

## 基于系统一阶摄动解主频功率比的弱信号检测方法

孙文军\* 芮国胜 张洋 陈强  
(海军航空工程学院电子信息工程系 烟台 264001)

**摘要:** 针对现有混沌检测算法精度不高、状态响应滞后的问题,该文从混沌状态整体性、系统解频域特性等角度进行全面分析,提出一种基于摄动解主频功率比的弱信号检测方法,该算法不仅准确实现了临界状态的有效界定,提高了信号检测的可靠程度,而且揭示了系统各个状态之间的差别及物理含义。文中采用参数摄动法推导了Duffing-Van der pol振子的一阶摄动平衡解,证明了其为影响主频率分量的主要因素。在此基础上,采用经验模态分解方法对有效参量信息进行选择性地重构,以最小均方误差约束准则下的比值系数重新定义了系统状态,得到系统主频功率比与策动力幅值之间的映射关系,并以此作为临界阈值确定的依据。实验结果表明,采用主频功率比准则的信号检测方法可靠性提高了约1个数量级,且算法的响应速度为传统分析方法的2倍以上。

**关键词:** 信号处理; 一阶摄动平衡; 主频功率比; 临界阈值; 最小均方误差

中图分类号: TN911.23

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2016)01-0160-08

DOI: 10.11999/JEIT150510

## Weak Signal Detection Method Based on Dominative Frequency Power Ratio Derived from System's First-order Perturbation Solution

SUN Wenjun RUI Guosheng ZHANG Yang CHEN Qiang

(Department of Electronic Engineering, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai 264001, China)

**Abstract:** Traditional chaotic detection methods have many problems, such as low criterion accuracy and delay state response. To cope with these problems, a weak signal detection method based on dominative frequency power ratio derived from system's first-order perturbation solution is proposed in this paper. This algorithm is ascribable to the all-around analyses of chaotic state's global property and system solution's frequency-domain characteristics. It not only gives an effective and accurate critical threshold which could offer more reliable guarantee for signal detection, but also disclosures the differences between system states and the coherent physical meanings. The first-order perturbation equilibrium solution of Duffing-Van der pol oscillator is derived with parameter perturbation method, and it is proved that this solution is most significant to the dominative frequency. And then, the effective signal is selectively reconstructed through empirical mode decomposition, and system state is redefined with this ratio restrained under MMSE criterion. Finally the mapping relationship between power ratio of dominative frequencies and driving motivation amplitude is obtained and it is considered as determination criterion of critical threshold. Experimental results show that this algorithm could bring an promotion about one order of magnitude in system reliability, and the response speed is at least doubled compared with traditional methods.

**Key words:** Signal processing; First-order perturbation equilibrium; Dominative frequency power ratio; Critical threshold; Minimum Mean Square Error (MMSE)

### 1 引言

弱信号检测技术在现代科学中占有重要地位,一直是国内外研究的热点问题。传统检测方法抑制

噪声能力不强,检测性能难以进一步提高<sup>[1,2]</sup>。1992年, Birkhoff首次将混沌分析理论引入弱信号检测领域,发现系统具有抗噪性强、对周期激励极度敏感的特点。混沌检测理论自此开始得到广泛关注,在遥控遥测、精密仪器、光电通信、超视距雷达等领域展现出重要的应用价值<sup>[3-6]</sup>。

研究表明,准确辨识系统状态响应主要通过解析判据法和特征统计量法实现,是混沌检测的核心领域<sup>[7,8]</sup>。其中,解析判据法是指将系统归结为一个

收稿日期: 2015-05-04; 改回日期: 2015-08-28; 网络出版: 2015-11-18

\*通信作者: 孙文军 djresearch@126.com

基金项目: 国家自然科学基金(41476089)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (41476089)

2 维映射, 通过推导该映射存在横截同宿点的数学条件得到系统判据。解析法主要包含 Melnikov 法、Shilnikov 法等, 可以给出系统状态的整体表达式, 便于研究混沌运动的全局特性。但已有成果表明, 解析判据法的误差较大, 不利于工程应用<sup>[9,10]</sup>。在多维系统的定性研究中, 指数二分法的准确性有所改善, 但本质上仍未脱离解析判据的范畴<sup>[11,12]</sup>。

特征统计量法主要包括 Li 氏指数法、Kolmogorov 熵法等。其中, Li 氏指数法采用系统双向维度上的伸展性实现状态响应的量化判定, 但是系统方程的 Jacobi 矩阵求解困难, 算法复杂度较高。新的特征统计量判据法包括联合卡尔曼增益<sup>[13]</sup>, Floquet 指数<sup>[14]</sup>, 伪 Halmiton 能量<sup>[15]</sup>等, 这些算法可以结合待测信号的时频信息, 提高了混沌检测算法的准确性, 具有重要的借鉴意义。然而, 这类方法也存在自身的局限性, 即只能针对某些特定相态之间的改变提供离散特征值, 而缺乏系统运动特性与系统参数之间的关系分析, 无法反映混沌系统状态整体特性的变化。

针对此类问题, 本文通过分析混沌系统解随系统动力特性的变化, 引入了一种新的特征参量准则来实现系统状态的定量描述, 从而达到全局跟踪的目的。但是, 新准则的运行需要建立在混沌系统解的准确求解上, 即若要凸显系统特征变化, 必须从混沌系统解入手进行全面的分析, 而现存文献<sup>[16-19]</sup>中虽有大量积累, 但是集中于分析系统状态演变的时域特性, 而忽略了混沌检测算法频域参数特性尤其是频率“相关”特性的本质, 特征区分度不大, 从而使得混沌检测性能难以获得更高层次的提高。

本文首先采用参数摄动法分解系统模型, 通过时间尺度变换和谐波参量平衡的方法确定了系统主频参量, 并对系统不同状态条件下的频域特性差异进行分析; 在此基础上, 提出了一种基于混沌系统一阶摄动解主频功率比的弱信号检测方法。该方法一方面建立了主频功率比与系统激励幅值之间的映射关系, 实现了系统全局特性的量化描述, 另一方面结合相关分量预处理、频率成分筛选条件构建了主频功率比确定准则, 可以实现弱信号的准确检测。最后, 采用多组微弱电力载波信号对新算法的阈值状态确定、检测性能进行了对比分析。本文研究弥补了现有检测算法在状态整体性、系统解频域特性方面分析不足的缺点, 提出了基于混沌系统一阶摄动解主频功率比的弱信号检测方法, 实验结果表明, 本文算法在检测性能、状态响应速度方面相对传统经典算法获得了较大提升。

## 2 系统主频特性分析

### 2.1 系统检测模型分析

系统检测模型采用双势阱 Duffing-Van der pol 系统, 这是一个单自由度非自治系统, 其常微分方程形式为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}) + E(t) \quad (1)$$

其中  $\varepsilon$  为弱摄动参数, 即  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $f(x, \dot{x}) = -2\mu(1-x^2)\dot{x}$  为  $x, \dot{x}$  的非线性函数, 包含阻尼项和恢复力项,  $\mu$  为黏性阻尼系数,  $E(t) = \lambda \cos \Omega t$  为激励力, 即系统的非奇次项, 由待测信号项与临界策动力值共同组成。

系统随激励强度的变化表现出丰富的非线性动力学特性, 依次为倍周期分岔、混沌状态、周期状态等。当系统位于临界状态时, 激励幅值的微小扰动即可引起系统状态发生改变, 通过一定的状态响应辨识手段判别信号的存在与否, 弱信号混沌检测机理即源于此。

### 2.2 主频参量的确定

首先, 研究系统解析解的特性。引入时间尺度:  $\tau = \Omega t$ , 系统式(1)变换为

$$\Omega^2 x'' + \omega_0^2 x = \varepsilon [f(x, \Omega x') + 1/\varepsilon E(t)] \quad (2)$$

其中  $x', x''$  表示系统输出  $x$  对时间尺度  $\tau$  的导数, 频率  $\omega = 2\pi f$ 。

利用参数摄动法将系统频率  $\Omega$ , 基本解  $x$  展开成摄动参数  $\varepsilon$  的幂级数:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \dots \\ \Omega &= \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

代入系统方程式(1)中, 令  $\varepsilon$  同次幂项的系数相等, 略去  $\varepsilon$  的高阶次项, 可得

$$\left. \begin{aligned} x_0'' + x_0 &= 0 \\ \omega_0^2 x_1'' + \omega_0^2 x_1 &= -\left[ 2\mu(1-x_0^2)\omega_0 x_0' + kx_0^3 \right] \\ &\quad - 2\omega_0 \omega_1 x_0'' + \lambda \cos \tau \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式(4)的周期解为

$$x_0 = a \cos(\tau + \theta) + X_{1\lambda}(\tau) \quad (5)$$

其中  $\tau = \Omega t$ ,  $X_{1\lambda}(\tau)$  为方程的特解, 由式(4)中的一阶平衡系数确定。在此定义系统输出周期解对应的频率值即为系统主频率, 即  $\omega_0 \approx \Omega$ 。

消除式(4)中的久期项, 采用和差化积原理可得

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= a \cos(\tau + \theta) \\ \omega_0^2 x_1'' + \omega_0^2 x_1 &= g[a \cos(\tau + \theta), a \cos(\tau + \theta)] + R \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中,  $R$  为常数项。将  $g[a \cos(\tau + \theta), a \cos(\tau + \theta)]$  系数置零, 得

$$\left. \begin{aligned} \lambda \sin \theta &= 2\mu\omega_0 a^3 - 2\mu\omega_0 a - v \\ \lambda \cos \theta &= v \cdot k a^3 - 2\omega_0 \omega_1 a \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中,  $v$  为常量。消去未知变量  $\theta$ , 得

$$\frac{\lambda^2}{4\omega_0^2} = \left[ \mu^2 + \left( \omega_1 - v \frac{k}{\omega_0} a^2 \right)^2 \right] a^2 \quad (8)$$

式(8)为一阶摄动解频率  $\omega_1$  和振幅响应  $a$  之间的关系方程, 进而解得,

$$\omega_1 = v \cdot \frac{k}{\omega_0} a^2 + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4\omega_0^2 a^2} - \mu^2} \quad (9)$$

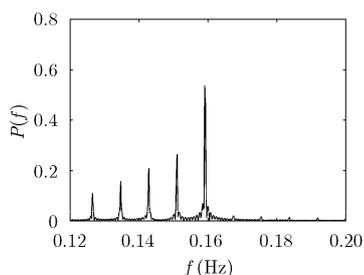
相应地, 由系统频率  $\Omega$  的展开式可知,  $\Omega \approx \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + O(\varepsilon)$ 。由此可以证实  $\omega_1$  为影响系统主频率  $\omega_0$  的主要因素, 定义为第2主频分量。同理, 将  $\omega_0$  和  $\omega_1$  代入式(3)中, 可以依次得出其它主频分量。

由上述推论可知, 混沌系统解的频域特性主要体现在  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots$  等各个主频分量上, 对系统解的主频分布特性作进一步的研究具有重要的应用价值。

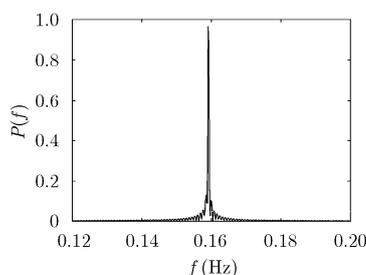
### 2.3 不同状态的频域特性分析

混沌检测算法对频率相同的弱信号敏感, 而对其它频率的信号免疫, 这是由于混沌系统解的频域“相关”特性决定的<sup>[17]</sup>。本节基于这一思想, 利用功率谱分析对系统解不同状态的频域特性进行研究。

系统模型的主要参数设定为  $\delta = 1$ ,  $\varepsilon = 0.2$ ,



(a)混沌状态条件下系统解谱分析结果



(b)周期状态条件下系统解谱分析结果

图1 Duffing-Van der pol 系统解的功率谱

表1 Duffing-Van der pol 模型的主频功率系数

系统状态	窄带邻域(点)	$L$ (点)			
		100	200	400	800
混沌态	$\Delta M = 1$	0.5782	0.5776	0.5772	0.5771
	$\Delta M = 2$	0.5814	0.5809	0.5806	0.5804
	$\Delta M = 5$	0.5881	0.5876	0.5872	0.5869
周期态	$\Delta M = 1$	0.9263	0.9257	0.9253	0.9251
	$\Delta M = 2$	0.9488	0.9481	0.9478	0.9475
	$\Delta M = 5$	0.9784	0.9777	0.9773	0.9771

$(x, \dot{x}) = (0, 0)$ , 周期激励的频率  $\Omega = 1$ 。以 Duffing-Van der pol 振子为例, 图 1(a), 图 1(b) 分别给出了混沌状态, 周期状态条件下系统解的归一化功率谱分析结果。

由谱分析结果可以看出: 周期状态时, 系统解功率分布以主频脉冲为中心, 向两端迅速衰弱, 中心主频功率值占比极高; 混沌状态时, 系统解的功率谱包含一个中心主频和若干个非中心主频成分, 各分量强度依次减弱, 但仍远高于普通分量。两种状态下的频域特性在中心频率强度、功率谱组成及分布特点方面存在显著差异, 可以依此构建新的特征统计量, 实现混沌系统的整体描述和信号的可靠检测。

进一步分析系统频域特性, 假设中心主频率值为  $f_c$ , 定义中心主频功率系数为

$$r_c = \frac{\int_{f_c - \Delta f}^{f_c + \Delta f} E(f) df}{\int_0^\infty E(f) df} \quad (10)$$

其中  $\delta(f_c, \Delta f)$  为主频  $f_c$  的邻域。

在离散系统中, 上述定义修正为

$$r_0 = \frac{\sum_{M - \Delta M}^{M + \Delta M} E(n) dn}{\sum_{M - L/2}^{M + L/2} E(n) dn} \quad (11)$$

其中,  $M$  为对应于主频  $f_c$  的频率标量,  $\Delta M$  为邻域宽度,  $L$  为频带宽度, 二者均以离散频点的数目表示,  $dn$  为离散频点间距。表 1 给出了离散条件下混沌模型的主频功率系数。

量化分析结果表明，混沌系统解的频域分布存在两个特点：

(1)主频功率集中性。其中周期状态下，中心主频率  $f_0$  及其窄带邻域  $f_0 \pm \Delta f$  内包含了系统90%以上的功率成分，混沌状态下，系统中心主频功率系数达到50%以上，这种特点体现了混沌算法对信号具有极强的线性滤波特性。

(2)主频成分之间的迁移性。随着激励强度的增加，系统将由混沌状态进入周期状态，在此过程中非中心主频成分的功率强度会逐渐减弱，而中心主频功率会随之增强，主频成分之间表现出功率强度的迁移性。

主频功率分布的差异性提供了一种离散系统中衡量主频功率分布特性的指标，这些为文中算法的实现奠定了基础。下面将结合时频分析方法对系统输出序列进行预处理，进一步分析各个主频分量之间的关系，构造新的特征统计量准则，以实现系统状态差异的准确辨识。

### 3 主频功率比算法

#### 3.1 相关参量预处理

混沌系统的输出为非线性非平稳过程，直接采用FFT变换会产生虚假频率分量或无用的交叉分量，给分析带来不利的影响<sup>[20]</sup>。本节首先采用EMD(Empirical Mode Decomposition)算法对系统输出信号进行预处理，其分解形式为

$$s(t) = X(t) = \sum_{k=1}^n \text{imf}_k(t) + r_n(t) \quad (12)$$

其中， $\text{imf}_k$ 为频率从高到低的经验模态分量， $r_n(t)$ 为残差分量。

假设  $\text{imf}_k = \{m_k^i, 1 \leq i \leq I\}$ ， $I$ 为模态分量的离散长度。采用文献[21]中的算法对信号进行选择性地重构，其中比例菱缩原则修改为

$$\tilde{m}_k^i = \theta_k \cdot m_k^i, \quad \theta_k = \begin{cases} 1, & k \in [1, l] \\ 0, & k \geq l+1 \end{cases} \quad (13)$$

式中， $l$ 为相关模态分量的个数，即  $l = \text{length}\{\text{imf}_1, \text{imf}_2, \dots\}$ 。

根据相关模态分量的信号重构为

$$\tilde{s}(t) = \tilde{X}(t) = \sum_{k=0}^1 \text{imf}_k, \{\text{imf}_k = \tilde{m}_k^i, i \in I\} \quad (14)$$

由式(9)可知，在混沌系统解的构成中，第2主频分量是影响中心主频功率的最主要因素。下面将主要依据这两种主频分量及其差异构建特征量准则，所以系统的相关模态分量应该设置为  $\{\text{imf}_k, k = 0, 1\}$ 。

#### 3.2 频率成分筛选条件

对重构后的信号进行傅氏变换，得到其频率强度并排列为

$$Y(\omega_0) > Y(\omega_1) > \dots > Y(\omega_N) \quad (15)$$

由于系统输出信号的序列长度有限，可以近似认为系统功率为  $P(\omega_i) = Y^2(\omega_i)$ 。所以，系统主频功率及第2主频功率分别为

$$\left. \begin{aligned} P(\omega_0) &= Y^2(\omega_0) \\ P(\omega_1) &= Y^2(\omega_1) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

二者的比值即为主频功率比系数：

$$R_p = P(\omega_1)/P(\omega_0) \quad (17)$$

根据最小均方误差准则<sup>[22]</sup>，设定  $\omega_1$  的筛选准则为： $\omega_i = \omega_1, \|\omega_0 - \omega_i\|_2 \geq D_{\min}$ ，其中  $D_{\min}$  为常量，否则， $\omega_i \neq \omega_1, \|\omega_0 - \omega_i\|_2 \leq D_{\min}$ 。 $D_{\min}$  由激励幅值的初始状态决定，通过设定筛选准则可以有效甄别两种主频成分，筛除两种主频分量之间由其它干扰引起的虚假分量。

#### 3.3 主频功率比准则

由于  $P(\omega_0) = P(x_0)$ ， $P(\omega_1) = P(x_1)$ ，可根据帕色伐尔频域转换定理得到

$$\left. \begin{aligned} P(x_0) &= \frac{1}{\pi} \left| X(e^{j\omega_0}) \right|^2 \approx \frac{1}{2\pi} |a|^2 \\ P(x_1) &= \frac{1}{\pi} \left| X(e^{j\omega_1}) \right|^2 \approx \frac{1}{2\pi} |2\mu\omega_0\omega_1 a|^2 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

代入式(17)，解得主频功率比系数，

$$R_p = \frac{P(\omega_1)}{P(\omega_0)} = \frac{1}{|2\mu\omega_0\omega_1|^2} \propto \frac{1}{(\omega_1)^2} \quad (19)$$

进一步分析  $R_p$  与策动力参数  $\lambda$  之间的关系，有

$$\frac{d(R_p)}{d\lambda} = -\frac{1}{2\mu^2 |\omega_0|^2 |\omega_1|^3} \cdot \frac{d\omega_1}{d\lambda} \quad (20)$$

令  $\kappa = \lambda^2/[4(\omega_0)^2 a^2] - a^2$ ，则有

$$\frac{d\omega_1}{d\lambda} = \frac{1}{2\sqrt{\kappa}} \cdot \frac{\lambda}{2|\omega_0|^2 a^2} = \frac{\lambda}{4|\omega_0|^2 a^2 \sqrt{\kappa}} \quad (21)$$

将其代入式(21)，得

$$\begin{aligned} \frac{d(R_p)}{d\lambda} &= -\frac{1}{2\mu^2 |\omega_0|^2 |\omega_1|^3} \cdot \frac{\lambda}{4|\omega_0|^2 a^2 \sqrt{\kappa}} \\ &= -\frac{\lambda}{8\mu^2 |\omega_0|^4 a^2 |\omega_1|^3 \sqrt{\kappa}} \leq 0 \end{aligned} \quad (22)$$

至此，可以证明  $R_p$  是一个正比于  $\lambda$  的参量，主频功率比相对于策动力强度为一个单调递减过程。

进一步假设  $\sigma = 8\mu^2 |\omega_0|^4 a^2 |\omega_1|^3 \sqrt{\kappa}$ ，可得

$$\frac{d^2(R_p)}{d\lambda^2} = -\frac{1}{\sigma} \left( 1 - \left| \frac{\lambda}{2\omega_0 a \cdot \sqrt[4]{\kappa}} \right|^2 \right) \quad (23)$$

其中， $\lambda \in [0, 2\omega_0 a \cdot \sqrt[4]{\kappa}]$  时， $d^2(R_p)/(d\lambda^2) \leq 0$ 。

此时, 如果  $d^2(R_p)/(d\lambda^2) \rightarrow 0$ , 系统主频功率比将以固定的递减速度收敛于一个常值。此时, 将式(12)代入式(23)中, 得到系统策动力强度的求解表达式为

$$\lambda_0 \approx |2\omega_0 a| \cdot \sqrt{(R_p - 2\mu v k a^2)^2 + \mu^2} \quad (24)$$

式(24)即为系统主频功率比与策动力幅值之间的映射关系。由以上分析可知, 通过设定系统主要参数, 结合一定的频率成分筛选条件可以构建主频功率比准则, 实现系统状态响应的可靠辨识。

### 3.4 算法总结

假设系统策动力的临界阈值为  $\lambda_0$ , 相应的主频功率比值为  $R_{p0}$ 。根据临界状态的定义可知: 当  $\lambda < \lambda_0$  时,  $R_p \gg R_{p0}$ , 系统处于混沌状态; 当  $\lambda > \lambda_0$  时,  $R_p \ll R_{p0}$ , 系统处于周期状态。待测信号的存在与否等价于系统是否发生相变, 下面据此给出  $R_{p0}$  的求解算法。

初始化数据: 设定策动力幅值为  $H = [\lambda_M^1, \lambda_M^2, \dots, \lambda_M^p, \dots, \lambda_M^M]$ , 步进值  $\Delta\lambda$ ;

算法目标: 在  $\lambda \in H$  内获得临界策动力值  $\lambda_0$  以用于信号检测, 图 2 给出了文中算法的实现流程。

## 4 实验分析

### 4.1 实验环境

实验硬件环境为: 处理器 Intel(R) Core(Pentium); 软件环境为: Windows7 操作系统, Matlab 仿真软件。

系统模型仍然设定为 Duffing-Van der pol 系统, 内置周期策动力为角频率为  $\omega$  的正弦信号。实验中所添加的噪声均为零均值高斯白噪声, 系统初

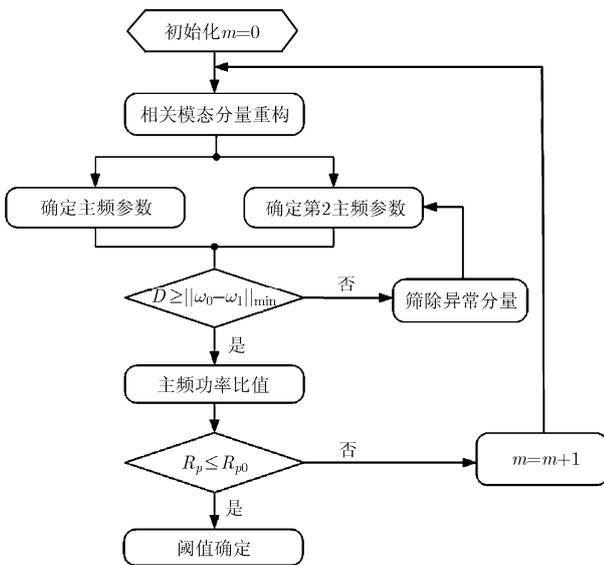


图 2 文中算法的实现流程图

始位置设为  $[X_0, Y_0] = [0, 0]$ , 为计算简便, 刚性阻尼系数取  $\delta = 1$ , 谐波平衡方程中摄动系数  $\varepsilon = 0.2$ , 在  $\lambda \in [0.6 \ 0.7]$  范围内求解系统的临界阈值, 考虑到一定强度噪声的影响, 信噪比约定为  $-30 \text{ dB}$ , 频率筛选常量  $D_{\min} = 10^{-2}$ , 初始化主频功率比  $R_{p0} = 10^{-2}$ 。

### 4.2 用于检测的阈值状态仿真

信号初始周期策动力  $\lambda_M^1 = 0.6$ , 此时系统处于稳定的混沌状态。采用 EMD 算法对信号进行分解, 终止条件为正交标准差(Normalized Standard Deviation)  $\text{NSD} \leq 10^{-3}$ , 按照式(14)可得出重构信号  $\tilde{s}$ 。

按照式(6)、式(9)可以分别求得系统主频率  $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$ , 第 2 主频率为  $\omega_1 = 0.92 \text{ rad/s}$ , 换算为频率时, 有  $f_0 = 0.159 \text{ Hz}$ ,  $f_1 = 0.147 \text{ Hz}$ 。图 3 给出了信号  $\tilde{s}$  的频谱。

由式(18)设定约束距离  $D_{\min} = \|\omega_0 - \omega_1\|$ ,  $\lambda = \lambda_M^1$ , 即系统的初始策动力幅值。由式(20)分析信号的主频功率比为  $R_p(\lambda_M^1)$ , 策动力幅值的步进量  $\Delta\lambda = 10^{-3}$ , 图 4 中给出了  $R_p(\lambda_M^1)$  的变化趋势。

由数值分析结果可知,  $\lambda_M^i = 0.664$  时,  $R_p(\lambda_M^i) = 0.1333 \geq R_{p0}$ , 当  $\lambda_M^i = 0.665$  时,  $R_p(\lambda_M^i) = 0.0090 \leq R_{p0}$ 。此时,  $\frac{\Delta R_p}{\Delta H} = 124.3$ , 主频功率比发生了大幅跃变, 并从  $\lambda_M^i \geq 0.665$  开始, 系统进入稳定收敛状态。所以, 此时的策动力强度即为刚刚跨过临界混沌的周期状态  $\lambda_0 = 0.664$ 。

进一步降低初始化主频功率比值, 可以得到准确程度更高的临界阈值点。图 5、图 6 分别给出了绝对误差  $R_{p0} = 10^{-3}$ ,  $R_{p0} = 10^{-4}$  时, 系统主频功率比  $R_p(\lambda_M^i)$  的变化曲线, 分析得到系统的临界阈值:  $\lambda_0' = 0.6645$ ,  $\lambda_0'' = 0.66457$ 。

进一步降低初始化主频功率比值, 可以得到准确程度更高的临界阈值点。图 5、图 6 分别给出了绝对误差  $R_{p0} = 10^{-3}$ ,  $R_{p0} = 10^{-4}$  时, 系统主频功率比  $R_p(\lambda_M^i)$  的变化曲线, 分析得到系统的临界阈值:  $\lambda_0' = 0.6645$ ,  $\lambda_0'' = 0.66457$ 。

### 4.3 弱信号检测性能分析

微弱信号检测是现代信息处理技术中的综合技术和尖端领域<sup>[23]</sup>, 其中检测精度和检测速度是衡量算法性能的两个重要指标。本节主要采用这两个指标对文中算法的性能进行分析。

检测精度的提高, 意味着检测灵敏度的提高和动态范围的扩大, 在噪声意义下即表示算法的容噪

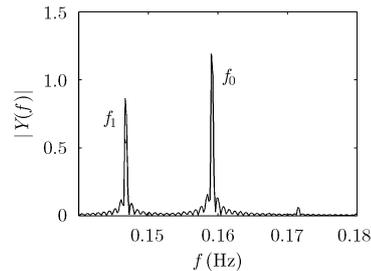


图 3 系统输出的主频率与第二主频率

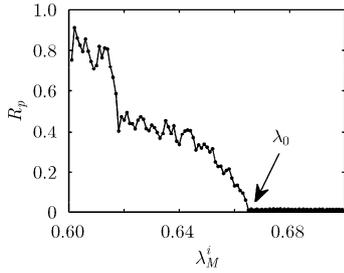


图 4 主频功率比值的变化

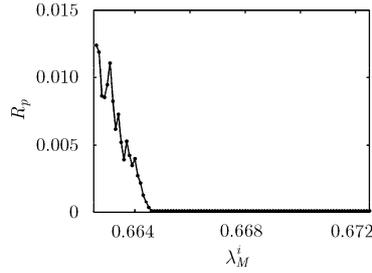


图 5 主频功率比值变化曲线 ( $\xi \leq 10^{-4}$ )

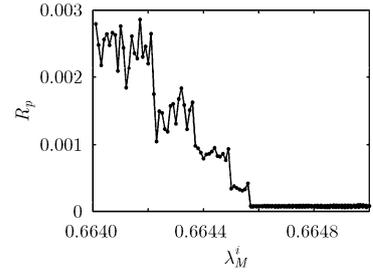


图 6 主频功率比值变化曲线 ( $\xi \leq 10^{-5}$ )

性更强。其中，检测精度的提高是弱信号检测技术提高的标志，首先考虑强噪声背景下信号灵敏度的改善情况。

**实验 1** 1000 组电力载波弱谐波信号，幅值固定为  $1 \times 10^{-4}$ ，频率为  $\omega = 1$ ，信噪比的变化范围为  $-50 \sim -20$  dB。产生噪声的随机种子数  $n \sim U(0, N)$ ，以保证每组信号的噪声均不相同。

弱信号的混沌检测实现的前提是系统相态跃迁的准确辨识，其中的典型代表算法有 Li 氏指数法、Floquet 指数法、Halmiton 量法，在弱信号检测领域应用广泛。本节分别采用这 3 种传统方法和文中算法给出系统的临界阈值并进行信号检测，实验信号的差错概率如图 7 所示。

仿真结果表明，本文算法的容噪性能优于 Li 氏指数等传统方法。在信噪比为  $-50 \sim -40$  dB 时，Li 氏指数法、Floquet 指数法完全无法实现幅值为  $1 \times 10^{-4}$  的信号检测，而本文方法在信噪比为  $-40$  dB 时可达到的检测差错概率为 0.213，这是由于本文算法可有效筛除低频周期分量，而同时这也是噪声比较集中的频段范围，算法实现所需的主频及第 2 主频分量由于功率集中，且相对远离强噪声频段，所以检测效果有较大的提升。在信噪比高于  $-40$  dB 时，本文算法的检测差错概率继续降低，从  $-35$  dB 开始可以实现对幅值为  $1 \times 10^{-4}$  信号的准确检测，而传统方法需要在  $-30$  dB 以上才能达到本文算法的检测性能。

因而，本文算法的检测可靠性极高，以  $\text{SNR} = -35$  dB 为限，Halmiton 量检测法的差错概率为  $1.43 \times 10^{-2}$ ，而本文算法的差错概率仅为  $1 \times 10^{-3}$ ，混沌检测方法的性能提高了一个数量级以上。

**实验 2** 1000 组电力载波弱谐波信号，幅值服从  $[10^{-5}, 10^{-2}]$  之间的均匀分布，信噪比范围为  $-50 \sim -20$  dB。

调整信号的幅值分布范围，4 种算法的检测结果如图 8 所示。由实验结果可以看出，在  $[10^{-5}, 10^{-2}]$  之间的动态范围内，本文算法的检测性能仍然优于另外几种传统方法。这是由于文中算法充分考虑了主频及第 2 主频参数的变化性，并给出了约束条件，对弱信号动态特性的适应性更强。

检测速度表示算法是否具有快速的响应和处理能力，这也是衡量算法性能的重要指标之一。在实际检测实验中，策动力强度的变化会导致系统输出信号的变化，本节以完成检测所需数据量为指标，对比两种算法的响应速度<sup>[24]</sup>。

**实验 3** 400 组电力载波弱谐波信号，每次实验采用 100 组信号，其幅值分别设定为  $10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$ ，信噪比固定为  $-30$  dB。

统计每次实验过程中，完成信号检测所需的数据量，得到其统计均值为： $\bar{T}_X = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_X(i)$ ，图 9 给出了 4 种算法响应数据量的差异。

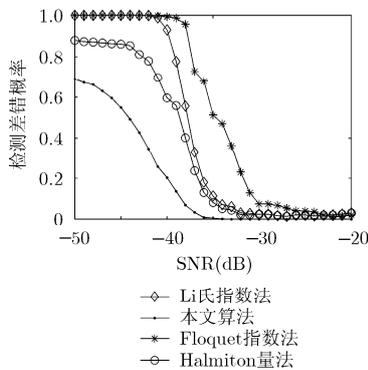


图 7 固定幅值信号的检测结果 ( $A = 10^{-4}$ )

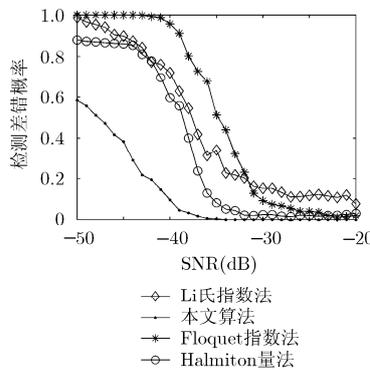


图 8 浮动幅值信号的检测结果 ( $A \in [10^{-5}, 10^{-2}]$ )

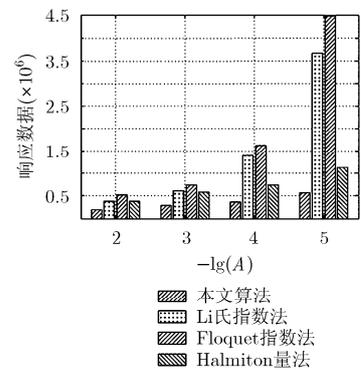


图 9 4 种算法的响应数据量对比

由仿真结果可以看出,随着信号幅值的降低,系统的响应数据也会随之增加。信号幅值为 $10^{-2}$ 时,采用传统 Li 氏指数方法所需数据量为 $3.768 \times 10^5$ 次, Halmiton 量检测法所需数据量为 $3.624 \times 10^5$ 次,此时本文算法需要 $1.856 \times 10^5$ 次数据即可完成实验,其响应速度约为传统方法的 2 倍;信号幅值为 $10^{-5}$ 时, Li 氏指数法所需数据量为 $3.680 \times 10^6$ 次, Halmiton 量检测法所需数据量为 $1.225 \times 10^6$ 次,本文算法相应的数据需求为 $5.614 \times 10^5$ 次,其响应速度约为 Li 指数判别法的 6.5 倍,为 Halmiton 量检测法的 2 倍。

检测结果表明本文算法的检测速度远快于传统方法,这是由于检测过程本质上是由于策动力幅值的改变,引起了系统输出信号的变化,本文算法是基于输出信号的判别准则,而传统方法的判别依据是系统输出信号特征参数的变化,相比于原始信号,其特征参数的改变具有一定的滞后性。

## 5 结束语

本文采用参数摄动法对混沌系统解析解进行了深入研究,证明了其一阶摄动平衡解为影响系统周期解的主要因素,在此基础上提出了一种基于主频功率比的信号检测算法;该算法以功率比与策动力幅值之间的函数关系为依据,对混沌系统的动力学相态进行重新定义,在此基础上结合最小方差准则筛除其它频率分量,实现了系统临界状态的量化确定。新算法在检测性能上具有较大的改善,其可靠性有 1 个数量级的提高,并且响应时间仅为传统算法的 50%,本文算法的提出对于弱信号检测尤其是混沌检测理论的实际应用具有一定意义。

## 参考文献

- [1] 邓冬虎,张群,罗迎,等. Duffing 振子在低信噪比雷达目标微动特征提取中的应用[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(2): 453-458. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.00624.  
DENG Donghu, ZHANG Qun, LUO Yin, et al. The application of Duffing oscillators to micro-motion feature extraction of radar target under low SNR[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014, 36(2): 453-458. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.00624.
- [2] JAISER A R, STEN K, and KYSLE P. A numerical solution of the nonlinear controlled Duffing oscillator by radial basis functions[J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2012(64): 2049-2065.
- [3] 靳晓艳,周希元. 一种基于特定Duffing振子的MPSK信号调制识别算法[J]. 电子与信息学报, 2013, 35(8): 1882-1887. doi: 10.3724/SP.J.1146.2012.01728.  
JIN Xiaoyan and ZHOU Xiyuan. A modulation classification algorithm for MPSK signals based on special Duffing oscillator[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2013, 35(8): 1882-1887. doi: 10.3724/SP.J.1146.2012.01728.
- [4] MLOON F, TAYLE G, DILER B, et al. Pseudorandom number generator based on mixing of three chaotic maps[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, 19(4): 1-8.
- [5] 韩建群. 一种减小Duffing系统可检测连续正弦信号频率范围的方法[J]. 电子学报, 2013, 41(4): 733-738.  
HAN Jianqun. A method of narrowing frequency range of intermittent sine signal detected by Duffing system[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2013, 41(4): 733-738.
- [6] 张淑清,翟欣沛,董璇,等. EMD及Duffing振子在小电流系统故障选线方法中的应用[J]. 中国电机工程学报, 2013, 33(10): 161-167.  
ZHANG Shuqing, ZHAI Xinpei, DONG Xuan, et al. Application of EMD and Duffing oscillator to fault line detection in un-effectively grounded system[J]. *Proceedings of the CSEE*, 2013, 33(10): 161-167.
- [7] MENG K L and STEVE S. Temporal and spectral responses of a softening Duffing oscillator undergoing route-to-chaos[J]. *Communication Nonlinear Science Numerical Simulation*, 2012(17): 5217-5228.
- [8] 冯俊,徐伟,顾仁财,等. 有界噪声与谐和激励联合作用下 Duffing-Rayleigh 振子的 Melnikov 混沌[J]. 物理学报, 2011, 34(9): 170-177.  
FENG Jun, XU Wei, GU Rencai, et al. Melnikov chaos in Duffing-Rayleigh oscillator subjected to combined bounded noise and harmonic excitations[J]. *Acta Physica Sinica*, 2011, 34(9): 170-177.
- [9] 唐元璋,楼京俊,翁雪涛,等. Duffing 振子倍周期分岔谱特性[J]. 振动与冲击, 2014(2): 60-63.  
TANG Yuanzhang, LOU Jingjun, WENG Xuetao, et al. Spectrum property of period-doubling bifurcations of Duffing oscillator[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2014(2): 60-63.
- [10] JIMENEZ-TRIANA A, WALLACE K T, GUANRONG C, et al. Chaos control in Duffing system using impulsive parametric perturbations[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2010, 57(4): 305-309.
- [11] 刘延彬,陈予恕. 余维4的Duffing-Van der Pol方程全局分岔分析[J]. 振动与冲击, 2011(1): 69-72.  
LIU Yanbin and CHEN Yunu. The global analyses on Duffing-Van der Pol equation of redundant dimension 4[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2011(1): 69-72.
- [12] 姚天亮,刘海峰,许建良,等. 基于最大Lyapunov指数不变性的混沌时间序列噪声水平估计[J]. 物理学报, 2012, 61(6): 53-57.  
YAO Tianliang, LIU Haifeng, XU Jianliang, et al. Noise-level

- estimation of noisy chaotic time series based on the invariant of the largest Lyapunov exponent[J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, 61(6): 53-57.
- [13] 芮国胜, 张洋, 苗俊, 等. 联合增益递推的Duffing系统弱信号检测算法[J]. 电子学报, 2012, 40(6): 1269-1273.  
RUI Guosheng, ZHANG Yang, MIAO Jun, *et al.* A weak signal detection method by Duffing System with the gain[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2012, 40(6): 1269-1273.
- [14] 杨红英, 叶昊, 王桂增, 等. Duffing 振子的 Lyapunov 指数与 Floquet 指数研究[J]. 仪器仪表学报, 2008, 29(5): 927-932.  
YANG Hongying, YE Hao, WANG Guizeng, *et al.* Study on Lyapunov exponent and Floquet exponent of Duffing oscillator[J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2008, 29(5): 927-932.
- [15] 魏恒东, 甘露, 李立萍. 基于哈密顿量的Duffing振子微弱信号检测[J]. 电子科技大学学报, 2012, 41(2): 203-207.  
WEI Hengdong GAN Lu, and LI Liping. Weak signal detection by duffing oscillator based on hamiltonian[J]. *Journal of University of Electronic Science and Technology of China*, 2012, 41(2): 203-207.
- [16] DIMITRIOS E P, EFSTATHIOS E T, and MICHALIS P M. Exact analytic solutions for the damped Duffing nonlinear oscillator[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006(334): 311-316.
- [17] IBRAHIM A M A and CHOUDHURY P K. On the Maxwell-Duffing approach to model photonic deflection sensor[J]. *IEEE Photonics Journal*, 2013, 5(4): 6800812.
- [18] 李月, 徐凯, 杨宝俊, 等. 混沌振子系统周期解几何特征量分析与微弱周期信号的定量检测[J]. 物理学报, 2008, 57(6): 3353-3358.  
LI Yue, XU Kai, YANG Baojun, *et al.* Analysis of the geometric characteristic quantity of the periodic solutions of the chaotic oscillator system and the quantitative detection of weak periodic signal[J]. *Acta Physica Sinica*, 2008, 57(6): 3353-3358.
- [19] 何斌, 杨灿军, 陈鹰. 混沌周期解提高测量灵敏度算法及抗干扰分析[J]. 电子学报, 2003, 31(1): 68-70.  
HE Bin, YANG Canjun, and CHEN Ying. Study on enhancing delicacy Sensors using chaotic system[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2003, 31(1): 68-70.
- [20] LI Keqiang, WANG Shangjiu, and ZHAO Yonggang. Multiple periodic solutions for asymptotically linear Duffing equations with resonance[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2013, 397: 156-160.
- [21] 王文波, 汪祥莉. 噪声模态单元预判的经验模态分解脉冲星信号消噪[J]. 物理学报, 2013, 13(7): 1-12.  
WANG Wenbo and WANG Xiangli. Empirical mode decomposition pulsar signal denoising method based on predicting of noise mode cell[J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, 13(7): 1-12.
- [22] ALEX E. Analytical solution of the damped Helmholtz-Duffing equation[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2012(25): 2349-2353.
- [23] YANHUA H, XIANFENG C, SPENCER P S, *et al.* Enhanced flat broadband optical chaos using low-cost VCSEL and fiber ring resonator[J]. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 2015, 51(3): 1-6.
- [24] YAZDI M K, AHMADIAN H, MIRZABEIGY A, *et al.* Dynamic analysis of vibrating systems with nonlinearities[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2012(2): 183-187.
- 孙文军：男，1987年生，博士生，研究方向为混沌检测技术与非线性滤波。
- 芮国胜：男，1968年生，教授，研究方向为小波信号处理与现代通信系统。
- 张洋：男，1983年生，讲师，研究方向为非线性滤波与混沌检测技术。
- 陈强：男，1990年生，硕士生，研究方向为混沌检测与多符号检测技术。