

基于秩减估计器的L型阵列二维波达角估计算法

魏子翔 崔 嵬* 侯建刚 吴嗣亮
(北京理工大学信息与电子学院 北京 100081)

摘要: 针对L型阵列2维波达角(2D-DOA)估计问题,该文提出了一种新的基于秩减估计器的算法。该算法利用辅助角将2D-DOA估计问题转换为两个级联的1D-DOA估计问题:首先采用基于传播算子的秩减估计器获得高精度的辅助角估计;其次利用辅助角估计结果获得某一入射角的一元代价函数,借鉴root-MUSIC算法通过对多项式求根获得某一入射角估计,而另一入射角估计可由已得角度估计和辅助角估计通过简单转换获得且两入射角之间无需配对。运算量分析表明,该算法运算量与JEADE算法接近,大于CODE和root-MUSIC算法。仿真实验验证了该算法在不同信噪比、快拍数目条件下可获得高精度的DOA估计结果。

关键词: 信号处理; L型阵列; 2维波达角; 秩减估计器; 传播算子算法

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2015)08-1879-07

DOI: 10.11999/JEIT141538

Rank Reduction Estimator Based Algorithm for Estimating 2D-DOA with L-shaped Array

Wei Zi-xiang Cui Wei Hou Jian-gang Wu Si-liang

(School of Information and Electronics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: A novel algorithm is proposed for Two-Dimensional (2D) Direction Of Arrival (DOA) estimation issue with L-shaped array. By introducing an auxiliary electrical angle, 2D-DOA estimation problem is solved by two-step 1D-DOA estimation. Firstly auxiliary electrical angle estimation is given by a propagator based RAnk Reduction Estimator (RARE). Then a cost function about one incident angle is obtained, and the incident angle estimation is given by K zeros of polynomial relating to the cost function. Finally, The other incident angle estimation is given by simple algebraic operation between the obtained auxiliary electrical angle and incident angle estimations. Computational burden analysis is given in this paper. It is shown that the proposed algorithm has a roughly same computational burden with JEADE algorithm, while both of them has larger burden than CODE and root-MUSIC algorithms. Further, the Root-Mean-Square-Error (RMSE) expressions of the incident angle estimates are derived to validate the performance of the proposed algorithm.

Key words: Signal processing; L-shaped array; Two-Dimensional Direction Of Arrival (2D-DOA); RAnk Reduction Estimator (RARE); Propagator Method (PM)

1 引言

空间波达角(Direction Of Arrival, DOA)估计是雷达,声呐及通信领域中常见的参数估计问题。对于L型阵列的接收信号波达角估计问题,2维的多重信号分类(MUltiple SIgnal Classification, MUSIC)算法由于具有渐进最优的参数估计性能而受到关注。然而2维参数联合搜索所需的巨大运算量限制了其在实际问题中的应用。由此出现了一些利用阵列的结构特性以多个1维参数搜索乃至不需

要搜索来获得信号DOA估计的算法^[1-10]。文献[1, 2]将L型阵列中的两条均匀线阵分别划分为两个相互重叠的子阵,依靠子阵间的相位旋转不变性采用ESPRIT(Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques)算法或者传播算子算法(Propagator Method, PM)对接收信号进行处理获得目标的俯仰方位角估计。由于只利用了部分阵元的接收数据,这些算法的参数估计精度受到限制,且DOA估计完成后需进行参数配对。文献[3, 4]提出了基于奇异值分解的算法获得目标DOA估计。然而该算法中要求信号协方差矩阵为对角阵,当快拍数较小时参数估计精度恶化明显。文献[5, 6]提出了一种俯仰角和方位角联合估计(JEADE)的算

2014-12-04 收到, 2015-03-23 改回, 2015-06-09 网络优先出版
上海航天科技基金(SAST201215)和新世纪优秀人才支持计划
(NCET-13-0034)资助课题

*通信作者: 崔嵬 cuiwei@bit.edu.cn

法。JEADE 算法定义了目标的辅助角参数,即俯仰角和方位角的余弦差,利用两条线阵之间的特定相位关系采用广义 ESPRIT 算法获得目标辅助角估计,在此基础上采用特征分解的方法获得目标的 DOA 估计。该算法不需要参数配对的过程,然而其角度估计精度方面仍有改善的空间。文献[7]提出了一种计算高效的 2D-DOA 估计(CODE)算法,该算法利用传播算子算法对两条线阵的互协方差矩阵进行处理,无需通过特征值分解而获得了目标的 DOA 估计。不过该算法需要进行参数配对,且进行俯仰角或方位角估计时仍只利用了协方差矩阵的部分信息。文献[8]利用 CODE 算法获得某一入射角估计,并用其辅助获得另外的入射角的零空间,采用多项式求根的方法获得另一入射角估计。该算法相比 CODE 算法无需额外的参数配对过程,不过当多个信源之间估计的入射角间隔较大时,该算法相比 CODE 算法无明显精度优势。文献[9]利用协方差矩阵部分元素重构了信号子空间矩阵,提出一种极低代价的 2D-DOA 估计算法。由于只利用了协方差矩阵的部分元素,因而其 DOA 估计精度仍未达到最优。以上各算法均采用估计二阶统计量的方式获得目标的 2 维 DOA 估计。此外,文献[10]提出了一种基于三阶统计量的 2D-DOA 估计算法。该算法同样利用子阵间的特定相位关系,利用特征值分解的方法获得 2D-DOA 估计。然而相比基于二阶统计量的算法,基于三阶累积量的算法计算复杂度较高。

另一方面,秩减估计器(Rank Reduction Estimator, RARE)已在阵列误差自校准^[11-13]、阵列天线解基线模糊^[14]以及近场源定位^[15]等方面获得应用。由于多次高维数的行列式计算,RARE 算法运算量较大。针对 L 型阵列 2D-DOA 估计问题,本文利用辅助角将 2D-DOA 估计问题转换为两个 1D-DOA 估计问题。在此基础上,首先利用传播算子获得了一种较低代价的辅助角秩减估计器;其次利用辅助角估计结果得到某一条线阵阵列响应的零空间,借鉴 root-MUSIC 算法^[16]利用多项式求根方法获得该入射角估计,同时另外一个入射角估计可由已得到的角度估计和辅助角估计通过简单的代数运算获得。本文算法无需角度的 2 维搜索且获得入射角估计后无需参数配对,其 2D-DOA 估计精度优于现有的 CODE, JEADE 及 root-MUSIC 算法。

2 信号模型

如图 1 所示,由两条互相垂直的均匀线阵组成的 L 型阵列位于 xoz 平面中。每个线阵包含 $M+1$ 个阵元且阵元间距为 d ,则整个 L 型阵列包含 $2M+1$ 个

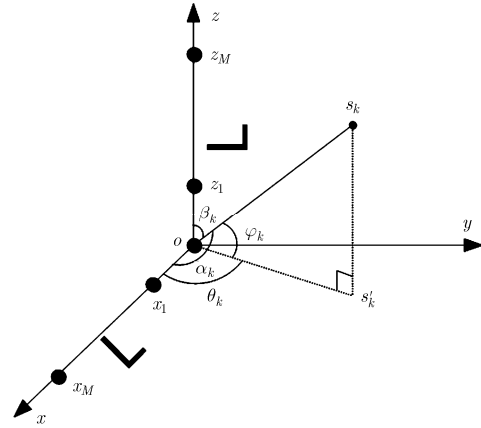


图 1 L 型阵列结构

阵元。假设有 K 个远场信源 s_k ($k=1,2,\dots,K$) 发射的信号入射到阵列所在平面上,信源 s_k 到坐标原点的连线 s_ko 与 x 轴和 z 轴的夹角分别为 α_k 和 β_k ,连线 s_ko 与 xoy 平面的夹角为 φ_k ,连线 s_ko 在 xoy 平面的投影 s'_ko 与 x 轴的夹角为 θ_k 。则剔除坐标原点处阵元后的两条线阵阵列输出信号分别为

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}(\alpha) \mathbf{s}(n) + \mathbf{w}_x(n) \quad (1)$$

$$\mathbf{z}(n) = \mathbf{A}(\beta) \mathbf{s}(n) + \mathbf{w}_z(n) \quad (2)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= [x_1(n), x_2(n), \dots, x_M(n)]^T \\ \mathbf{z}(n) &= [z_1(n), z_2(n), \dots, z_M(n)]^T \\ \mathbf{A}(\alpha) &= [a(\alpha_1), a(\alpha_2), \dots, a(\alpha_K)] \\ \mathbf{A}(\beta) &= [a(\beta_1), a(\beta_2), \dots, a(\beta_K)] \\ a(\alpha_k) &= [e^{ju_k}, e^{j2u_k}, \dots, e^{jMu_k}]^T, \\ u_k &= 2\pi d \cos \alpha_k / \lambda = 2\pi d \cos \varphi \cos \theta / \lambda \\ a(\beta_k) &= [e^{jv_k}, e^{j2v_k}, \dots, e^{jMv_k}]^T, \\ v_k &= 2\pi d \cos \beta_k / \lambda = 2\pi d \sin \varphi / \lambda \\ \mathbf{s}(n) &= [s_1(n), s_2(n), \dots, s_K(n)]^T \\ \mathbf{w}_x(n) &= [w_{x1}(n), w_{x2}(n), \dots, w_{xM}(n)]^T \\ \mathbf{w}_z(n) &= [w_{z1}(n), w_{z2}(n), \dots, w_{zM}(n)]^T \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

不失一般性,对阵列的信号模型做出以下假设:

(1) 两条均匀阵列各阵元均已校准,且为保证无模糊测角,相邻阵元间距 d 满足 $d \leq \lambda/2$;

(2) 信源 $s_1(n), s_2(n), \dots, s_K(n)$ 是统计独立的零均值高斯窄带平稳过程;

(3) 阵元噪声 $\mathbf{w}_x(n)$ 和 $\mathbf{w}_z(n)$ 是统计独立的零均值高斯过程,且与信源统计独立;

(4) 信源数目 K 已知且满足不等式 $K < M$ 。

3 基于秩减估计器的L型阵列2D-DOA估计算法

3.1 传播算子算法

完整的L型阵列的离散输出信号 $\mathbf{y}(n)$ 可表示为

$$\mathbf{y}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(n) \\ \mathbf{z}(n) \\ x_0(n) \end{bmatrix} = \mathbf{A}(\alpha, \beta) \mathbf{s}(n) + \begin{bmatrix} \mathbf{w}_x(n) \\ \mathbf{w}_z(n) \\ w_0(n) \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中

$$\mathbf{A}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\alpha) \\ \mathbf{A}(\beta) \\ \mathbf{1}_{1 \times K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1(\alpha) \\ \mathbf{C}(\alpha, \beta) \end{bmatrix} \begin{matrix} K \\ 2M - K + 1 \end{matrix} \quad (5)$$

式(5)中矩阵 $\mathbf{A}_1(\alpha) \in C^{K \times K}$, $\mathbf{C}(\alpha, \beta) \in C^{(2M-K+1) \times K}$ 。由于导向矢量矩阵 $\mathbf{A}(\alpha, \beta)$ 的秩为 K , 且矩阵 $\mathbf{A}_1(\alpha)$ 的秩亦为 K , 则导向矢量矩阵 $\mathbf{A}(\alpha, \beta)$ 中由剩余元素构成的矩阵 $\mathbf{C}(\alpha, \beta)$ 必可由矩阵 $\mathbf{A}_1(\alpha)$ 中的行向量线性表出, 即

$$\mathbf{C}(\alpha, \beta) = \mathbf{P}^H \mathbf{A}_1(\alpha) \quad (6)$$

式(6)中 \mathbf{P} 即为传播算子矩阵。传播算子估计可由数据矩阵或者数据协方差矩阵经处理获得^[17]。

$$\hat{\mathbf{P}}_{\text{data}} = (\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_1^H) \mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2^H \quad (7)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{\text{CSM}} = (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_1^H) \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2^H \quad (8)$$

其中, 子矩阵 $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$ 和 $(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$ 分别由数据矩阵和协方差矩阵划分得到:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} K \\ 2M - K + 1 \end{matrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{E} \{ \mathbf{y}(n) \mathbf{y}^H(n) \} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} K \\ 2M - K + 1 \end{matrix} \quad (10)$$

并且有限长度数据的协方差矩阵可由式(11)估计获得:

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{y}(n) \mathbf{y}^H(n) \quad (11)$$

定义矩阵 $\mathbf{Q} = [\mathbf{P}^T, -\mathbf{I}_{2M+1-K}]^T$, 则由式(5)和式(6)可以得到 $\mathbf{Q}^H \mathbf{A}(\alpha, \beta) = \mathbf{0}$, 此时目标的2D-DOA估计可通过最小化如式(12)所示的代价函数实现。

$$F(\alpha, \beta) = \mathbf{a}^H(\alpha, \beta) \cdot \mathbf{Q} (\mathbf{Q}^H \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^H \cdot \mathbf{a}(\alpha, \beta) \quad (12)$$

其中 $\mathbf{a}(\alpha, \beta) = [\mathbf{a}^T(\alpha), \mathbf{a}^T(\beta), 1]^T$ 。式(12)给出了关于入射角 α 和 β 的二元代价函数。为了获得两个入射角的估计, 无论是进行直接的2维联合搜索亦或采用一些全局最优化算法(如遗传算法, 神经网络算法等)均需耗费大量的运算。为此本文采用辅助角将2D-DOA估计问题转化为两个级联的1D-DOA估计问题。

3.2 辅助角估计

定义辅助角为 η 且 $e^{j\eta} = e^{j(\nu-\mu)}$ 。注意到辅助角 η 无模糊范围为 $[-\pi, \pi)$, 而实际入射角余弦差 $\nu - \mu = 2\pi d(\sin \varphi - \cos \varphi \cos \theta) / \lambda$ 的取值范围为 $[-2\sqrt{2}\pi d / \lambda, 2\sqrt{2}\pi d / \lambda)$ 。考虑到均匀线阵无模糊测角条件为 $d/\lambda \leq 1/2$, 则辅助角与实际入射角之间满足关系式 $\eta = \nu_i - u_i + 2k\pi, k \in [-1, 0, 1]$ 。本节将给出一种基于传播算子的秩减估计器用于辅助角估计。

根据等式 $e^{j\eta} = e^{j(\nu-\mu)}$, 可将阵列的导向矢量 $\mathbf{a}(\alpha, \beta)$ 重新表达为以入射角 α 和辅助角 η 为变量的函数形式:

$$\mathbf{a}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M \times 1} & \mathbf{I}_M \\ \mathbf{0}_{M \times 1} & \text{diag} \{ \xi(\eta) \} \\ 1 & \mathbf{0}_{1 \times M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}(\alpha) \end{bmatrix} = \mathbf{H}(\eta) \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}(\alpha) \end{bmatrix} \quad (13)$$

其中 $\xi(\eta) = [e^{j\eta}, e^{j2\eta}, \dots, e^{jM\eta}]^T$, $\text{diag} \{ \xi(\eta) \}$ 为以向量 $\xi(\eta)$ 为对角线元素的对角矩阵。故式(12)给出入射角代价函数可重新表达为

$$F(\alpha, \beta) = \mathbf{a}^H(\alpha, \beta) \cdot \mathbf{Q} (\mathbf{Q}^H \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^H \cdot \mathbf{a}(\alpha, \beta)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\mathbf{H}(\eta) \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}(\alpha) \end{bmatrix} \right)^H \cdot \mathbf{Q} (\mathbf{Q}^H \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^H \\ &\quad \cdot \mathbf{H}(\eta) \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}(\alpha) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}(\alpha) \end{bmatrix}^H \mathbf{G}(\eta) \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}(\alpha) \end{bmatrix} = F(\alpha, \eta) \end{aligned} \quad (14)$$

其中矩阵 $\mathbf{G}(\eta)$ 为

$$\mathbf{G}(\eta) = \mathbf{H}(\eta)^H \mathbf{Q} (\mathbf{Q}^H \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^H \mathbf{H}(\eta) \quad (15)$$

式(14)给出了以入射角 α 和辅助角 η 为变量的新的二元代价函数, 式中 $\mathbf{G}(\eta) \in R^{(M+1) \times (M+1)}$ 。式(15)中矩阵 \mathbf{Q} 的秩为 $2M+1-K$, 当 $K \leq M$ 时, 矩阵 \mathbf{Q} 的秩不小于 $M+1$ 。一般情况下, 矩阵 $\mathbf{G}(\eta)$ 为满秩矩阵, 只有当 $\eta = \nu_i - u_i + 2k\pi$ 时, 矩阵 $\mathbf{G}(\eta)$ 将会存在秩损。故辅助角估计可由最小化行列式 $\det \{ \mathbf{G}(\eta) \}$ 获得, 其中 $\det \{ \cdot \}$ 为求取行列式算子。然而行列式 $\det \{ \mathbf{G}(\eta) \}$ 的阶数为 $M+1$ 阶, 当阵元数 M 较大时辅助角估计所需的多次行列式的计算耗费过大。为此, 本文利用传播算子矩阵来降低秩减估计器的运算代价。

重新划分矩阵 $\mathbf{A}(\alpha, \beta)$ 和 \mathbf{P}^H 分别为

$$\mathbf{A}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1(\alpha) \\ \mathbf{A}_2(\alpha) \\ \mathbf{A}(\beta) \\ \mathbf{1}_{1 \times K} \end{bmatrix} \begin{matrix} K \\ M - K \\ M \\ 1 \end{matrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{P}^H = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} M-K \\ M \\ 1 \end{matrix} \quad (17)$$

由式(6)可知, 导向矢量矩阵的子阵 $\mathbf{A}_1(\alpha)$ 和 $\mathbf{A}_2(\alpha)$ 间存在如式(18)关系:

$$\mathbf{A}_2(\alpha) = \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1(\alpha) \quad (18)$$

则式(14)中的导向矢量(即 x 轴线阵的导向矢量)可重新表达为

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1 \times K} \\ \mathbf{0}_{K \times 1} & \mathbf{I}_K \\ \mathbf{0}_{(M-K) \times 1} & \mathbf{P}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_1(\alpha) \end{bmatrix} \quad (19)$$

将式(19)代入式(14), 可将代价函数 $F(\alpha, \beta)$ 重新表达为

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta) &= \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}(\alpha) \end{bmatrix}^H \mathbf{G}(\eta) \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}(\alpha) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_1(\alpha) \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1 \times K} \\ \mathbf{0}_{K \times 1} & \mathbf{I}_K \\ \mathbf{0}_{(M-K) \times 1} & \mathbf{P}_1 \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot \mathbf{G}(\eta) \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1 \times K} \\ \mathbf{0}_{K \times 1} & \mathbf{I}_K \\ \mathbf{0}_{(M-K) \times 1} & \mathbf{P}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_1(\alpha) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_1(\alpha) \end{bmatrix}^H \mathbf{V}(\eta) \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_1(\alpha) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

其中矩阵 $\mathbf{V}(\eta)$ 为

$$\mathbf{V}(\eta) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1 \times K} \\ \mathbf{0}_{K \times 1} & \mathbf{I}_K \\ \mathbf{0}_{(M-K) \times 1} & \mathbf{P}_1 \end{bmatrix}^H \mathbf{G}(\eta) \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1 \times K} \\ \mathbf{0}_{K \times 1} & \mathbf{I}_K \\ \mathbf{0}_{(M-K) \times 1} & \mathbf{P}_1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

和矩阵 $\mathbf{G}(\eta)$ 类似, 矩阵 $\mathbf{V}(\eta)$ 一般情况下为满秩矩阵。当 $\eta = v_i - u_i + 2k\pi$ 时, 矩阵 $\mathbf{V}(\eta)$ 将会降秩。故而辅助角 η 估计可通过最小化式(22)实现

$$f(\eta) = \det \{ \mathbf{V}(\eta) \} \quad (22)$$

通过对比式(15)和式(21)可以发现, 方阵 $\mathbf{V}(\eta)$ 的维数 ($K+1$ 维) 小于方阵 $\mathbf{G}(\eta)$ 的维数 ($M+1$ 维), 因而使用式(22)给出的代价函数计算辅助角将耗费更低的运算代价。实际应用中信源个数往往明显小于阵元个数, 则此时式(22)给出的代价函数的计算量优势更为显著。辅助角估计 $\hat{\eta}$ 可通过直接搜索式(22)极小值位置的方式获得, 不过仍需要消耗较大的运算代价。为了降低算法运算量, 可令 $z = e^{j\eta}$ 并将向量 $\xi(\eta) = [e^{j\eta}, e^{j2\eta}, \dots, e^{jM\eta}]^T$ 重新表达为 $\xi(z) = [z, z^2, \dots, z^M]^T$ 的形式, 则辅助角估计 $\hat{\eta}$ 可由求取多项式 $f(z) = \det \{ \mathbf{V}(z) \}$ 最接近单位圆的 K 个根获得^[18]。

3.3 入射角估计

获得辅助角估计 $\hat{\eta}$ 后, 将其代入式(14)可以得到以入射角 α 为变量的一元代价函数 $F(\alpha, \hat{\eta}_k)$ 。

$$F(\alpha, \hat{\eta}_k) = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}(\alpha) \end{bmatrix}^H \mathbf{G}(\hat{\eta}_k) \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}(\alpha) \end{bmatrix} \quad (23)$$

此时入射角 α 的估计可由直接搜索代价函数 $F(\alpha, \hat{\eta}_k)$ 的极小值获得。为了降低本文算法的运算量, 亦可通过求解多项式 $F(z, \hat{\eta}_k) = [1, z^{-1}, \dots, z^{-M}] \cdot \mathbf{G}(\hat{\eta}_k) [1, z^1, \dots, z^M]^T$, $z = e^{j2\pi d \cos \alpha / \lambda}$ 最接近单位圆的 K 个根获得入射角 α 估计。

$$\hat{\alpha}_k = \arccos \left(\frac{\lambda \angle \hat{z}_k}{2\pi d} \right) \quad (24)$$

其中 $\{\hat{z}_k\}_{k=1}^K$ 为多项式 $F(z, \hat{\eta}_k)$ 最接近单位圆的 K 个根, $\angle \bullet$ 为求取变量的相位角算子。另一方面, 由于辅助角与两入射角余弦差之间满足关系式 $\eta = v - u + 2k\pi$, $k \in [-1, 0, 1]$ 且 $v, u \in [-2\pi d/\lambda, 2\pi d/\lambda]$, $d/\lambda \leq 1/2$, 故而入射角 β 的估计为

$$\hat{\beta}_k = \begin{cases} \arccos \left[\frac{\lambda}{2\pi d} (2\pi d \cos \hat{\alpha}_k / \lambda + \hat{\eta}_k + 2\pi) \right], & 2\pi d \cos \hat{\alpha}_k / \lambda + \hat{\eta}_k \leq -\pi \\ \arccos \left[\frac{\lambda}{2\pi d} (2\pi d \cos \hat{\alpha}_k / \lambda + \hat{\eta}_k) \right], & -\pi < 2\pi d \cos \hat{\alpha}_k / \lambda + \hat{\eta}_k \leq \pi \\ \arccos \left[\frac{\lambda}{2\pi d} (2\pi d \cos \hat{\alpha}_k / \lambda + \hat{\eta}_k - 2\pi) \right], & 2\pi d \cos \hat{\alpha}_k / \lambda + \hat{\eta}_k > \pi \end{cases} \quad (25)$$

3.4 计算复杂度分析

假设采用包含 $2M+1$ 个阵元的 L 型阵列接收来自远场 K 个目标的发射信号, 接收信号经 A/D 采样后每个处理周期包含 N 个快拍。考虑目标个数相比阵元个数较小时的各算法运算量情况, 则此时运算量分析可省略 K 的高次项 (K^2, K^3)。CODE 算法实现时, 计算数据协方差矩阵需进行 $(2M+1)^2 N$ 次复乘运算, 应用传播算子算法计算目标 DOA 的过程共需约 $2(M+1)(M+1-K)^2 + 2(M+1)^2(M+1-K)$ 次复乘运算, 两次多项式求根计算的运算代价为 $2O((2M+1)^3)$ 。此外 DOA 估计的配对过程需要约 $(2M+1)(2M+1-K)^2 + (2M+1)^2(2M+1-K)$ 次复乘运算。若 root-MUSIC 算法采用和 CODE 算法相同的入射角配对算法, 则 root-MUSIC 算法计算协方差矩阵需进行 $2(M+1)^2 N$ 次复乘运算, 两次特征值分解及多项式求根计算的运算代价为 $2O((M+1)^3 + (2M+1)^3)$, 入射角配对过程需要约 $(2M+1)(2M+1-K)^2 + (2M+1)^2(2M+1-K)$ 次复乘计算。JEADE 算法计算协方差矩阵需进行 $(2M+1)^2 N$ 次复乘运算, 协方差矩阵的特征值分解

需要运算量为 $O((2M+1)^3)$ ，通过多项式求根的方法计算辅助角估计 $\hat{\eta}$ 需要 $O((KM)^3)$ 次复乘运算，求取入射角估计共需要约 $KO(M)^3$ 次复乘计算。本文算法计算传播算子矩阵 $\hat{\mathbf{P}}^H$ 需进行 $(2M+1)KN$ 次复乘运算，计算矩阵 $\mathbf{V}(\eta)$ 共需要约 $(2M+1)(2M+1-K)^2+(2M+1)^2(2M+1-K)$ 次复乘运算，通过多项式求根的方法计算辅助角估计 $\hat{\eta}$ 需要 $O((2MK)^3)$ 次复乘运算，求取入射角估计共需要约 $KO((M+1)^3)$ 次复乘计算。各算法的运算量统计结果如表1所示。

通过对比可以发现，本文算法和 JEADE 算法的运算量较为接近，root-MUSIC 算法和 CODE 算法间的运算量较为接近。两组算法之间运算量的差异主要体现在多项式求根计算和是否需要额外的 DOA 配对算法方面。一方面，本文算法和 JEADE 算法的求根多项式由矩阵的行列式生成，其阶数在信号数目较多时，将远远大于由直接矩阵相乘得到求根多项式的 root-MUSIC 算法和 CODE 算法。另一方面，本文算法和 JEADE 算法完成信号的 DOA 估计后，无需额外的配对算法，相比 root-MUSIC 算法和 CODE 算法，在一定程度上降低了算法的运算代价。

总体来看，在信号数目较少时，以上4种算法间的运算量差异并不显著；随着信号数目的增加，本文算法和 JEADE 算法的运算代价将显著增加，且由于本文算法求根多项式的阶数大于 JEADE 算法(本文算法求根多项式的阶数约为 JEADE 算法的2倍)，因而本文算法的运算代价将明显大于其他3种算法。若仅从算法的运算代价考虑，本文算法较为适合应用于信号数目较小、信号快拍数目较大场合。

4 仿真验证

假设L型天线阵列共包含17个阵元，相邻阵元间距为半个波长。为了验证本文算法及其它算法(root-MUSIC, CODE 和 JEADE 算法)性能，进行 \bar{N} 次独

立的蒙特卡洛仿真实验，统计各个目标角度估计的均方根误差(RMSE)结果，并将统计结果与参数估计的CRLB^[19, 20]相比较。其中辅助角和入射角的均方根误差为

$$\left. \begin{aligned} \text{RMSE}_k(\eta_k) &= \sqrt{\frac{1}{\bar{N}} \sum_{i=1}^{\bar{N}} [(\hat{\eta}_{k,i} - \eta_k)^2]} \\ \text{RMSE}_k(\alpha_k, \beta_k) &= \sqrt{\frac{1}{\bar{N}} \sum_{i=1}^{\bar{N}} [(\hat{\alpha}_{k,i} - \alpha_k)^2 + (\hat{\beta}_{k,i} - \beta_k)^2]} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

实验1 信噪比对算法性能的影响

天线阵列接收到来自远场的两个非相干点目标发射的信号，信号的入射角度分别为 $(\alpha_1 = 60^\circ, \beta_1 = 70^\circ)$ 和 $(\alpha_2 = 40^\circ, \beta_2 = 30^\circ)$ 。来波信号信噪比在0 dB到30 dB之间变化，各算法处理的信号快拍数目 N 为1000。进行500次蒙特卡洛仿真实验，参数估计的统计结果如图2所示。

图2给出了不同信噪比条件下本文算法和 JEADE 算法的辅助角估计以及全部4种算法最终入射角估计的RMSE统计结果。由图2可看出，随着信噪比升高各算法的角度估计精度亦随之提高。与 JEADE 算法相比，本文算法由于采用秩减估计器获得了更高精度的辅助角估计，其最终的入射角RMSE统计结果亦优于 JEADE 算法。而 CODE 算法和 root-MUSIC 算法由于只利用了部分阵元信息来获得最终的入射角估计，因而角度估计精度略低于本文算法。总体上看，不同信噪比条件下本文算法入射角估计的RMSE结果逼近CRLB，相比其它算法其角度估计精度更优。

实验2 快拍数对算法性能的影响

天线阵列接收到来自远场的两个非相干点目标发射的信号，信号的入射角度分别为 $(\alpha_1 = 60^\circ, \beta_1 = 70^\circ)$ 和 $(\alpha_2 = 40^\circ, \beta_2 = 30^\circ)$ 。来波信号的信噪比为10 dB，各算法处理的信号快拍数目 N 在200到2000之间变化。进行500次蒙特卡洛仿真实验，参数估计的统计结果如图3所示。

表1 各算法运算量统计

算法	DOA 估计运算量	DOA 配对运算量
root-MUSIC	$2(M+1)^2N + 2O((M+1)^3 + (2M+1)^3)$	$(2M+1)(2M+1-K)^2 + (2M+1)^2(2M+1-K)$
CODE	$(2M+1)^2N + (2M+1)(2M+1-K)^2 + (2M+1)^2(2M+1-K) + 2O((2M+1)^3)$	$(2M+1)(2M+1-K)^2 + (2M+1)^2(2M+1-K)$
JEADE	$(2M+1)^2N + O((2M+1)^3 + (K^3 + KM^3))$	无需配对
本文算法	$(2M+1)KN + (2M+1)(2M+1-K)^2 + (2M+1)^2 \cdot (2M+1-K) + O((2MK)^3 + K(M+1)^3)$	无需配对

图 3 给出了不同快拍数条件下本文算法和 JEADE 算法的辅助角估计以及全部 4 种算法最终入射角估计的 RMSE 统计结果。由图 3 可以看出, 各算法角度估计精度随着快拍数增加而逐渐提高。在不同快拍数的条件下, 本文算法辅助角估计精度优于 JEADE 算法; 本文算法最终的入射角估计 RMSE 接近 CRLB 且优于其它各算法。

实验 3 信源间相干特性对算法性能的影响

天线阵列接收到来自远场的两个相干点源发射的信号 s_1 和 s_2 , 且两信号间满足关系式 $s_2 = \rho s_1 + \sqrt{1 - \rho^2} s_{2u}$ 。其中信号 s_1 和 s_{2u} 之间不相关, ρ 为信号 s_1 和 s_2 之间的相干系数。天线接收信号的入射角度分别为 $(\alpha_1 = 60^\circ, \beta_1 = 70^\circ)$ 和 $(\alpha_2 = 40^\circ, \beta_2 = 30^\circ)$ 。来波信号相干系数 ρ 在 0 到 0.95 之间变化, 各算法处理的信号快拍数目 N 为 1000。进行 500 次蒙特卡洛仿真实验, 参数估计的 RMSE 统计结果如图 4 所示。

图 4 给出了不同相干系数条件下本文算法和 JEADE 算法的辅助角估计以及全部 4 种算法最终入射角估计的 RMSE 统计结果。由于未对接收信号进行解相干处理, 全部 4 种算法角度估计 RMSE 结果随着信号间相干性的增强而显著恶化, 而 JEADE

算法和 root-MUSIC 算法相比另外两种算法性能恶化较为平缓, 这归功于特征分解技术的应用^[7]。不过在强相干信号($\rho > 0.9$)条件下, CODE 算法 DOA 估计精度恶化的趋势逐渐变缓, 这是由于 CODE 算法采用了“共轭反转”技术构建了数据协方差矩阵, 一定程度上改善了其在强相干信号条件下的 DOA 估计性能。总体来看, 在信号相干性适中和较弱的场合, 本文算法的入射角估计精度仍优于其它各算法。

5 结论

针对 L 型阵列 2D-DOA 估计问题, 本文提出了一种新的基于秩减估计器的算法。该算法利用辅助角将 2D-DOA 估计问题转换为 1D-DOA 估计问题。通过一种基于传播算子的秩减估计器获得辅助角的高精度估计, 传播算子的应用显著降低了秩减估计器的运算量。利用多项式求根的方法获得某一入射角估计, 并结合辅助角估计结果经过简单转换获得另一入射角估计, 避免了 DOA 搜索及配对的过程。本文算法的 DOA 估计精度优于现有算法(如 root-MUSIC, CODE 和 JEADE 算法)且逼近 DOA 估计的 CLRB。仿真实验验证了该算法 DOA 估计的精确性。

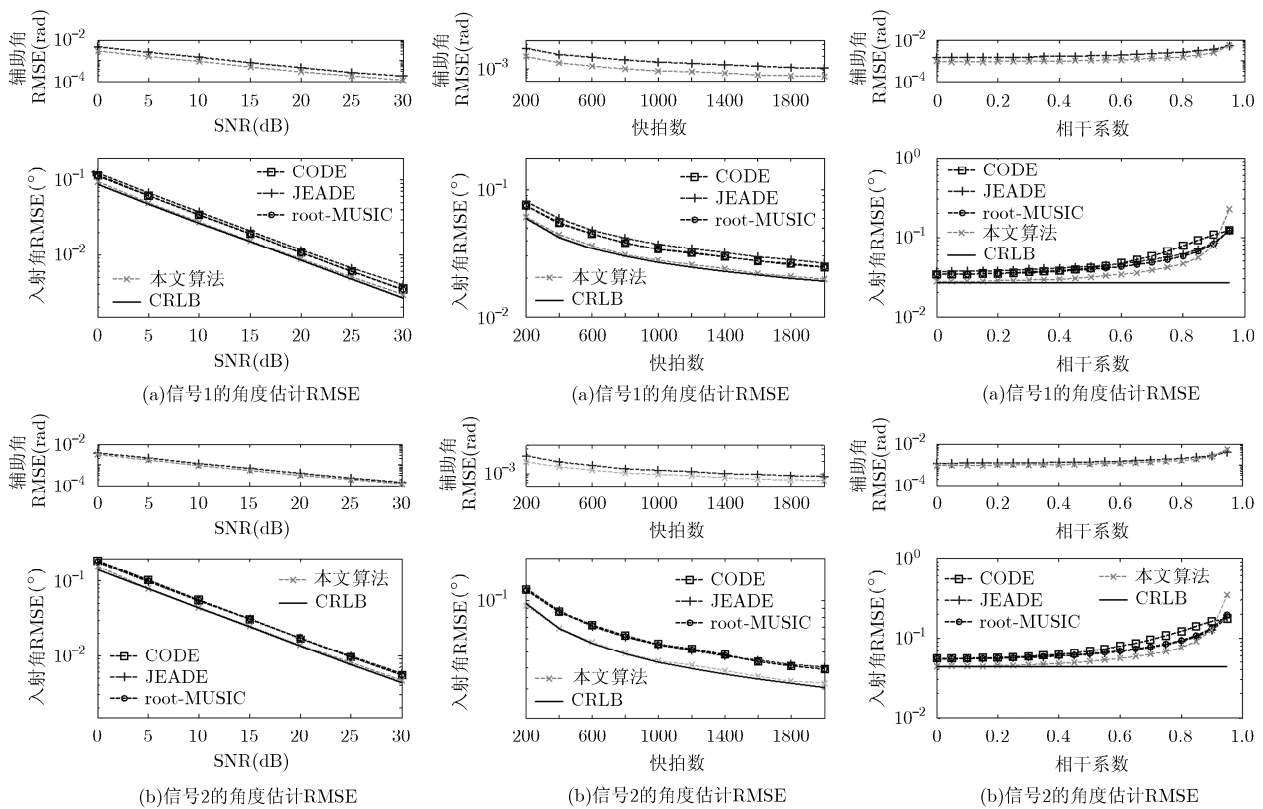


图 2 信噪比对算法性能影响

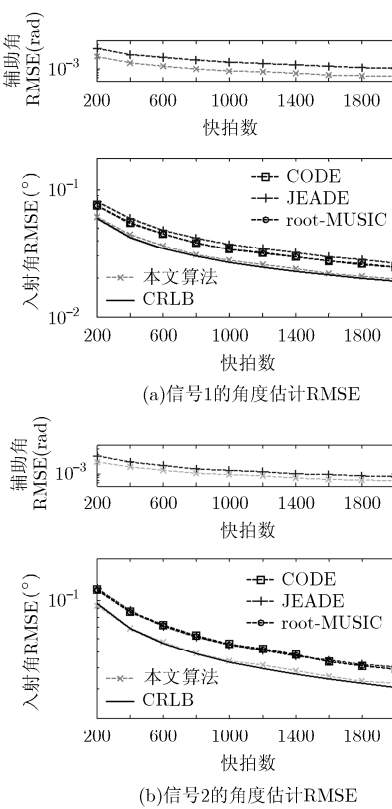


图 3 快拍数对算法性能影响

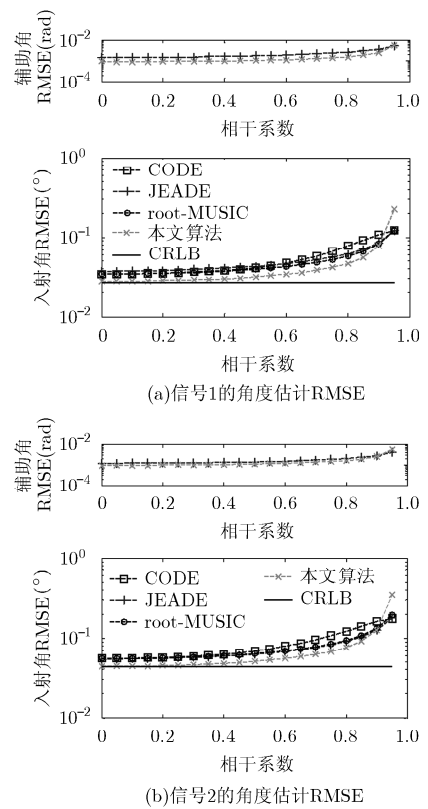


图 4 算法处理相干信号源的性能

参考文献

- [1] Tayem N and Kwon H M. L-shape 2-dimensional arrival angle estimation with Propagator Method[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2005, 53(5): 1622–1630.
- [2] 董轶, 吴云韬, 廖桂生. 一种二维到达方向估计的 ESPRIT 新方法[J]. 西安电子科技大学学报, 2003, 30(5): 569–573.
Dong Yi, Wu Yun-tao, and Liao Gui-sheng. A novel method for estimating 2-D DOA[J]. *Journal of Xidian University*, 2003, 30(5): 569–573.
- [3] Gu Jian-feng and Wei Ping. Joint SVD of two cross-correlation matrices to achieve automatic pairing in 2-D angle estimation problems[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2007, 6: 553–556.
- [4] Han Hui-lian and Zhao Pin-jiao. A two-dimensional direction finding estimation with L-shape uniform linear arrays[C]. *IMSNA 2013 Proceedings*, Toronto, 2013: 779–782.
- [5] Liang Jun-li and Liu Ding. Joint elevation and azimuth direction finding using L-shaped array[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2010, 58(6): 2136–2141.
- [6] Shahida G Q and Fan Yang-yu. A comment on “Joint elevation and Azimuth direction finding using L-shaped array”[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2012, 60(7): 3546–3547.
- [7] Wang Guang-ming, Xin Jing-min, Zheng Nan-ning, *et al.* Computationally efficient subspace-based method for two-dimensional direction estimation with L-shaped array[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(7): 3197–3212.
- [8] Wang Guang-ming, Xin Jing-min, Zheng Nan-ning, *et al.* Computationally efficient method for joint azimuth-elevation direction estimation with L-shaped array[C]. *IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications*, Darmstadt, 2013: 470–474.
- [9] Nie Xi and Li Li-ping. A computationally efficient subspace algorithm for 2-D DOA estimation with L-shaped array[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2014, 21(8): 971–974.
- [10] Hou Hui-juan, Sheng Ge-hao, and Jiang Xiu-chen. Localization algorithm for the PD source in substation based on L-shaped antenna array signal processing[J]. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 2015, 30(1): 472–479.
- [11] 吴彪, 陈辉, 杨春华. 基于 L 型阵列的方位估计及互耦自校正算法研究[J]. 电子学报, 2010, 38(6): 1316–1322.
Wu Biao, Chen Hui, and Yang Chun-hua. Study of DOA estimation and self-calibration algorithm for L-shaped array in the presence of mutual coupling[J]. *Acta Electornica Sinica*, 2010, 38(6): 1316–1322.
- [12] Dai Jin-sheng, Bao Xu, Hu Nan, *et al.* A recursive RARE algorithm for DOA estimation with unknown mutual coupling[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2014, 13: 1593–1596.
- [13] 吴彪, 陈辉, 胡晓琴. 基于 Y 型阵的互耦矩阵与 DOA 的同时估计方法[J]. 通信学报, 2010, 31(6): 119–126.
Wu Biao, Chen Hui, and Hu Xiao-qin. Simultaneous estimation of mutual coupling matrix and DOA for Y-shaped array[J]. *Journal on Communications*, 2010, 31(6): 119–126.
- [14] 党晓方, 陈伯孝, 杨明磊. 基于 root-RARE 算法的非同构分布式阵列高精度方向估计[J]. 系统工程与电子技术, 2014, 36(6): 1027–1032.
Dang Xiao-fang, Chen Bai-xiao, and Yang Ming-lei. High accuracy direction finding based on root-RARE using distributed non-identical subarray antenna[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2014, 36(6): 1027–1032.
- [15] 刘亮, 陶建武, 黄家才. 基于稀疏对称阵列的近场源定位[J]. 电子学报, 2009, 37(6): 1307–1312.
Liu Liang, Tao Jian-wu, and Huang Jia-cai. Near-field source localization based on sparse symmetric array[J]. *Acta Electornica Sinica*, 2009, 37(6): 1307–1312.
- [16] Barabell A J. Improving the resolution performance of eigenstructure-based direction-finding algorithms[C]. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Boston, MA, 1983, 1: 336–339.
- [17] Marcos S, Marsal A, and Benidir M. The propagator method for sources bearing estimation[J]. *Signal Processing*, 1995, 42(2): 121–138.
- [18] Gao F and Gershman A B. A generalized ESPRIT approach to direction-of-arrival estimation[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2005, 12(3): 254–257.
- [19] Xia Tie-qi, Zheng Yi, Wan Qun, *et al.* Decoupled estimation of 2-D angles of arrival using two parallel uniform linear arrays[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2007, 55(9): 2627–2632.
- [20] Meng Samson See C and Gershman A B. Direction-of-arrival estimation in partly calibrated subarray-based sensor arrays[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, 52(2): 329–338.
- 魏子翔: 男, 1987 年生, 博士生, 研究方向为扩频信号处理。
崔 隼: 男, 1976 年生, 教授, 研究方向为雷达信号处理。
侯建刚: 男, 1976 年生, 讲师, 研究方向为雷达信号处理。