

基于差值映射的压缩感知 MUSIC 算法

吕志丰^{*①②} 雷宏^①

^①(中国科学院电子学研究所 北京 100190)

^②(中国科学院大学 北京 100049)

摘要: 多快拍(MMV)问题旨在恢复具有相同稀疏结构的多列信号。在传统阵列信号处理中 MMV 问题的求解通常采用多重信号分类(MUSIC)等确定性方法实现,但当快拍数不足或存在相干源时该类方法失效;而在压缩感知(CS)的概率求解模型下,即使信源相干也能得到恢复结果,但现有算法普遍性能不足。近期 Kim 等人的研究表明,将 CS 与 MUSIC 相结合可得到比二者更加优秀的性能和更为宽泛的使用条件,该方法被称作压缩感知 MUSIC 或 CS-MUSIC 算法。作为一种投影型非凸优化算法,差值映射(DM)最早用于解决 X 射线晶体学中的相位恢复问题,并逐渐在其他非凸及压缩感知问题的求解中展示出优良性能。该文提出一种基于差值映射的 CS-MUSIC 算法,仿真结果表明该算法在 MMV 问题求解中十分有效,相比经典 CS-MUSIC 具有更高的恢复成功率。

关键词: 压缩感知; 多快拍问题; 联合稀疏; 多重信号分类; 差值映射

中图分类号: TN911.72

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2015)08-1874-05

DOI: 10.11999/JEIT141542

Compressive Sensing MUSIC Algorithm Based on Difference Map

Lü Zhi-feng^{①②} Lei Hong^①

^①(Institute of Electronics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

^②(University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: The Multiple Measurement Vectors (MMV) problem addresses the recovery of unknown input vectors which share the same sparse support. The Compressed Sensing (CS) has the capability of estimating the sparse support even in coherent cases, where the traditional array processing approaches like Multiple Signal Classification (MUSIC) often fail. However, CS guarantees the accurate recovery in a probabilistic manner, and often shows inferior performance in cases where the traditional ways succeed. Recently, a novel compressive MUSIC (or CS-MUSIC) algorithm is proposed by Kim *et al.*, in which both the advantages of CS and traditional MUSIC-like methods are combined together. As an iterative projecting algorithm, Difference Map (DM) is first used to solve the phase retrieval problem in crystallography. Recent results show that it has excellent performance in solving a wide variety of non-convex problems like compressed sensing. In this paper, a DM-based CS-MUSIC algorithm is proposed. Experiments show that the proposed algorithm is very effective in MMV problem solving and the success rate of CS-MUSIC is dramatically improved.

Key words: Compressed Sensing (CS); Multiple Measurement Vectors (MMV) problem; Joint sparsity; Multiple Signal Classification (MUSIC); Difference Map(DM)

1 引言

压缩感知(Compressed Sensing, CS)^[1,2]主要研究在严重欠采样的情况下如何精确恢复具有稀疏结构的信号。其求解理论基于概率模型,通常借助一系列的优化算法来实现信号恢复。近年来 CS 已成为信号处理领域的研究热点之一,并且在不同应用方向取得了成功^[3-8]。在 CS 理论中,多快拍问题(Multiple Measurement Vector, MMV)旨在辨识具有相同稀疏支集的多列未知信号,基于 CS 的求解

算法在快拍数不足和信源相干时仍可得到 MMV 问题的解,但目前算法在性能上普遍受稀疏度影响严重。

在传统阵列信号处理中,MMV 问题等价于波达方向(Direction-Of-Arrival, DOA)估计问题^[9]。这类问题的求解往往基于信号和噪声子空间的确切模型,通过空间谱扫描得到最终结果,其中以多重信号分类(MUSIC)算法^[10]最具代表性。该类方法理论性能良好,但在快拍数不足或信源相干时将失效。

结合 CS 在使用条件上的宽泛性和 MUSIC 类算法在性能上的优良性, Kim 等人在文献[11]中创新性地提出了 CS-MUSIC 算法用于 MMV 问题的求解。

该文献从理论上给出了 CS-MUSIC 算法的性能分析,并详细阐述了 CS 和 MUSIC 类算法之间的内在联系。同期文献[12]也给出了相似的独立结果,并将其方法称为子空间增强型多重分类(Subspace-Augmented MUSIC, SA-MUSIC)。

作为一种非凸优化算法,差值映射^[13,14](Difference Map, DM)最早用于解决 X 射线晶体学中的相位恢复问题^[15,16],并逐渐在其他非凸及压缩感知问题的求解中展示出优良性能^[14,17,18]。文献[18]将 DM 算法引入到 CS 单快拍(Single Measurement Vector, SMV)问题的求解和稀疏字典编码中,结论表明其性能要远远优于现有的大多 CS 算法。

本文将差值映射引入到 MMV 问题的求解中,并提出了一种基于差值映射的 CS-MUSIC 算法。仿真结果表明本文所述方法在 MMV 问题的求解中十分有效,且使得经典 CS-MUSIC 的恢复性能得到了显著提高。

本文组织结构如下:在第 2 节中分别介绍 MMV 问题、CS-MUSIC 算法以及差值映射算法;在第 3 节中给出 DM 算法在 MMV 问题和 CS-MUSIC 中的具体求解过程;第 4 节通过数值仿真验证本文所提算法的有效性和性能优势。

2 多快拍问题及差值映射算法

2.1 压缩感知和多快拍问题

若 m, r 分别表示阵元数和快拍数, $n > m$ 表示接收信号长度, $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 表示采样矩阵, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{m \times r}$ 表示观测信号, $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r] \in \mathbb{R}^{n \times r}$ 表示待估计信号,则矩阵形式的 MMV 问题可表达为

$$\min \|\mathbf{X}\|_0, \text{ s.t. } \mathbf{Y} = \Phi \mathbf{X} \quad (1)$$

这里 $\|\mathbf{X}\|_0 = |\text{supp } \mathbf{X}| = k$, 表示 \mathbf{X} 中非零行的个数即稀疏度。其中 $\text{supp } \mathbf{X} = \{1 \leq i \leq n : \mathbf{x}^i \neq 0\}$, \mathbf{x}^i 为矩阵 \mathbf{X} 的第 i 行元素。当 $r = 1$ 时,多快拍问题便退化为单快拍问题。

由于未知信号在结构上具有相似的稀疏分布,相比单快拍($r = 1$)问题,其可恢复稀疏度将更高。文献[19,20]从理论上给出了 MMV 问题的稀疏度恢复上限,即

$$\|\mathbf{X}\|_0 < \frac{\text{spark}(\Phi) + \text{rank}(\mathbf{Y}) - 1}{2} \leq \text{spark}(\Phi) - 1 \quad (2)$$

其中 $\text{rank}(\mathbf{Y})$ 为矩阵 \mathbf{Y} 的秩, $\text{spark}(\Phi)$ 表示矩阵 Φ 的最小相关组。当快拍数 r 提高时, $\text{rank}(\mathbf{Y})$ 相应增大,由式(2)可知稀疏度恢复上限将随之得到提高。

目前 CS 框架下用于求解 MMV 问题的方法主要有贪婪类算法(如同时正交匹配追踪 Simultaneous Orthogonal Matching Pursuit, S-OMP^[20,21])、混合范数凸松弛类算法^[22,23]、贝叶斯

类方法(如多重稀疏贝叶斯学习(Multiple Sparse Bayesian Learning, M-SBL)^[24])、随机类算法(如 Reduce MMV and Boost, ReMBo^[25])以及基于块稀疏模型的算法^[26,27]等。但当前多数求解算法在性能上与此理论上限还存在相当差距^[11],随着信号稀疏度 k 的变大,信号恢复效果将逐渐变差。

2.2 CS-MUSIC 算法

在阵列信号处理的 DOA 估计中,传统方法主要有 Capon 最小方差方法^[28]、MUSIC 算法^[10]、基于旋转不变技术的信号参数估计(Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques, ESPRIT)^[29]等,其中以 MUSIC 算法的应用最为广泛。在信源不相干的条件下,文献[19]给出了 MUSIC 算法在 MMV 问题求解中的性能上限为

$$\|\mathbf{X}\|_0 < \text{spark}(\Phi) - 1 \quad (3)$$

这表明在快拍数足够时, MUSIC 算法可达到对 MMV 问题的理想恢复。但在信源相干条件下,即信号矩阵 \mathbf{X} 中存在相关行时, MUSIC 算法将失效。

结合 CS 的概率性重建方式和 MUSIC 算法的确定性重建方式, Kim 等人提出了 CS-MUSIC 算法^[11]。该算法的主要思想是将待恢复的 k 个非零行拆分为两部分,首先通过压缩感知算法(如同时正交匹配追踪(S-OMP)、二阈值(2-thresholding)等)求得 $k - \text{rank}(\mathbf{Y})$ 行支集,再利用已得支集的信息构建新的噪声子空间,通过类似 MUSIC 算法的空间谱扫描计算得出剩余支集位置。CS-MUSIC 在 $\text{rank}(\mathbf{Y})$ 接近 1 时(即单快拍模式)趋于 CS 算法;而在 $\text{rank}(\mathbf{Y})$ 接近 k 时趋于传统 MUSIC 算法^[11]。该算法很好地结合了 CS 和 MUSIC 的优点,在拓宽使用条件的基础上保持了优良性能。作者在文中同时指出,即使存在相干信源, CS-MUSIC 的恢复性能仍可达到 MMV 问题的理论上限。

2.3 差值映射算法

差值映射算法最早由文献[13]在解决 X 射线晶体学中的相位恢复问题时提出。在 DM 算法中,某一问题的解被看作两个约束条件集合 A 与 B 的交集,集合 A, B 分别描述了该问题解所满足的一类约束条件。空间点 ω_0 向 A, B 的投影分别表示为 $P_A(\omega_0)$ 与 $P_B(\omega_0)$,定义为相应集合中与 ω_0 距离最短的点,即

$$P_{A,B}(\omega_0) = \min_{\mathbf{w}} \|\omega_0 - \mathbf{w}\|_2, \text{ s.t. } \mathbf{w} \in A, B \quad (4)$$

通过在两个条件集合间的不断投影,迭代点最终收敛于交集处从而得到问题的解。DM 算法的一步迭代定义为

$$D(\omega) = \omega + \beta [P_A(f_B(\omega)) - P_B(f_A(\omega))] \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} f_A(\omega) &= P_A(\omega) - (P_A(\omega) - \omega) / \beta \\ f_B(\omega) &= P_B(\omega) + (P_B(\omega) - \omega) / \beta \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中参数 $\beta \neq 0$ 。

该算法与其前身——混合输入输出^[30](Hybrid Input-Output, HIO)算法类似, 均是由交替投影^[31-34](Alternating Projection, AP)演化而来的投影迭代算法。而交替投影通常只能用来解决凸问题, 在非凸情况下由于局部停滞效应而无法得到全局最优解。HIO 算法在投影过程中通过引入原始项来避免局部停滞, 在非凸问题求解中取得了成功; 而 DM 算法则找到了具有广义形式的迭代方法, 得到了更加优良的性能。当参数 $\beta = 1$ 时, DM 则退化为 HIO 算法^[3]。理论和实践表明, DM 算法极其适合非凸问题的快速求解, 并已在蛋白质折叠、大规模数独等众多 NP 难的非凸问题求解中取得了相当的成功^[4]。近期 DM 算法已被应用到压缩感知 SMV 问题的求解^[17,18]和稀疏字典编码^[18]中, 且获得了优于当前主流算法的性能。文献[18]的研究结果表明, 在解决 L0 范数的非凸优化问题中, 差值映射相比 OMP 类算法在恢复误差和对噪声的鲁棒性上均具有较大性能优势。

本文将 DM 算法推广到 MMV 问题的求解中, 并在 CS-MUSIC 算法中加以应用。仿真结果表明, 本文所述基于 DM 的 CS-MUSIC 算法性能优秀, 相比原始文献[11]中的实验结果在恢复成功率上得到了显著提升。

3 DM 算法在 MMV 问题求解和 CS-MUSIC 中的具体实现

3.1 DM 求解压缩感知 MMV 问题

在 MMV 问题中, 给定采样矩阵 $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ($m < n$) 和观测结果 $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{m \times r}$, 本文希望恢复得到在结构上具有相似稀疏性的原始信号 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times r}$, 同时满足 $\mathbf{Y} = \Phi \mathbf{X}$ 。这一问题的限制条件可由两个集合表示:

$$\left. \begin{aligned} A &= \{ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times r} : \|\mathbf{X}\|_0 \leq s \} \\ B &= \{ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times r} : \Phi \mathbf{X} = \mathbf{Y} \} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中 $\|\mathbf{X}\|_0 = |\text{supp } \mathbf{X}|$ 表示矩阵 \mathbf{X} 中非零行的个数; s 为预定义整数表示稀疏度大小。这样在 A , B 两集合间进行迭代投影, 最终得到的收敛结果即为 MMV 问题式(1)的解。

向集合 A 的投影过程是 CS 中常用的硬阈值算法, 其结果可表示为

$$P_A(\mathbf{X}) = [\mathbf{X}]_s \quad (8)$$

其中 $[\mathbf{X}]_s$ 表示保留 \mathbf{X} 中绝对值之和最大的 s 行元

素, 而将其余 $n - s$ 行元素置零。

向集合 B 的投影结果则为

$$P_B(\mathbf{X}) = \mathbf{X} - \Phi^\dagger (\Phi \mathbf{X} - \mathbf{Y}) \quad (9)$$

其中 $\Phi^\dagger = \Phi^T (\Phi \Phi^T)^{-1}$ 表示矩阵 Φ 的伪逆。此结果虽根据无噪条件推出, 但实验表明在噪声存在条件下依然适用。

3.2 基于 DM 的 CS-MUSIC 算法

根据 3.1 节的分析及文献[11]中对 CS-MUSIC 算法的描述, 本文提出基于 DM 的 CS-MUSIC 算法步骤为:

步骤 1 $\mathbf{X}_0 = \Phi^\dagger \mathbf{Y}$, $i = 1$, 迭代终止误差 $\text{tol} > 0$, $\beta \in [-1, 0)$;

步骤 2 设定 $s = k - r$, 进行如下迭代求解, 终止条件为 $\|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{i-1}\|_2^2 < \text{tol}$;

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{X}_{i-1} + \beta [P_A(f_B(\mathbf{X}_{i-1})) - P_B(f_A(\mathbf{X}_{i-1}))]$$

步骤 3 设 I_{k-r} 为步骤 2 中得到的非零行索引集, 令 $S = I_{k-r}$;

步骤 4 设 j 为 I_{k-r} 集合外的任意索引值, 即 $j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus I_{k-r}$, φ_j 为矩阵 Φ 的第 j 列, 遍历计算 $\eta(j) = \varphi_j^T [P_{R(\mathbf{Y})} + P_{P_{R(\mathbf{Y})}^\perp \Phi_{k-r}}] \varphi_j$;

步骤 5 将 $\eta(j)$ 降序排列, 取前 r 个元素所对应的索引值作为剩余非零行索引, 补充至 S 。其中投影算子 P_A 及 P_B 如式(8)、式(9)所示; $R(\mathbf{Y})$ 为矩阵 \mathbf{Y} 的列空间, 程序中可通过对 \mathbf{Y} 进行特征值分解等运算得到。实验表明 β 值在一定范围内的变化对恢复性能并无明显影响。

4 仿真实验结果

4.1 随机 MMV 问题求解

首先通过随机实验对 DM 算法的收敛性进行验证。取阵元数 $m = 32$, 信号长度 $n = 128$, 快拍数 $r = 16$, 稀疏度 $k = 10$, 随机生成高斯分布的采样矩阵 Φ 和联合稀疏信号 \mathbf{X} , 在无噪和信噪比为 40 dB 两种条件下分别进行数值实验。

在无噪条件下, 取 $\beta = -0.6$, $\text{tol} = 1 \times 10^{-6}$, 所得算法收敛性如图 1 所示。由图 1 可知 DM 算法在 MMV 问题求解中具有较好的收敛性, 可在少量迭代次数内得到真实解。为了得到算法性能随参数 β 的变化, 随后对一定范围内的 β 值进行遍历实验, 得到恢复误差和迭代次数随 β 的变化如图 2 所示。由图 2 可看出, 在 $[-0.8, -0.5]$ 范围内 β 的变化基本对恢复性能和迭代次数无明显影响, 参数选择范围较宽。

针对采样噪声存在的情形, 在以上实验的基础上加入 SNR=40 dB 的高斯白噪声, 取 $\beta = -0.6$, $\text{tol} = 5 \times 10^{-3}$ 进行数值实验, 所得收敛曲线如图 3 所示。同样对参数 β 进行遍历, 得到恢复误差和迭

代次数的变化如图 4 所示。由结果知，DM 算法同样适用于噪声存在的情况。对比图 2 和图 4 左侧纵轴单位可知，当噪声存在时，算法恢复精度相应变差，但依然有效。

DM 算法的求解速度与迭代次数成正比，而迭代计算中 Φ 为固定矩阵，其伪逆应在迭代之前给出以避免运算量的增加。在 β 一定的条件下，DM 的迭代次数与 tol 关系密切，若选的过小会极度增加无谓迭代的次数；若选的过大则会导致迭代提前结束，无法得到理想的恢复精度。tol 值应根据具体问题选择，目前并没有理论上的确定结果。如何得到最优的 tol 值也是今后研究的重要方向。

4.2 基于 DM 的 CS-MUSIC 算法性能比较

这里对本文第 3 节所述基于 DM 的 CS-MUSIC 算法进行仿真实验，并同文献[9]中基于 S-OMP 的算法及传统 MUSIC 算法等进行性能上的对比。取高斯分布的随机信号长度 $n = 128$ ，稀疏度 $k = 10$ ，限制 $\text{rank}(\mathbf{X}) = 5$ 以保证信源相干条件，采样信噪比 $\text{SNR} = 30 \text{ dB}$ ；针对 [10, 50] 内不同阵元数 m 分别进行求解，若所得结果与真实信号支集位置相同则定义为求解成功；重复独立随机实验 500 次，统计各算法所有 m 值对应的成功概率。实验中假设信号稀疏度 k 为已知，DM 算法参数 $\beta = -0.6$ ， $\text{tol} = 1 \times 10^{-6}$ ，最大迭代次数限制为 500。分别对 S-OMP 算法、传统 MUSIC 算法、基于 S-OMP 的 CS-MUSIC 算法

及本文所述基于 DM 的 CS-MUSIC 算法进行上述实验过程，对快拍数 $r = 15$ 及 $r = 256$ 两种情形的统计结果分别如图 5、图 6 所示。

由图 5 可知，随着阵元数 m 的增多，得到的采样信息随之增多，各算法在恢复成功率上均有提升趋势；对比图 5 及图 6 可知，当快拍数 r 增加时，各算法的恢复成功率均有所提高，但程度不尽相同；在信源相干的情况下，传统 MUSIC 算法已然失效，其恢复成功率最高仅为 20% 左右，但基于 S-OMP 的 CS-MUSIC 算法仍保持着较高的恢复成功率，且性能上优于纯粹的 S-OMP 算法；同时可以明显看出，本文所述算法在两种情形下都保持了最好的恢复效果，尤其在快拍数 $r = 256$ 情况下具有绝对的性能优势。

5 结束语

本文将差值映射算法引入到多快拍问题的求解中，并将其应用于 CS-MUSIC 算法。数值实验表明 DM 算法对 MMV 问题的求解十分有效，且基于 DM 的 CS-MUSIC 算法在性能上具有明显优势，可在保持求解精度的条件下有效缩减阵元数量，从而节省阵列信号处理的系统成本。本文算法在求解结果上表现优异，如何从理论上优化参数选择、加快算法收敛速度，以及分析和提升算法的噪声鲁棒性则是下一步研究的重点。

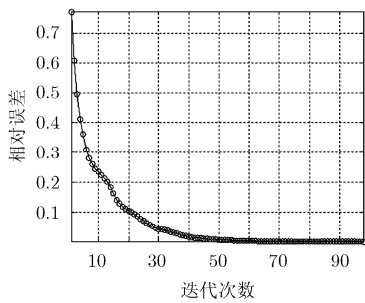


图 1 算法收敛性曲线 (SNR=∞)

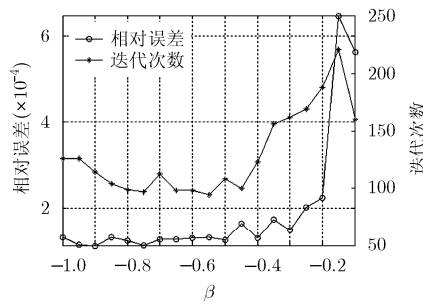


图 2 相对误差和迭代次数随参数变化曲线 (SNR=∞)

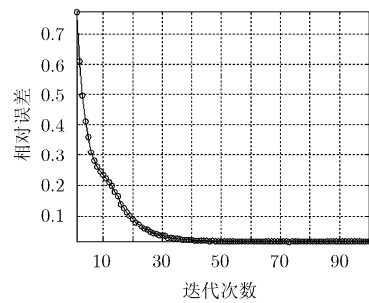


图 3 算法收敛性曲线 (SNR=40 dB)

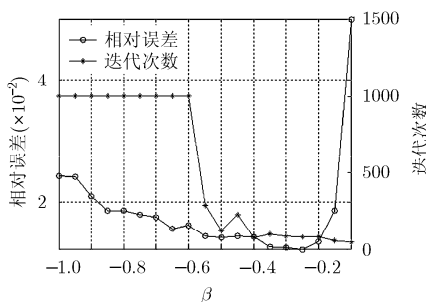


图 4 相对误差和迭代次数随参数变化曲线 (SNR=40 dB)

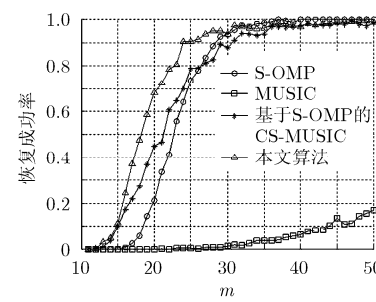


图 5 恢复成功率随阵元数变化关系 ($n=128, r=15$)

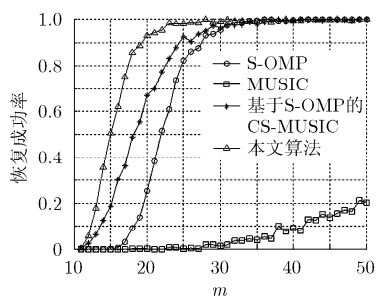


图 6 恢复成功率随阵元数变化关系 ($n=128, r=256$)

参考文献

- [1] Donoho D. Compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289–1306.
- [2] Cades E, Romberg J, and Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(2): 489–509.
- [3] Fang L Y, Li S T, Ryan P, et al. Fast acquisition and reconstruction of optical coherence tomography images via sparse representation[J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2013, 32(11): 2034–2049.
- [4] Yang J, Thompson J, Huang X T, et al. Segmented reconstruction for compressed sensing SAR imaging[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2013, 51(7): 4214–4225.
- [5] Friedland, S, Li Q, and Schonfeld D. Compressive sensing of sparse tensors[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2014, 23(10): 4438–4447.
- [6] Hawes M B and Liu W. Robust sparse antenna array design via compressive sensing[C]. IEEE International Conference on Digital Signal Processing, Nice, France, 2013: 1–5.
- [7] Northardt E T, Bilik I, and Abramovich Y I. Spatial compressive sensing for direction-of-arrival estimation with bias mitigation via expected likelihood[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, 61(5): 1183–1195.
- [8] Nagahara M, Quevedo D E, and Ostergaard J. Sparse packetized predictive control for networked control over erasure channels[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(7): 1899–1905.
- [9] Krim H and Viberg M. Two decades of array signal processing research: the parametric approach[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 1996, 13(4): 67–94.
- [10] Schmidt R. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1986, 34(3): 276–280.
- [11] Kim J M, Lee O K, and Ye J C. Compressive MUSIC: revisiting the link between compressive sensing and array signal processing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2012, 58(1): 278–301.
- [12] Lee K and Bresler Y. Subspace-augmented MUSIC for joint sparse recovery with any rank[C]. Proceedings of the IEEE Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop, Jerusalem, Israel, 2010: 205–208.
- [13] Elser V. Phase retrieval by iterated projections[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2003, 20(1): 40–55.
- [14] Elser V, Rankenburg I, and Thibault P. Searching with iterated maps[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2007, 104(2): 418–423.
- [15] Eldar Y C, Sidorenko P, Mixon D G, et al. Sparse phase retrieval from short-time Fourier measurements[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, 22(5): 638–642.
- [16] Shechtman Y, Beck A, and Eldar Y C. GESPAR: efficient phase retrieval of sparse signals[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(4): 928–938.
- [17] Qiu K and Dogandzic A. Nonnegative signal reconstruction from compressive samples via a difference map ECME algorithm[C]. Proceedings of the IEEE Statistical Signal Processing Workshop, Nice, France, 2011: 561–564.
- [18] Landecker W, Chartrand R, and DeDeo S. Robust compressed sensing and sparse coding with the difference map[C]. IEEE European Conference on Computer Vision, Zurich, Switzerland, 2014: 315–329.
- [19] Feng P. Universal minimum-rate sampling and spectrum-blind reconstruction for multiband signals[D]. [Ph.D. dissertation], University of Illinois, Urbana-Champaign, 1997.
- [20] Chen J and Huo X. Theoretical results on sparse representations of multiple measurement vectors[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(12): 4634–4643.
- [21] Tropp J A, Gilbert A C, and Strauss M J. Algorithms for simultaneous sparse approximation, Part I: Greedy pursuit[J]. *Signal Processing*, 2006, 86(3): 572–588.
- [22] Malioutov D, Cetin M, and Willsky A S. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(8): 3010–3022.
- [23] Tropp J A. Algorithms for simultaneous sparse approximation. Part II: Convex relaxation[J]. *Signal Processing*, 2006, 86(3): 589–602.
- [24] Wipf D P. Bayesian methods for finding sparse representations[D]. [Ph.D. dissertation], University of California, San Diego, 2006.
- [25] Mishali M and Eldar Y C. Reduce and boost: recovering arbitrary sets of jointly sparse vectors[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(10): 4692–4702.
- [26] Eldar Y C, Kuppinger P, and Bolcskei H. Compressed sensing of block-sparse signals: uncertainty relations and efficient recovery[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(6): 3042–3054.
- [27] Baraniuk R G, Cevher V, Duarte M F, et al. Model-based compressive sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, 56(4): 1982–2001.
- [28] Capon J. High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis[J]. *Proceedings of the IEEE*, 1969, 57(8): 1408–1418.
- [29] Roy R and Kailath T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1989, 37(7): 984–995.
- [30] Fienup J R. Phase retrieval algorithms: a comparison[J]. *Applied Optics*, 1982, 21(15): 2758–2769.
- [31] Bauschke H and Borwein J. On projection algorithms for solving convex feasibility problems[J]. *SIAM Review*, 1996, 38(3): 367–426.
- [32] Adiga A and Seelamantula C S. An alternating Lp-L2 projections algorithm (ALPA) for speech modeling using sparsity constraints[C]. IEEE International Conference on Digital Signal Processing, Hong Kong, China, 2014: 291–296.
- [33] Yan W, Wang Q, and Shen Y. Shrinkage-based alternating projection algorithm for efficient measurement matrix construction in compressive sensing[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2014, 63(5): 1073–1084.
- [34] Hesse R, Luke D R, and Neumann P. Alternating projections and Douglas-Rachford for sparse affine feasibility[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(18): 4868–4881.
- 吕志丰: 男, 1987年生, 博士生, 研究方向为压缩感知、阵列信号处理。
- 雷宏: 男, 1963年生, 研究员, 博士生导师, 研究方向为电磁场与微波技术、天线理论与工程、信号处理理论与技术。