

基于子空间旋转变换的低复杂度波达角估计算法

闫锋刚^{①②} 齐晓辉*^② 刘帅^② 沈毅^① 金铭^②

^①(哈尔滨工业大学 哈尔滨 150001)

^②(哈尔滨工业大学(威海) 威海 264209)

摘要: 多重信号分选(Multiple Signal Classification, MUSIC)算法是波达方向(Direction-Of-Arrival, DOA)估计的最重要算法之一,但庞大的计算量使其工程实用性大打折扣。为降低 MUSIC 的计算量,该文基于子空间旋转(Subspace Rotation Technique, SRT)变换思想提出了一种高效改进算法,即 SRT-MUSIC 算法。SRT-MUSIC 利用秩亏特性对噪声子空间矩阵按行分块并以旋转变换得到降维噪声子空间,进而基于该降维噪声子空间与导向矢量的正交性构造空间谱估计信号 DOA。理论分析表明: SRT-MUSIC 能有效避免空间谱搜索中的冗余运算,从而成倍降低算法的计算量。对于大阵元、少信号情况,所提算法计算效率优势更为明显。仿真实验证明了 SRT-MUSIC 的有效性和高效性。

关键词: 波达方向估计; 多重信号分选; 噪声子空间旋转; 低复杂度算法

中图分类号: TN959.2

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2016)03-0629-06

DOI: 10.11999/JEIT150539

Low-complexity DOA Estimation via Subspace Rotation Technique

YAN Fenggang^{①②} QI Xiaohui^② LIU Shuai^② SHEN Yi^① JIN Ming^②

^①(Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

^②(Harbin Institute of Technology at Weihai, Weihai 264209, China)

Abstract: The Multiple Signal Classification (MUSIC) algorithm is one of the most important techniques for Direction-Of-Arrival (DOA) estimate. However, this method is found expensive in practical applications, due to the heavy computational cost involved. To reduce the complexity, a novel efficient estimator based on Subspace Rotation Technique (STR) is proposed. The key idea is to divide the noise subspace matrix along its row direction into two sub-matrices, and perform STR to get a new rotated sub-noise subspace with reduced dimensions. As this rotated sub-noise subspace is also orthogonal to the signal subspace, a new cost function is finally derived to estimate DOAs. Theoretical analysis indicates that redundancy computations in spectral search are efficiently avoided by the proposed method as compared to MUSIC, especially in scenarios where large numbers of sensors are applied to locate small numbers of signals. Simulation results verify the effectiveness and efficiency of the new technique.

Key words: Direction-Of-Arrival (DOA) estimate; Multiple Signal Classification (MUSIC); Noise subspace rotation; Low-complexity algorithm

1 引言

基于子空间理论的多重信号分类(Multiple

Signal Classification, MUSIC)算法^[1]是波达方向(Direction-of-Arrival, DOA)估计^[2-4]领域最重要的方法之一。该算法通过对阵列输出协方差矩阵进行特征值分解(Eigen-Value Decomposition, EVD)或奇异值分解(Singular Value De-composition, SVD)得到相互正交的信号子空间和噪声子空间,进而构造针状空间谱并以空间谱极值搜索估计信号 DOA。由于信号子空间和噪声子空间在无噪模型下是完全正交的,因此 MUSIC 理论上具有对任意靠近目标分辨的“超分辨”性能^[5]。相比于旋转不变子空间(Estimate Signal Parameter via Rotational Invariance Techniques, ESPRIT)^[6]及求根 MUSIC

收稿日期: 2015-05-07; 改回日期: 2015-12-18; 网络出版: 2016-01-22

*通信作者: 齐晓辉 qixiaohui@hitwh.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(61501142), 山东省自然科学基金(ZR2014FQ003), 中国博士后科学基金(2015M571414), 中央高校基本科研业务费专项资金(HIT.NSRIF.2016102)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61501142), Shandong Provincial Natural Science Foundation (ZR2014FQ003), China Postdoctoral Science Foundation (2015M571414), The Fundamental Research Funds for the Central Universities (HIT.NSRIF.2016102)

(root-MUSIC)^[7]对于阵列结构的强约束性, MUSIC能够适用于任意阵列, 因而具有广泛的实用价值。

虽然 MUSIC 诞生已近 40 年, 然而随着测向需求的深入, 人们发现理论上具有近乎完美性能的音乐算法在实际应用中依然存在众多缺陷, 其中, 计算量过大是阻碍其工程化进度的主要因素之一^[8]。近年来, 学者们先后提出了实值变换(Unitary root-MUSIC, U-root-MUSIC)^[9]、降维处理(Reduced Dimensional MUSIC, RD-MUSIC)^[10]、流型分离(Manifold Separation Technique, MST)^[11]、频域求根(Fourier Domain root MUSIC, FD-root-MUSIC)^[12]等众多高效率算法, 但相比于 MUSIC, 这些算法要么对入射信号的形式或阵列的几何结构提出了不同程度的假设, 要么牺牲了过多的估计精度^[13]。本文基于噪声子空间矩阵的秩亏特性, 采用子空间旋转技术(Subspace Rotation Technique, SRT)得到降维噪声子空间, 进而以该降维噪声子空间构造 SRT-MUSIC 目标函数并以空间谱搜索估计信号 DOA。相比于旋转不变类和求根类算法对于阵列结构的强依赖性, SRT-MUSIC 对阵列结构无任何假设; 不同于 MST 和 FD-root-MUSIC 的过大估计误差, SRT-MUSIC 具有接近于 MUSIC 的估计精度和改进的角度分辨能力, 因而取得了阵列结构普适性和算法高效性的兼容。

2 数据模型及 MUSIC 算法

2.1 数据模型

设空间有 L 个窄带信号同时入射到 xoy 平面 M 个半波长线性阵列^[14], 设各通道独立且附加加性高斯白噪声(Additive Gaussian White Noise, AGWN), 定义 DOA 为信号来向与阵列法线的夹角 θ , 则阵列一次快拍接收数据可表示为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

式中, $\mathbf{x}(t)$ 是 $M \times 1$ 维接收数据向量, $\mathbf{s}(t)$ 是 $L \times 1$ 维信号向量, $\mathbf{n}(t)$ 是 $M \times 1$ 维 AGWN 向量, $\mathbf{A}(\theta)$ 是 $M \times L$ 维导向矢量矩阵, 导向矢量 $\mathbf{a}(\theta)$ 定义为

$$\mathbf{a}(\theta) = \left[\exp(-ix_1\omega) \quad \exp(-ix_2\omega) \quad \cdots \quad \exp(-ix_M\omega) \right]^T \quad (2)$$

其中, $\omega \triangleq 2\pi \sin \theta / \lambda$, $x_i (i = 1, 2, \dots, M)$ 是第 i 个阵元的坐标, λ 是信号中心波长。阵列输出协方差矩阵定义为

$$\mathbf{R} = E \{ \mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t) \} = \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma_n^2\mathbf{I} \quad (3)$$

其中, \mathbf{R}_s 为信号协方差, σ_n^2 为 AGWN 功率。

2.2 经典 MUSIC 算法

考察阵列协方差矩阵的 EVD:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^L \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H + \sum_{j=L+1}^M \lambda_j \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^H \quad (4)$$

式中, $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, L$ 和 $\lambda_j, j = L+1, \dots, M$ 分别为 \mathbf{R} 的 L 个大特征值及 $(M-L)$ 个小特征值, \mathbf{e}_i 和 \mathbf{e}_j 分别为 λ_i 和 λ_j 对应的特征矢量。定义:

$$\mathbf{S} \triangleq [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_L], \quad \mathbf{G} \triangleq [\mathbf{e}_{L+1}, \mathbf{e}_{L+2}, \dots, \mathbf{e}_M] \quad (5)$$

则 \mathbf{S} 和 \mathbf{G} 的列分别张成信号子空间和噪声子空间。实际中, 受 AGWN 影响, 只能用 N 快拍接收数据对 $\hat{\mathbf{R}}$ 进行式(6)的估计:

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i(t)\mathbf{x}_i^H(t) \quad (6)$$

于是, 阵列输出协方差矩阵 EVD 实际上可写为

$$\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{\Lambda}}_s\hat{\mathbf{S}}^H + \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{\Lambda}}_n\hat{\mathbf{G}}^H \quad (7)$$

根据子空间的正交性原理 $\text{span}(\mathbf{S}) \perp \text{span}(\mathbf{G})$ 以及导向矢量矩阵与信号子空间关系 $\text{span}(\mathbf{S}) = \text{span}(\mathbf{A})$, MUSIC 算法构造如式(8)所示的空间谱函数:

$$f_{\text{MUSIC}}(\theta) = \frac{1}{\|\mathbf{a}^H(\theta)\hat{\mathbf{G}}\|^2} \quad (8)$$

通过在空间遍历搜索, 使 $f_{\text{MUSIC}}(\theta)$ 取得极大值的 L 个入射角 θ 即为信号 DOA。MUSIC 算法的最大优点是分辨率高, 能适用任意阵列结构, 但其包含繁杂的空间谱搜索, 计算量异常庞大。

3 基于子空间旋转的 SRT-MUSIC 算法

3.1 子空间旋转及谱函数构造

由于噪声子空间矩阵 \mathbf{G} 的大小为 $M \times (M-L)$, 故其行数大于列数, 我们可对该矩阵进行如式(9)所示的分块划分:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \underbrace{\mathbf{G}_1}_{M-L} \\ \underbrace{\mathbf{G}_2}_{M-L} \end{pmatrix} \begin{matrix} M-p \\ p \end{matrix} \quad (9)$$

其中, 子矩阵 \mathbf{G}_1 的大小为 $(M-p) \times (M-L)$, 子矩阵 \mathbf{G}_2 的大小为 $p \times (M-L)$ 。由于

$$\text{rank}(\mathbf{G}) = \dim[\text{span}(\mathbf{G})] = M-L \quad (10)$$

因此, 当

$$2 \leq p \leq M-L \quad (11)$$

时, \mathbf{G}_2 为行满秩矩阵。由矩阵理论可知^[14], 此时 \mathbf{G}_2 存在右逆矩阵 \mathbf{G}_2^\dagger , 使得 $\mathbf{G}_2\mathbf{G}_2^\dagger = \mathbf{I}$ 。

利用 \mathbf{G}_2^\dagger , 可对原噪声子空间矩阵 \mathbf{G} 进行如式(12)所示的变换:

$$\mathbf{G}_{\text{new}} \triangleq \mathbf{G}\mathbf{G}_2^\dagger \quad (12)$$

由于乘积 $\mathbf{G}\mathbf{G}_2^\dagger$ 可表示为矩阵 \mathbf{G} 列向量的加权和, 故上述变换实质上是将矩阵 \mathbf{G} 的列空间 $\text{span}(\mathbf{G})$ 在 M 维空间进行了一定角度的旋转。考虑到

$$\text{rank}(\mathbf{G}_{\text{new}}) \leq \min[\text{rank}(\mathbf{G}), \text{rank}(\mathbf{G}_2^\dagger)] \quad (13)$$

因此, 矩阵 \mathbf{G}_{new} 的列空间是矩阵 \mathbf{G} 列空间的一个子集, 即

$$\text{span}(\mathbf{G}_{\text{new}}) \subseteq \text{span}(\mathbf{G}) \quad (14)$$

由信号子空间与噪声子空间的正交性以及式(14)可知: 旋转后的子空间 $\text{span}(\mathbf{G}_{\text{new}})$ 必然与导向矢量矩阵列空间 $\text{span}(\mathbf{A})$ 正交, 即

$$\text{span}(\mathbf{G}_{\text{new}}) \perp \text{span}(\mathbf{A}) \quad (15)$$

根据式(15), 可定义如式(16)所示的空间谱函数。

$$f_{\text{SRT-MUSIC}}(\theta) = \frac{1}{\|\mathbf{a}^H(\theta)\widehat{\mathbf{G}}_{\text{new}}\|^2} \quad (16)$$

在 $[-\pi/2, \pi/2]$ 内遍历搜索, 使 $f_{\text{SRT-MUSIC}}(\theta)$ 取得极大值的 L 个入射角 θ 即为信号 DOA。后文分析将表明: 相比于经典 MUSIC 算法, SRT-MUSIC 能显著降低空间谱搜索的复杂度, 从而提高算法的整体计算效率。

3.2 SRT-MUSIC 化简

将式(9)代入式(12), 可得:

$$\mathbf{G}_{\text{new}} = \mathbf{G}\mathbf{G}_2^\dagger = \begin{pmatrix} \underbrace{\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2^\dagger}_p M-p \\ \underbrace{\mathbf{G}_2\mathbf{G}_2^\dagger}_p p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{\mathbf{G}_{\text{rot}}}_p M-p \\ \underbrace{\mathbf{I}}_p p \end{pmatrix} \quad (17)$$

其中,

$$\mathbf{G}_{\text{rot}} \triangleq \mathbf{G}_1\mathbf{G}_2^\dagger \quad (18)$$

是大小为 $(M-p) \times p$ 矩阵。

对 $M \times 1$ 的导向矢量 $\mathbf{a}(\theta, \phi)$ 进行如式(19)所示的划分:

$$\mathbf{a}(\theta) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1(\theta) M-p \\ \mathbf{a}_2(\theta) p \end{pmatrix} \quad (19)$$

利用式(17)和式(19), 可得(为了书写方便, 推导中省略了导向矢量的角度标记):

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}^H\mathbf{G}_{\text{new}}\|^2 &= \mathbf{a}^H\mathbf{G}_{\text{new}}\mathbf{G}_{\text{new}}^H\mathbf{a} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^H & \mathbf{a}_2^H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{\text{rot}}\mathbf{G}_{\text{rot}}^H & \mathbf{G}_{\text{rot}} \\ \mathbf{G}_{\text{rot}}^H & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{a}_1^H\mathbf{G}_{\text{rot}}\mathbf{G}_{\text{rot}}^H\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_1^H\mathbf{G}_{\text{rot}}\mathbf{a}_2 \\ &\quad + \mathbf{a}_2^H\mathbf{G}_{\text{rot}}^H\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2^H\mathbf{a}_2 \\ &= \|\mathbf{a}_1^H\mathbf{G}_{\text{rot}}\|^2 + 2\text{Re}(\mathbf{a}_1^H\mathbf{G}_{\text{rot}}\mathbf{a}_2) + \|\mathbf{a}_2\|^2 \\ &\triangleq \|\boldsymbol{\xi}\|^2 + 2\text{Re}(\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{a}_2 \rangle) + \|\mathbf{a}_2\|^2 \end{aligned} \quad (20)$$

其中,

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\theta) \triangleq \mathbf{G}_{\text{rot}}^H\mathbf{a}_1(\theta) \quad (21)$$

由于 $\forall(\theta), \|\mathbf{a}_2(\theta)\|^2 \equiv p$, 所以 SRT-MUSIC 可最终可化简为

$$f_{\text{SRT-MUSIC}}(\theta) = \frac{1}{\|\widehat{\boldsymbol{\xi}}(\theta)\|^2 + 2\text{Re}(\langle \widehat{\boldsymbol{\xi}}(\theta), \mathbf{a}_2(\theta) \rangle) + p} \quad (22)$$

对比式(8)和式(22)可见: MUSIC 的单项运算 $\|\mathbf{a}^H\mathbf{G}_{\text{new}}\|^2$ 对应于 SRT-MUSIC 的两项运算 $\|\widehat{\boldsymbol{\xi}}(\theta)\|^2$ 和 $\langle \widehat{\boldsymbol{\xi}}(\theta), \mathbf{a}_2(\theta) \rangle$ (p 是常实数)。由于 $\boldsymbol{\xi}(\theta)$, $\mathbf{a}_2(\theta)$ 及 \mathbf{G}_{rot} 的维度均与 p 有关, 因此 SRT-MUSIC 算法的计算量会受到 p 取值的较大影响。后文分析将表明: 当 p 取得最优值时, SRT-MUSIC 相比于 MUSIC 能大幅提高算法的计算效率。

3.3 p 最优值讨论

前文曾在式(11)中对 p 的取值范围进行了限定, 即当且仅当 $2 \leq p \leq M-L$ 时, \mathbf{G}_2 才存在右逆矩阵。这里, 从算法复杂度(即复数乘法次数)改善角度入手, 对 p 的取值进行进一步讨论。

SRT-MUSIC 和 MUSIC 都包含了矩阵 \mathbf{R}_s 的 EVD/SVD 步骤。采用文献[15]给出的快速子空间分解算法(Fast Subspace Decomposition, FSD), \mathbf{R}_s 的 EVD/SVD 复杂度为

$$C_{\text{FSD}} = O(M^2L) \quad (23)$$

相比于 MUSIC, SRT-MUSIC 需要额外计算矩阵 \mathbf{G}_2^\dagger 和 \mathbf{G}_{new} , 注意到 \mathbf{G} 大小为 $M \times (M-L)$ 而 \mathbf{G}_2^\dagger 大小为 $(M-L) \times p$, 根据式(12)可知, \mathbf{G}_{new} 的计算复杂度为

$$C_{\mathbf{G}_{\text{new}}}(p) = O[pM(M-L)] + O[M(M-L)] \quad (24)$$

设搜索范围 $[-\pi/2, \pi/2]$ 内总搜索点数为 J 。对于 MUSIC, 由于 $\mathbf{a}(\theta)$ 和 \mathbf{G} 的大小分别为 $M \times 1$ 和 $M \times (M-L)$, 故 MUSIC 计算每个谱值的复杂度为 $O[(M+1) \times (M-L)]$, 故 MUSIC 的复杂度为

$$C_{\text{MUSIC}}(p) = O(M^2L) + O[J(M+1) \times (M-L)] \quad (25)$$

由于 $\boldsymbol{\xi}(\theta)$, $\mathbf{a}_1(\theta)$, \mathbf{G}_{rot} 的大小分别为 $p \times 1$, $(M-p) \times 1$ 和 $(M-p) \times p$, 故计算 $\|\widehat{\boldsymbol{\xi}}(\theta)\|^2$ 的复杂度为 $O[p(M+1-p)]$ 。由于 $\mathbf{a}_2(\theta)$ 为大小 $p \times 1$ 的向量, 故计算 $\langle \widehat{\boldsymbol{\xi}}(\theta), \mathbf{a}_2(\theta) \rangle$ 的复杂度 $O[p(M+1-p)]$ 的计算量。综上, SRT-MUSIC 的复杂度为

$$\begin{aligned} C_{\text{SRT-MUSIC}}(p) &= O(M^2L) + O[pM(M-L)] \\ &\quad + O[M(M-L)] + O[2Jp(M+1-p)] \end{aligned} \quad (26)$$

一般而言, 我们有 $J \gg M > L$ [7,13], 因此可作近似:

$$\begin{cases} C_{\text{MUSIC}}(p) \approx O[J(M+1) \times (M-L)] \\ C_{\text{SRT-MUSIC}}(p) \approx O[2Jp(M+1-p)] \end{cases} \quad (27)$$

显然, p 的选择需以 $C_{\text{SRT-MUSIC}}(p)$ 取得最小值为原则, 同时必须受到式(11)的约束, 即

$$\min_p C_{\text{SRT-MUSIC}}(p), \quad \text{s.t. } 2 \leq p \leq M-L \quad (28)$$

现在, 分3种情况讨论最优值 p_{opt} 的选择:

(1) $M \geq 2L+1$: 由于 $M > L$, 所以此时亦有 $M-L \geq (M+1)/2$ 成立。由于 $L \geq 1$, 故亦有 $M-L \geq 2$ 及 $(M+1)/2 \geq 2$ 成立。综上, $C_{\text{SRT-MUSIC}}(p)$ 在边界 $p=2$ 及 $p=M-L$ 取值相对关系如图 1(a)所示。由于 $C_{\text{SRT-MUSIC}}(2) < C_{\text{SRT-MUSIC}}(M-L)$, 故 p 最优值为 $p_{\text{opt}}=2$ 。

(2) $L+2 \leq M < 2L+1$: 同理, 由于 $L \geq 1$, 亦有 $M-L < (M+1)/2$ 以及 $M-L \geq 2$ 成立。此时 $C_{\text{SRT-MUSIC}}(p)$ 的边界取值相对关系如图 1(b)所示。由于 $C_{\text{SRT-MUSIC}}(2) < C_{\text{SRT-MUSIC}}(p)$, 因此, $p_{\text{opt}}=2$ 。

(3) $M < L+2$, 或等价地, $M=L+1$ (注意 $M > L$): 显然, 此时有 $M-L < (M+1)/2$ 成立, $C_{\text{SRT-MUSIC}}(p)$ 边界取值如图 1(c)所示, 因此 $p_{\text{opt}}=M-L=1$ 。受式(11)约束, 同时考虑到式(9), 可在 \mathbf{G} 分块时将 \mathbf{G}_1 和 \mathbf{G}_2 互换, 故此情况下可取 $p_{\text{opt}}=M-1$ 。

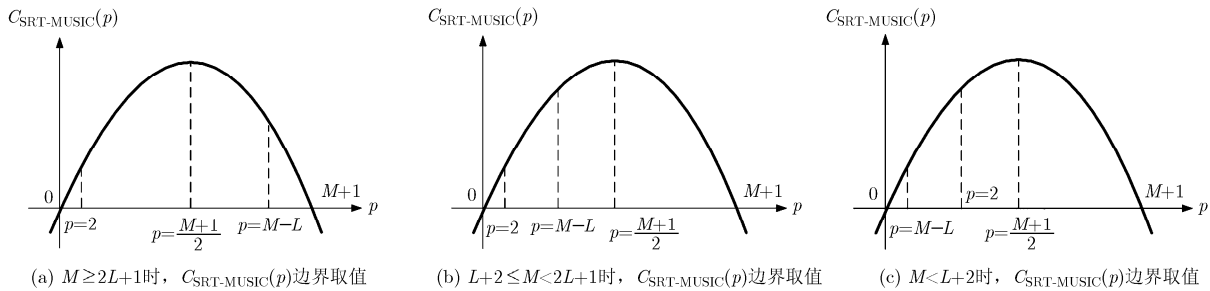


图1 $C_{\text{SRT-MUSIC}}(p)$ 边界取值的3种情况

根据以上分析, p 最优值为

$$p_{\text{opt}} = \begin{cases} 2, & M \geq L+2 \\ M-1, & M < L+2 \end{cases} \quad (29)$$

3.4 复杂度分析

将式(29)代入式(27), 可得 $p=p_{\text{opt}}$ 时 SRT-MUSIC 算法的复杂度为

$$C_{\text{SRT-MUSIC}}(p) = 4J(M-1) \quad (30)$$

因此, MUSIC 和 SRT-MUSIC 的算法复杂度比值为

$$K \triangleq \frac{C_{\text{MUSIC}}(p)}{C_{\text{SRT-MUSIC}}(p)} = \frac{(M+1)(M-L)}{4(M-1)} \quad (31)$$

图2给出了 K 随阵元数的变化趋势。可见, 在大阵元、少信号情境下, SRT-MUSIC 相比于 MUSIC 的计算效率优势异常明显。理论上, 为保证 DOA 估计功能正确性, 只需取 $M > L$ 即可, 但实际工程中为达到较好估计精度, 通常 M 会比 L 大很多。因此, 从实际工程角度来看, 本文算法相比于 MUSIC 能大幅提高 DOA 估计的计算效率。

3.5 实施步骤

综上所述, 本文基于噪声子空间旋转技术的 SRT-MUSIC 算法具体实施步骤可总结如表1所示。

4 仿真实验

为了说明本文算法的有效性和可行性, 以计算机仿真验证 SRT-MUSIC 的功能和性能并与 MUSIC 及文献[16]给出的算法作对比分析。选取各

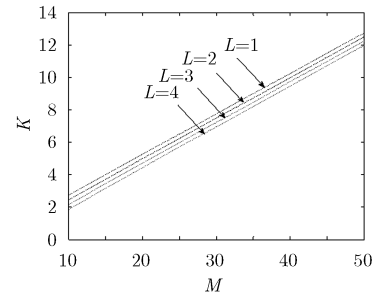


图2 复杂度比值 K 与阵元数 M 关系

表1 SRT-MUSIC 算法实施步骤

SRV-MUSIC 算法

输入: N 快拍阵列接收数据 $\mathbf{x}(t), t=1, 2, \dots, L$ 。

初始化: $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\theta} = \{0\}, k=1/N$ 。

(1) for $i \leftarrow 1$ to N do

$\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{R}} + k\mathbf{x}(i)\mathbf{x}^H(i)$

end

(2) 计算 $\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{S}}\hat{\boldsymbol{\Lambda}}\hat{\mathbf{S}}^H + \hat{\mathbf{G}}\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_n\hat{\mathbf{G}}^H$;

(3) 据式(26)选择 p , 依式(9)和式(19)分别对 $\hat{\mathbf{G}}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}(\theta)$ 分块;

(4) 根据式(22)构造空间谱 $f_{\text{SRT-MUSIC}}(\theta)$;

(5) for each $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ do

$\hat{\theta}_i = \arg \min_{\theta} f_{\text{SRT-MUSIC}}(\theta), i=1, 2, \dots, L$

end

输出: 由信号 DOA 构成的角度集合 $\boldsymbol{\theta}$ 。

向半波长均匀线阵(Uniform Linear Array, ULA), 各试验结果均为 500 次蒙特卡罗的统计平均。对于信号入射角 θ 估计值 $\hat{\theta}$ 的最小均方误差(Root Mean Square Error, RMSE)定义为

$$RMSE \triangleq \sqrt{\frac{1}{500} \sum_{i=1}^{500} (\hat{\theta}_i - \theta)^2} \quad (32)$$

对于两个靠近角度 θ_1 和 θ_2 , 当谱函数 $f(\cdot)$ 取值满足^[17]

$$\frac{f(\theta_1) + f(\theta_2)}{2} > f\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \quad (33)$$

即认为 θ_1 和 θ_2 分辨成功。

图 3 和图 4 分别给出了不同算法的 DOA 估计精度随信噪比(Signal-to-Noise Ratio, SNR)和快拍数的对比关系。实验选取 $M=12$ 半波长 ULA, $L=2$ 个信号分别位于 $\theta_1 = -30^\circ$ 和 $\theta_2 = 20^\circ$ 处。为了对比不同算法的估计精度, 同时考察了 MUSIC, SRT-MUSIC 和文献[16]中低复杂度求根算法。图 3 中固定 $N=100$ 而图 4 中固定 $SNR=5$ dB。

由图 3 和图 4 可见, 虽然文献[16]中的算法计算效率优势明显, 然而该算法不但只能适用于 ULA, 而且估计精度远差于本文提出的 SRT-MUSIC 算法。另一方面, 图 3 和图 4 亦表明, SRT-MUSIC 具有接近于 MUSIC 的估计精度, 故本文算法在有效降低计算量的同时, 并未引起估计精度的过大牺牲。

图 5 和图 6 分别给出了 MUSIC, SRT-MUSIC 及文献[16]中的算法对于位于 $\theta_1 = 15^\circ$ 和 $\theta_2 = 17^\circ$ 的

两个靠近目标的成功分辨概率随 SNR 和快拍数的变换对比关系。其中, 图 5 中固定 $N=100$ 而图 6 中固定 $SNR=10$ dB。

由图 5 和图 6 可见, SRT-MUSIC 算法的分辨率是 3 种算法中最高的, 其在低信噪比($SNR < 0$ dB)和小快拍数($N < 100$)下表现出全面优于 MUSIC 的超分辨性能。另一方面, 相比于 SRT-MUSIC, 文献[16]中的算法由于过分压缩了噪声子空间维度^[16], 因此该算法在分辨靠近目标的时候表现得极不稳定。

图 7 进一步对比了 MUSIC 和 SRT-MUSIC 的 10 次叠加谱线对比情况。其中, 固定 $N=100, SNR=5$ dB。

由图 7 可见, 一方面 SRT-MUSIC 相比于 MUSIC 谱峰更为尖锐, 前者对于靠近目标的分辨能力比后者更强, 这印证了图 5 和图 6 的实验结果; 另一方面, SRT-MUSIC 相比于 MUSIC 谱峰位置更为离散, 故前者的估计精度比后者要差, 这印证了图 3 和图 4 的实验结果。

图 8 给出了 SRT-MUSIC, MUSIC 以及文献[16]中的算法在不同阵元数下完成 DOA 估计的计算效率对比情况。实验选取位于 $\theta_1 = -30^\circ$ 和 $\theta_2 = 20^\circ$ 的两个辐射源, 设置空间谱搜索间隔为 0.053° , 以 Intel(R) Core(TM) Duo T5870 处理器, 2.0 GHz CPU, 1 GB 内存 PC 平台运行 3 种算法的 Matlab 程序, 记录仿真时间随阵元数变化曲线, 结果如图 7 所示。

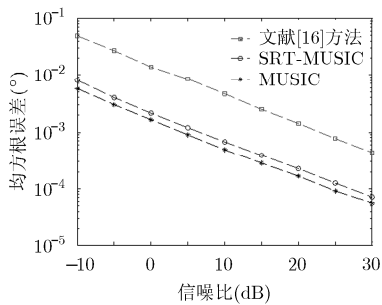


图 3 估计精度与信噪比关系

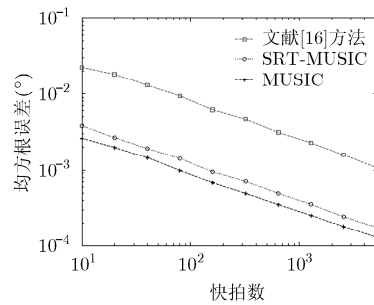


图 4 估计精度与快拍数关系

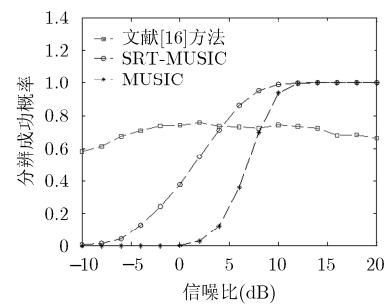


图 5 分辨成功概率与信噪比关系

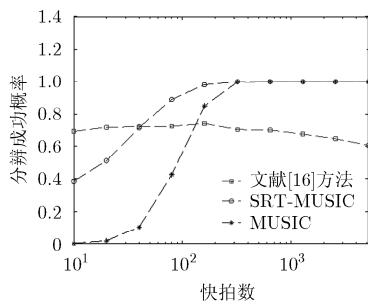


图 6 分辨成功概率与快拍数关系

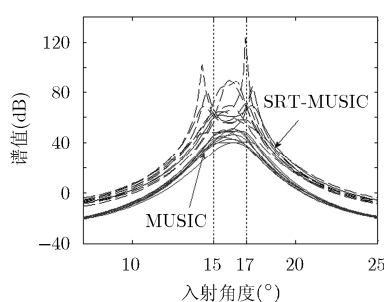


图 7 SRT-MUSIC 和 MUSIC 叠加谱图对比

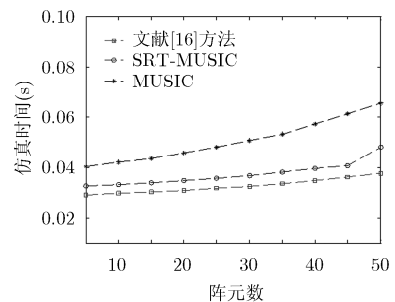


图 8 仿真时间与阵元数关系

由图 8 可见, 本文提出的 SRT-MUSIC 算法的计算效率高于 MUSIC 算法并略接近于文献[16]中的算法。随着阵元数逐步增加, SRT-MUSIC 算法相比于 MUSIC 算法的计算效率越发明显, 这与图 2 所给出的计算量分析结果吻合。

5 结论

本文基于子空间旋转变换思想, 提出了一种新颖的低复杂度 SRT-MUSIC 算法。新算法利用噪声子空间矩的阵秩亏特性, 以分块和子空间旋转重构技术有效避免了空间谱搜索中的冗余计算。相比于经典 MUSIC 算法, SRT-MUSIC 较好地提高了算法的计算效率, 同时基本保持了算法的估计精度, 从而为超分辨理论的工程化推进提供了一定的理论参考。

参考文献

- [1] SCHMIDT R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, 1986, 34(3): 276-280.
- [2] GU J F, ZHU W P, and SWAMY M N S. Joint 2-D DOA estimation via sparse L-shaped array[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(5): 1171-1182.
- [3] 毛琳琳, 张群飞, 黄建国, 等. 基于互相关协方差矩阵的改进多重信号分类高分辨波达方位估计方法[J]. *电子与信息学报*, 2015, 37(8): 1886-1891. doi: 10.11999/JEIT141208.
MAO L L, ZHANG Q F, HUANG J G, *et al.* Improved multiple signal classification algorithm for direction of arrival estimation based on covariance matrix of cross-correlation[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2015, 37(8): 1886-1891. doi: 10.11999/JEIT141208.
- [4] LIU Z M and GUO F C. Azimuth and elevation estimation with rotating long-baseline interferometers[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(9): 2405-2419.
- [5] REDDY W, MUBEEN M and NG B P. Reduced-complexity super-resolution DOA estimation with unknown number of sources[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, 22(6): 772-776.
- [6] ROEMER F, *et al.* Analytical performance assessment of multidimensional matrix- and tensor-based ESPRIT-type algorithms[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(10): 2611-2625.
- [7] YAN F G, SHEN Y, and JIN M. Fast DOA estimation based on a split subspace decomposition on the array covariance matrix[J]. *Signal Processing*, 2015, 115(10): 1-8.
- [8] 闫锋刚, 王军, 沈毅, 等. 基于半实值 Capon 的高效波达方向估计算法[J]. *电子与信息学报*, 2015, 37(4): 811-816. doi: 10.11999/JEIT141034.
YAN F G, WANG J, SHEN Y, *et al.* Efficient direction-of-arrival estimation based on semi-real-valued capon[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2015, 37(4): 811-816. doi: 10.11999/JEIT141034.
- [9] CHENG Q, HUANG L, and SO H C. Improved unitary root-MUSIC for DOA estimation based on pseudo-noise resampling[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2014, 21(2): 140-144.
- [10] 蔡晶晶, 等. 强约束优化降维 MUSIC 二维 DOA 估计[J]. *电子与信息学报*, 2014, 36(5): 113-118. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.01127.
CAI J J, *et al.* Two-dimensional DOA estimation using reduced-dimensional MUSIC algorithm with strong-constraint optimization[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014, 36(5): 113-118. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.01127.
- [11] HUA G, *et al.* Efficient two dimensional direction finding via auxiliary-variable manifold separation technique for arbitrary array structure[C]. *IEEE International Conference on Communication Problem-solving (ICCP)*, Beijing, 2014, 532-537.
- [12] RUBSAMEN M and GERSHMAN A B. Direction-of-arrival estimation for nonuniform sensor arrays: from manifold separation to Fourier domain MUSIC methods[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(2): 588-599.
- [13] YAN F G, JIN M, LIU S, *et al.* Real-valued MUSIC for efficient direction estimation with arbitrary array geometries [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(6): 1548-1560.
- [14] GOLUB G H and CHANES VAN LOAN H. *Matrix Computations*[M]. Baltimore, MD: The Johns Hopkins University Press, 1996: 238-246.
- [15] XU G and KAILATH T. Fast subspace decomposition[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 199, 42(3): 539-551.
- [16] REN Q S and WILLIS A J. Fast root MUSIC algorithm[J]. *Electronics Letters*, 1997, 33(6): 450-451.
- [17] ZHANG Q T. Probability of resolution of the MUSIC algorithm[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1994, 43(4): 978-987.

闫锋刚: 男, 1982年生, 博士, 副教授, 主要从事阵列信号处理以及统计性能分析等研究。

齐晓辉: 男, 1973年生, 博士, 副教授, 主要从事极化信号处理、雷达电子对抗及高速实时信号处理等研究。

刘 帅: 男, 1980年生, 博士, 副教授, 主要从事极化信号处理、共形阵列信号处理等研究。

沈 毅: 男, 1965年生, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事智能检测与控制、数字超声成像以及信号处理等研究。

金 铭: 男, 1968年生, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事雷达对抗、空间谱估计、极化阵列信号处理等研究。