg-SS-ISOMAP	SS-ISOMAP	SS-PCA	SDONNP	SS-MMP	SS-KDA	IsoProjection
dia	0.7167	0.6630	0.6630	0.6559	0.6702	0.6714	0.6488
son	0.7360	0.6320	0.7000	0.6950	0.6840	0.7000	0.6360
Iri	0.9733	0.9600	0.9378	0.9645	0.9689	0.9689	0.9600
$_{ m ukm}$	0.8467	0.6867	0.6367	0.8333	0.7600	0.8000	0.8833
平均	0.8182	0.7354	0.7344	0.7872	0.7708	0.7851	0.7820

#### 表 6 不同算法对未标签样本降维后的正确识别率

表 7 不同算法对测试样本降维后的正确识别率

数据库	Reg-SS-ISOMAP	SS-ISOMAP	SS-PCA	SDONNP	SS-MMP	SS-KDA	IsoProjection
dia	0.7120	0.6710	0.6460	0.6650	0.6560	0.7110	0.6650
son	0.7356	0.6733	0.7111	0.7244	0.6244	0.7000	0.6467
Iri	0.9833	0.9533	0.9567	0.9567	0.9600	0.9556	0.9533
ukm	0.8895	0.6905	0.6400	0.8255	0.7650	0.8350	0.9195
平均	0.8301	0.7470	0.7385	0.7929	0.7514	0.8004	0.7961

显式映射。算法依次在手写数字,ORL 人脸数据库和 UCI 数据库上进行验证,结果显示算法比其他半监督降维方法更加稳定,可靠,具有更大的适用性。

#### 参考文献

- ROWEIS S and SAUL L. Nonlinear dimensionality reduction by locally linear embedding[J]. Science, 2000, 290(5500): 2323-2326.
- BELKIN M and NIYOGI P. Laplacian eigenmaps for dimensionality reduction and data representation[J]. Neural Computation, 2003, 15(6): 1373–1396.
- [3] KIMA Kyoungok and LEE Daewon. Inductive manifold learning using structured support vector machine[J]. Pattern Recognition, 2014, 47(1): 470-479.

杜春, 邹焕新, 孙即祥, 等. 基于改进局部切空间排列的流形

Technology, 2014, 36(2): 277-284. doi: 10.3724/SP.J.1146.

- 学习算法[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(2): 277-284. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.00135.

  DU Chun, ZOU Huanxin, SUN Jixiang, et al. Manifold learning algorithm based on modified local Tangent space alignment[J]. Journal of Electronics & Information
- 2013.00135.

  [5] YANG Xin, FU Haoying, ZHA Hongyuan, et al. Semi-supervised nonlinear dimensionality reduction[C].

  Proceedings of 32rd International Conference on Machine
- [6] HANSEN T J, ABRAHAMSEN T J, and HANSEN L K. Denoising by semi-supervised kernel PCA preimaging[J]. Pattern Recognition Letters, 2014, 49: 114–120.

Learning, New York, 2006: 1065-1072.

- [7] WALDER C, HENAO R, Morten Mørup, et al. Semi-supervised kernel PCA[OL]. http://arxiv.org/abs/ 1008.1398v1.pdf, 2014. 12.
- [8] HE Xiaofei, CAI Deng, and HAN Jiawei. Learning a maximum margin subspace for image retrieval[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2008, 20(2): 189–201.

- [9] CAI Deng, HE Xiaofei, and HAN Jiawei. Semi-supervised discriminant analysis[C]. Proceedings of the 11th IEEE International Conference on Computer Vision. Piscataway, 2007: 1–7.
- [10] CAI Deng, HE Xiaofei, and HAN Jiawe. Isometric projection [C]. Proceedings of 22nd Conference on Artificial Intelligence, New York, 2007: 528–533.
- [11] BELKIN M, NIYOGI P, and SANDHWANI V. Mainifold regularization: a geometric framework for learning from labeled and unlabeled examples[J]. *Journal of Machine Learning Research*, 2006, 7(11): 2399–2434.
- [12] 方耀宁,郭云飞,丁雪涛,等.一种基于标签迁移学习的改进 正则化奇异值分解推荐算法[J]. 电子与信息学报,2013, 35(12): 3044-3050. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.00290. FANG Yaoning, GUO Yunfei, DING Xuetao et al. An improved regularized singular value decomposition recommender algorithm based on tag transfer learning[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2013, 35(12): 3044-3050. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.00290.
- [13] ZHOU Yong, LIU Beizuo, XIA Shixiong, et al. Semisupervised extreme learning machine with manifold and pairwise constraints regularization[J]. Neurocomputing, 2015, 149: 180–186.
- [14] WANG Yunyun, CHEN Songcan, XUE Hui, et al. Semisupervised classification learning by discrimination-aware manifold regularization[J]. Neurocomputing, 2015, 147: 299–306.
- [15] MAO Yu, ZHOU Yanquan, LI Ruifan, et al. Semi-supervised learning via manifold regularization[J]. The Journal of China Universities of Posts and Telecommunications, 2012, 19(6): 79–88.

王宪保: 男,1977年生,博士,讲师,主要研究方向为模式识别、 机器学习、神经网络等.

陈诗文: 男,1990年生,硕士生,研究方向为机器学习等.

姚明海: 男,1963 年生,教授,博士生导师,主要研究方向为模式识别、机器学习等.