

## 基于扩展 Kalman 滤波的单领航者自主水下 航行器协同导航判别式训练方法研究

杨少凡<sup>①②</sup> 余华兵<sup>\*①</sup> 陈新华<sup>①</sup> 孙长瑜<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(中国科学院声学研究所 北京 100190)

<sup>②</sup>(中国科学院大学 北京 100049)

**摘要:** 单领航者自主水下航行器(AUV)协同导航算法中,系统模型是非线性的,扩展 Kalman 滤波(EKF)是针对非线性系统的很有影响力的滤波算法,但是,EKF 算法的性能严格依赖于一系列模型参数,而这些参数往往需要花费很大的代价来捕获,并且常需要人工调整。该文应用一种能自动学习 Kalman 滤波噪声协方差参数的方法,通过仿真分析,证明了该学习算法可以完全自主并且高效、准确地输出 Kalman 滤波噪声参数,进一步提高了单领航者 AUV 协同导航系统的导航精度。

**关键词:** 自主水下航行器;协同导航;扩展 Kalman 滤波;自动学习噪声参数

中图分类号: TB568

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2015)11-2756-06

DOI: 10.11999/JEIT150036

## Discriminative Training of Kalman Filters Based Cooperative Navigation for Multiple Autonomous Underwater Vehicles with a Single Leader

Yang Shao-fan<sup>①②</sup> Yu Hua-bing<sup>①</sup> Chen Xin-hua<sup>①</sup> Sun Chang-yu<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

<sup>②</sup>(University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

**Abstract:** In the cooperative navigation algorithm for multiple Autonomous Underwater Vehicles (AUVs) with a single leader, the model of the system is nonlinear. The Extended Kalman Filter (EKF), which is directed against the nonlinear system, is one of the most influential techniques. However, the performance of EKF critically depends on a large number of modeling parameters which can be very difficult to obtain, and are often set by manual tweaking and at a great cost. In this paper, a method for automatically learning the noise covariance of a Kalman filter is applied, and the simulation result shows that this algorithm fully automatically and quickly outputs the noise covariance, which improves the navigation accuracy of the cooperative navigation system.

**Key words:** Autonomous Underwater Vehicle (AUV); Cooperative navigation; Extended Kalman Filter (EKF); Automatically learning the noise parameters

### 1 引言

随着人工智能理论、传感器和微计算机等技术的不断成熟和发展,具有感知思维和动作能力的自主水下航行器(AUV)在军事和民用领域得到了广泛的应用,如海洋勘测、水下情报搜集、远程水下攻击等。就当前的技术而言,水下导航问题仍然是 AUV 所面临的主要挑战之一。目前在水下环境中,AUV 主要导航方法有航位推算与惯性导航方法、水声导航方法、地球物理导航方法、仿生学导航方法

和组合导航方法等<sup>[1,2]</sup>。单一导航系统往往很难满足现代水下的导航要求,组合导航针对每种单一导航系统都有各自的独特性能和局限性,把几种单一系统组合起来,利用多种信息源,构成一种有多余度和导航精确度更高的多功能系统<sup>[3]</sup>。新的数据处理方法,特别是 Kalman 滤波(KF)<sup>[4]</sup>方法的应用是实现组合导航的关键。

本文研究有关 EKF 的一个基本问题:优化系统模型参数来提高从 AUV 状态估计精度<sup>[5]</sup>。实际应用中即使状态预测方程和观测方程可以精确建模,准确估计噪声协方差往往非常地困难。噪声往往由若干不同的因素产生:(1)附加噪声的测量数据;(2)未被 EKF 建模的隐含环境状态信息;(3)时间离散化引入的附加噪声;(4)EKF 算法本身的近似,如常

收稿日期: 2015-01-08; 改回日期: 2015-06-02; 网络出版: 2015-07-06

\*通信作者: 余华兵 yuhuabing@mail.ioa.ac.cn

基金项目: 国家自然科学基金(61372180)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (61372180)

用 Taylor 公式进行线性近似。所有这些因素都会在状态估计和观测数据时引入干扰，在 EKF 中，它们通常被看作噪声。

本文研究了 3 个学习算法，均应用从 AUV 的 GPS 定位信息来学习 EKF 的协方差参数。基本思想很直观：训练 EKF 来最大化它的预测精度，预测精度通过训练中获取的参考数据来评估。

## 2 基于扩展 Kalman 滤波的单领航者 AUV 协同导航算法

基于距离和方位测量的单领航者 AUV 协同导航<sup>[6-11]</sup>模型如图 1 所示，其中主 AUV(leader)为领航者，装备高精度的导航设备；从 AUV(follower)为跟随者，只携带低精度的航位推算系统；主、从 AUV 之间利用水声通信进行相对距离和方位信息的测量。

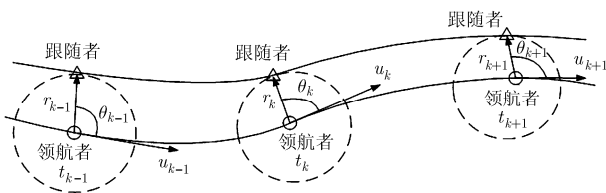


图 1 AUV 的仿真真实路径

假设速度与方位测量误差相互独立且  $E[\omega(k)\omega^T(k)] = \mathbf{Q}(k)$  (其中  $\omega(k) = [\omega_v(k), \omega_\theta(k)]^T$ )；根据水声通信的特点近似认为  $E[\Delta\mathbf{Z}(k)\Delta\mathbf{Z}^T(k)] = \mathbf{R}(k)$  (其中  $\Delta\mathbf{Z}(k) = [\Delta r(k), \Delta\theta(k)]^T$ )。

扩展 Kalman 滤波过程可以表示为预测过程：

$$\widehat{\mathbf{X}}(k+1|k) = f(\widehat{\mathbf{X}}(k|k), \mathbf{u}(k), 0) \quad (1)$$

$$\mathbf{P}(k+1|k) = \mathbf{F}(k)\mathbf{P}(k|k)\mathbf{F}^T(k) + \mathbf{G}(k)\mathbf{Q}(k)\mathbf{G}^T(k) \quad (2)$$

更新过程：

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}(k+1) &= \mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{H}^T(k+1) \\ &\quad \cdot [\mathbf{H}(k+1)\mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{H}^T(k+1) + \mathbf{R}(k+1)]^{-1} \\ \widehat{\mathbf{X}}(k+1|k+1) &= \widehat{\mathbf{X}}(k+1|k) + \mathbf{K}(k+1)[\mathbf{Z}(k+1) - \widehat{\mathbf{Z}}(k+1)] \\ \mathbf{P}(k+1|k+1) &= \mathbf{P}(k+1|k) - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{H}(k+1)\mathbf{P}(k+1|k) \end{aligned} \right\} (3)$$

其中， $\mathbf{F}(k)$  为状态转移矩阵， $\mathbf{G}(k)$  为过程噪声分布矩阵， $\mathbf{H}(k+1)$  为观测矩阵。它们可以表示为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}(k) &= \frac{\partial f(\widehat{\mathbf{X}}(k|k), \mathbf{u}(k), 0)}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{\mathbf{X}=\widehat{\mathbf{X}}(k|k)} \\ \mathbf{G}(k) &= \frac{\partial f(\widehat{\mathbf{X}}(k|k), \mathbf{u}(k), 0)}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{X}=\widehat{\mathbf{X}}(k+1|k)} \\ \mathbf{H}(k+1) &= \frac{\partial h(\mathbf{X}(k), \Delta\mathbf{Z}(k))}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}(k+1|k)} \end{aligned} \right\} (4)$$

为了实施 EKF，设计者还需要完成两个工作：将函数  $f$  和  $h$  线性化，估计噪声协方差矩阵  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{R}$ 。但协方差  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{R}$  很难估计，因为它们不仅包含随机噪声，还包含模型误差(如线性化  $f$  和  $h$ )造成的干扰。

## 3 自动学习 EKF 滤波参数

本节讨论自动捕获 Kalman 滤波的噪声参数的学习算法。虽然接下来要讨论的算法也可以应用到更广泛的方面，但为了研究简单，我们只专注于学习噪声参数  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{R}$ 。除已有研究成果中所需要的测量数据外，此算法还需要一个能够精确测量从 AUV 状态  $\mathbf{X}(k)$  的全部变量或部分变量的测量设备。换言之，在 EKF 学习阶段，我们可以获得额外的变量  $\mathbf{Y}(1), \mathbf{Y}(2), \dots$ ，每个变量  $\mathbf{Y}(k)$  由  $\mathbf{X}(k)$  映射得到

$$\mathbf{Y}(k) = g(\mathbf{X}(k)) + \gamma(k) \quad (5)$$

这里  $g$  是一个函数， $\gamma(k)$  是噪声并且协方差矩阵为  $\Sigma$ 。函数  $g$  是一个映射，它是从状态向量  $\mathbf{X}(k)$  中抽取的仅包含位置坐标的子集  $\mathbf{Y}(k) = [x(k), y(k)]^T$ 。

令  $\mathbf{X}_{0:T}$  表示整个状态序列  $(\mathbf{X}(0), \mathbf{X}(1), \dots, \mathbf{X}(T))$ ，同样令  $\mathbf{u}_{1:T}, \mathbf{Y}_{0:T}$  和  $\mathbf{Z}_{0:T}$  表示相关的观测序列。假设有初始状态的先验概率  $p(\mathbf{X}(0))$ ，状态更新方程和观测方程(附加已知的控制信息  $\mathbf{u}_{1:T}$ )定义了一个  $\mathbf{X}_{0:T}, \mathbf{Y}_{0:T}$  和  $\mathbf{Z}_{0:T}$  上的联合概率分布，即

$$\begin{aligned} p(\mathbf{X}_{0:T}, \mathbf{Y}_{0:T}, \mathbf{Z}_{0:T} | \mathbf{u}_{1:T}) \\ = p(\mathbf{X}(0)) \prod_{t=1}^T p(\mathbf{X}(t) | \mathbf{X}(t-1), \mathbf{u}(t)) \\ \quad \cdot \prod_{t=0}^T p(\mathbf{Y}(t) | \mathbf{X}(t)) p(\mathbf{Z}(t) | \mathbf{X}(t)) \end{aligned} \quad (6)$$

应用  $f$  和  $h$  的线性近似函数( $h$  是映射操作，为线性)，EKF 模型定义的联合概率分布函数  $p(\mathbf{X}_{0:T}, \mathbf{Y}_{0:T}, \mathbf{Z}_{0:T} | \mathbf{u}_{1:T})$  实际上是一个联合线性高斯模型。

### 3.1 最大化联合似然算法

此算法需要测量完整的状态向量，即要求  $g$  为恒等映射，当噪声  $\gamma$  很小时，可以忽略噪声项。此算法通过最大化联合似然函数来学习协方差矩阵参数。

$$\langle \mathbf{Q}_j, \mathbf{R}_j \rangle = \arg \max_{\mathbf{Q}, \mathbf{R}} \lg p(\mathbf{X}_{0:T}, \mathbf{Z}_{0:T} | \mathbf{u}_{1:T}) \quad (7)$$

得到最优分解且可以独立地估计出  $\mathbf{Q}_j$  和  $\mathbf{R}_j$  :

$$\mathbf{Q}_j = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\mathbf{X}(t) - f(\mathbf{X}(t-1), \mathbf{u}(t))) \cdot (\mathbf{X}(t) - f(\mathbf{X}(t-1), \mathbf{u}(t)))^T \quad (8)$$

$$\mathbf{R}_j = \frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^T (\mathbf{Z}(t) - h(\mathbf{X}(t)))(\mathbf{Z}(t) - h(\mathbf{X}(t)))^T \quad (9)$$

可以观察到, 该算法实际上并没有真正地训练 EKF, 而是简单地训练滤波器元素。因此, 这暗示了我们假想独立训练滤波器元素和整体训练 EKF 滤波器的效果相同。

### 3.2 最小化残余预测误差算法

最大化联合似然函数算法仅当可以测量完整的状态向量时才可以应用。但是, 往往  $g$  将完整状态向量映射到低维的状态向量, 比如单领航者协同导航系统中, 完整的状态向量还包含航向角, 这项不能直接由 GPS 数据获得。此外, 最大化条件似然函数的算法实际上并没有真正运行 EKF 滤波器, 特别地, 若噪声项是相关的, 这将影响算法性能。

一个更好的方法是通过训练 EKF 滤波器来最小化  $\mathbf{Y}(t)$  的预测误差:

$$\mathbb{E}[\mathbf{Y}(t) | \mathbf{u}_{1:T}, \mathbf{Z}_{0:T}] = g(\hat{\mathbf{X}}(t)) \quad (10)$$

这里  $\hat{\mathbf{X}}(t)$  为运行 EKF 算法后对状态的估计(协方差参数为  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{R}$ ), 因此  $\hat{\mathbf{X}}(t)$  只依赖参数  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{R}$ 。

最小化残余预测误差算法就是通过搜索最优的参数  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{R}$  来最小化  $\mathbf{Y}(t)$  的二次偏差的期望值, 如式(10)所示, 并以协方差  $\Sigma^{-1}$  进行加权:

$$\langle \mathbf{Q}_r, \mathbf{R}_r \rangle = \arg \min_{\mathbf{Q}, \mathbf{R}} \sum_{t=0}^T (\mathbf{Y}(t) - g(\hat{\mathbf{X}}(t)))^T \cdot \Sigma^{-1} (\mathbf{Y}(t) - g(\hat{\mathbf{X}}(t))) \quad (11)$$

这样, 我们只需修改参数  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{R}$  来使 EKF 输出的状态估计最小化测量值  $\mathbf{Y}(t)$  的二次偏差。

求解这个优化问题比最大化联合似然要困难得多, 因为误差函数不是简单的  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{R}$  的函数, 而是通过状态估计均值  $\hat{\mathbf{X}}(t)$  这个中间项来调节, 并且  $\hat{\mathbf{X}}(t)$  是  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{R}$  的复杂函数。因此, 这个学习算法真正评估了 EKF 的性能, 而不是它的独立元素。

### 3.3 最大化预测似然算法

最小化残余预测误差算法度量了 EKF 输出的状态估计量  $\hat{\mathbf{X}}(t)$  的质量, 但是并没有度量 EKF 输出的状态估计量的不确定度。每一次迭代, EKF 同时估计  $\hat{\mathbf{X}}(t)$  与它的协方差  $\hat{\mathbf{P}}(k)$ 。在实际中, 也需要 EKF 给出不确定度的准确估计, 因此我们的目标是最大化预测似然函数:

$$\langle \mathbf{Q}_p, \mathbf{R}_p \rangle = \arg \max_{\mathbf{Q}, \mathbf{R}} \sum_{t=0}^T \lg p(\mathbf{Y}(t) | \mathbf{Z}_{0:t}, \mathbf{u}_{1:t}) \quad (12)$$

最大化  $\lg$  似然函数变为

$$\langle \mathbf{Q}_p, \mathbf{R}_p \rangle = \arg \max_{\mathbf{Q}, \mathbf{R}} \sum_{t=0}^T -\lg |2\pi\Omega(t)| - (\mathbf{Y}(t) - g(\hat{\mathbf{X}}(t)))^T \Omega^{-1}(t) (\mathbf{Y}(t) - g(\hat{\mathbf{X}}(t))) \quad (13)$$

这里,  $\Omega(t) = \mathbf{G}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{G}^T(t) + \Sigma$ 。因此, 最优函数包含状态估计值  $\hat{\mathbf{X}}(t)$ , 它受参数  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{R}$  的影响, 同时还包含协方差矩阵  $\mathbf{P}$ 。当协方差  $\Sigma$  很小时, 我们可以忽略这一项。

本文算法与最小化残余预测误差算法的不同之处是需要额外提供给 EKF 协方差矩阵参数  $\mathbf{P}$ , 以此来反映状态估计量  $\hat{\mathbf{X}}(t)$  的稳定性。

## 4 数值仿真分析

为验证自动学习 EKF 滤波参数 3 个算法的有效性, 进行了仿真研究<sup>[12-14]</sup>。如图 2 所示, 领航者 AUV 由坐标原点出发沿直线航行, 跟随者 AUV 的航程分为两段, 首先沿斜线航行一段距离, 然后与领航者保持平行航行。在两段航程中跟随者 AUV 的航向角分别为  $45^\circ$  和  $0^\circ$ 。主、从 AUV 的航速均为  $2.5 \text{ m/s}$ , 系统的状态更新时间  $\Delta t = 5 \text{ s}$ 。仿真中假设所有误差均为零均值高斯噪声。从 AUV 的速度信息通过测量自身推进器的转速获得, 误差为  $\sigma_{v,F}^2 = (0.5 \text{ m/s})^2$ 。主、从 AUV 的航向角信息由陀螺仪测量,  $\sigma_{\phi,F}^2 = (2^\circ)^2, \sigma_{\phi,L}^2 = (2^\circ)^2$ 。AUV 间的相对距离通过水声通信测量, 相对方位通过声波相位差量测, 设声速为定值  $c = 1500 \text{ m/s}$ , 取  $\sigma_{r,LF}^2 = (5 \text{ m})^2$  和  $\sigma_{\theta,LF}^2 = (1^\circ)^2$ 。GPS 量测噪声分别为  $\sigma_x^2 = (0.1 \text{ m})^2$  和  $\sigma_y^2 = (0.1 \text{ m})^2$ 。

下面将分别研究初始系统可以获得精确的噪声参数和获得的噪声参数存在较大误差时 3 个学习算法对 EKF 协同导航性能的影响。仿真中选择 400 个测试点进行导航性能分析, 并采用 RMS 误差进行度量。

### 4.1 初始时刻系统可获得精确的噪声协方差参数时算法性能分析

$$\text{假设实际的噪声协方差参数为 } \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \sigma_{v,F}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\phi,F}^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{与 } \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \sigma_{r,LF}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta,LF}^2 \end{pmatrix}, \text{ 初始系统获得的噪声协方差}$$

为  $\mathbf{Q}'$  和  $\mathbf{R}'$ , 且  $\mathbf{Q}' = \mathbf{Q}, \mathbf{R}' = \mathbf{R}$ 。图3给出了各协同导航算法定位的从 AUV 轨迹。图4给出了常规 EKF 算法在 400 个测试时刻的定位误差, 图5至图7分别给出了文中 3 种学习算法在 400 个测试时刻的定

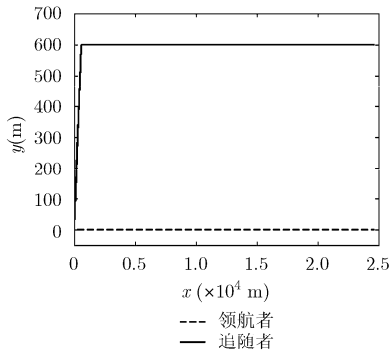


图 2 AUV 的仿真运动路径

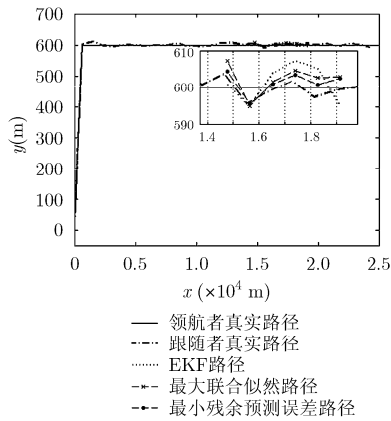


图 3 从 AUV 的协同导航轨迹

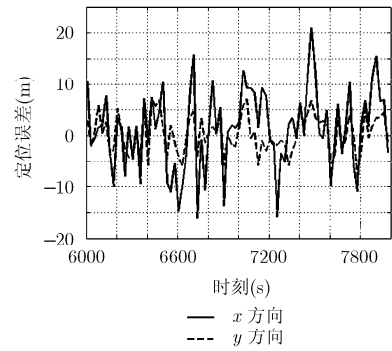


图 4 EKF 算法定位误差

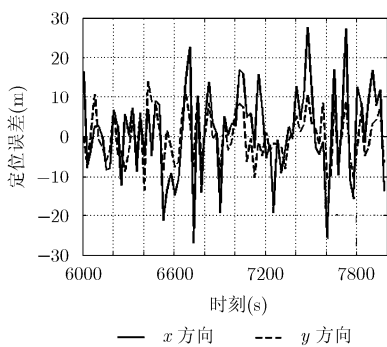


图 5 最大化联合似然算法定位误差

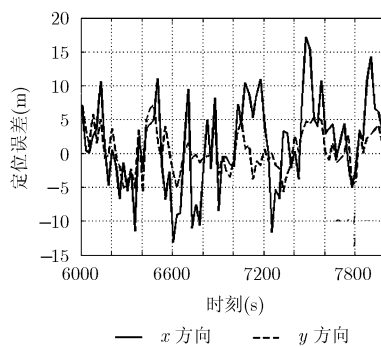


图 6 最小残余预测误差算法定位误差

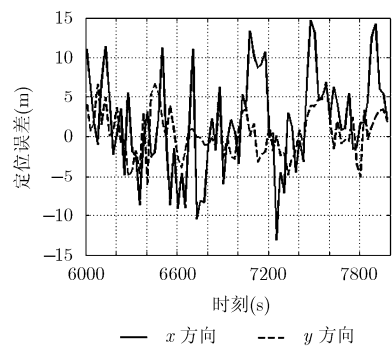


图 7 最大化预测似然算法定位误差

位误差。表1给出了常规EKF算法和应用3个学习算法在400个测试时刻处的RMS误差。

表 1 初始获得精确的噪声协方差参数时各算法定位误差

协同导航算法	RMS 误差(m)
EKF	13.2
最大联合似然	15.8
最小残余预测误差	12.5
最大预测误差	12.6

仿真结果表明,当初始给定协方差参数准确时,EKF 滤波算法的 RMS 误差大约为 13.2 m;最大联合似然算法的 RMS 误差约为 15.8 m,误差比 EKF 算法大,这是由于该算法并没有真正训练 EKF 滤波器,而是训练独立的滤波器元素,并假设这两者等价,而实际的协同导航系统不完全服从该假设(比如存在相关噪声),因此带来较大误差;最小残余预测误差算法与最大预测误差算法的 RMS 误差要小于 EKF 算法,这是由于通过训练 EKF 滤波器获取了更优的噪声协方差参数,即提取了 EKF 内部的关联信息,从而提高了导航精度。

#### 4.2 初始时刻系统获得的噪声协方差参数与实际参数存在较大偏差时算法性能分析

实际情况下,初始噪声协方差参数很难获得准确值,往往存在较大误差。假设实际的噪声协方差参数分别为

$$R = \begin{pmatrix} \sigma_{r,LF}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta,LF}^2 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} (10\sigma_{v,F})^2 & 0 \\ 0 & (10\sigma_{\phi,F})^2 \end{pmatrix}$$

初始系统获得的噪声协方差分别为  $Q' = \begin{pmatrix} \sigma_{v,F}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\phi,F}^2 \end{pmatrix}$ ,

$R' = R$ 。图8给出了从AUV的协同导航轨迹。图9给出了常规EKF算法在400个测试时刻的定位误差,图10~图12分别给出了应用文中3个学习算法在400个测试时刻的定位误差。表2给出了常规EKF算法和3个学习算法在400个测试时刻处的RMS误差。

仿真结果表明,当初始时刻不能获取准确的噪声协方差参数时,EKF 滤波算法的 RMS 误差大约为 20.0 m。3 个学习算法的 RMS 误差分别为 15.6 m, 13.0 m 与 13.2 m,可见学习算法大大提高了单领航者 AUV 协同导航系统的性能。

#### 5 结束语

本文应用一系列算法来训练 EKF 的噪声参数。

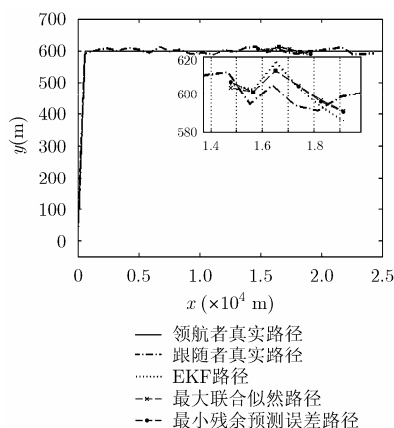


图8 从AUV的协同导航轨迹

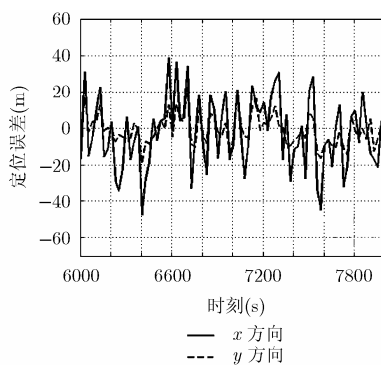


图9 EKF算法定位误差

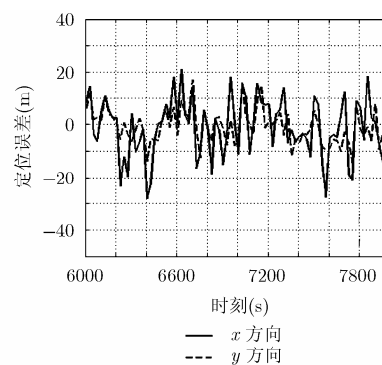


图10 最大化联合似然算法定位误差

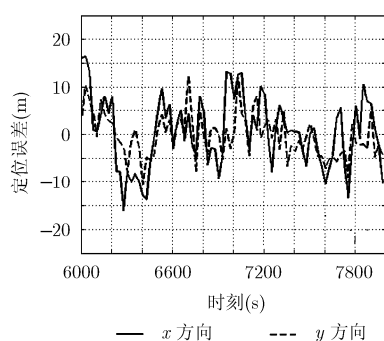


图11 最小残余预测误差算法定位误差

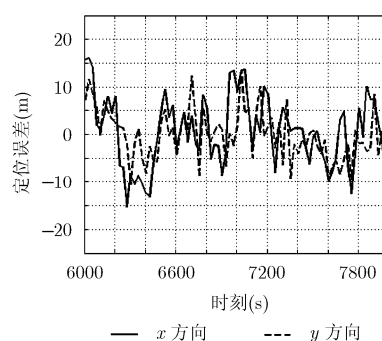


图12 最大化预测似然算法定位误差

表2 初始误差协方差参数设为大误差值时算法定位误差

协同导航算法	RMS 误差(m)
EKF	20.0
最大联合似然	15.6
最小残余预测误差	13.0
最大预测误差	13.2

所有的算法有相同的思想:通过调整EKF的噪声协方差参数来最大化系统状态预测精度。仿真结果表明,训练算法与常规EKF算法相比有两个优点。第一,它完全自动搜索噪声协方差参数,解决了人工调节费时费力的缺点。第二,通过训练学习获得的噪声协方差参数比初始的噪声参数更优,从而提高了协同导航系统精度。

### 参考文献

- [1] Paull L, Saedi S, Seto M, et al. AUV navigation and localization: A review[J]. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 2014, 39(4): 131-149.
- [2] Liu Ming-yong, Li Hong, and Liu Kun. Geomagnetic navigation of AUV without a priori magnetic map[C]. *MTS/IEEE OCEANS*, Taipei, 2014: 1-5.
- [3] 刘明雍. 水下航行器协同导航技术[M]. 北京: 国防工业出版社, 2014: 1-117.  
Liu Ming-yong. *Cooperative Navigation Technology for Underwater Vehicles*[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 2014: 1-117.
- [4] Kalman R. A new approach to linear filtering and prediction problems[J]. *Transactions of the ASME-Journal of Basic Engineering*, 1960, 82(Series D): 35-45.
- [5] Abbeel P, Coates A, Montemerlo M, et al. Discriminative training of Kalman filters[C]. *Robotics: Science and Systems*, Cambridge, 2005: 289-296.
- [6] Zhang Li-chuan, Xu De-min, Liu Ming-yong, et al. Cooperative navigation and localization for multiple UUVs [J]. *Journal of Marine Science and Application*, 2009, 8(3): 216-221.
- [7] Fallon M, Papadopoulos G, Lenorad J, et al. Cooperative AUV navigation using a single maneuvering surface craft[J]. *The International Journal of Robotics Research*, 2011, 29(12): 1461-1474.
- [8] 李闻白, 刘明雍, 李虎雄, 等. 基于单领航者相对位置测量的多AUV协同导航系统定位性能分析[J]. *自动化学报*, 2011, 37(6): 724-736.  
Li Wen-bai, Liu Ming-yong, Li Hu-xiong, et al. Localization performance analysis of cooperative navigation system for

- multiple AUVs based on relative position measurements with a single leader[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2011, 37(6): 724-736.
- [9] Liu Ming-yong, Li Wen-bai, Mu Bing-xian, *et al.*. Cooperative navigation for multiple AUVs based on relative range measurements with a single leader[C]. IEEE International Conference on Intelligent Computing and Intelligent Systems, Xiamen, 2010: 762-766.
- [10] Liu Jian, Xu De-min, Zhang Fu-bin, *et al.*. Research on cooperative navigation for multiple UUVs[C]. International Symposium on Instrumentation & Measurement, Sensor Network and Automation, Sanya, 2012: 248-251.
- [11] Maki T, Matsuda T, Sakamaki T, *et al.*. Navigation method for underwater vehicles based on mutual acoustical positioning with a single seafloor station[J]. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 2013, 38(1): 167-176.
- [12] Teo K, Goh B, and Chai O. Fuzzy docking guidance using augmented navigation system on an AUV[J]. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 2014, 40(2): 1-13.
- [13] Roumeliotis S and Bekey G. Distributed multirobot localization[J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2002, 18(5): 781-795.
- [14] Roweis S and Ghahramani Z. A unifying review of linear Gaussian models[J]. *MIT Press Journals*, 1999, 11(2): 305-345.
- 杨少凡: 男, 1991 年生, 博士生, 研究方向为多 AUV 协同导航、定位、水声阵列信号处理.
- 余华兵: 男, 1975 年生, 研究员, 研究方向为水声阵列信号处理.
- 陈新华: 男, 1978 年生, 副研究员, 研究方向为水声信号处理.
- 孙长瑜: 男, 1954 年生, 研究员, 研究方向为水声阵列信号处理.