第37卷第6期 电 子 与 信 息 学 报 Vol.37 No.6
2015年6月 Journal of Electronics & Information Technology Jun. 2015

基于L1-范数的二维线性判别分析

陈思宝* 陈道然 罗 斌
(安徽大学计算机科学与技术学院 合肥 230601)
(安徽省工业图像处理与分析重点实验室 合肥 230039)

摘 要：为了避免图像数据向量化后的维数灾难问题，以及增强对野值(outliers)及噪声的鲁棒性，该文提出一种基于L1-范数的2维线性判别分析(L1-norm-based Two-Dimensional Linear Discriminant Analysis, 2DLDA-L1)降维方法。它充分利用L1-范数对野值及噪声的强鲁棒性，并且直接在图像矩阵上进行投影降维。该文还提出一种快速迭代优化算法，并给出了其单调收敛到局部最优的证明。在多个图像数据库上的实验验证了该方法的鲁棒性与高效性。

关键词：图像处理；L1-范数；2维线性判别分析；线性投影；降维
中图分类号： TP391.4 **文献标识码**： A **文章编号**：1009-5896(2015)06-1372-06
DOI: 10.11999/JEIT141093

L1-norm Based Two-dimensional Linear Discriminant Analysis

Chen Si-bao Chen Dao-ran Luo Bin
(*School of Computer Science and Technology*, *Anhui University*, *Hefei* 230601, *China*)
(*Key Laboratory for Industrial Image Processing and Analysis of Anhui Province*, *Hefei* 230039, *China*)

Abstract: To overcome the curse of dimensionality caused by vectorization of image matrices, and to increase robustness to outliers, L1-norm based Two-Dimensional Linear Discriminant Analysis (2DLDA-L1) is proposed for dimensionality reduction. It makes full use of strong robustness of L1-norm to outliers and noises. Furthermore, it performs dimensionality reduction directly on image matrices. A rapid iterative optimization algorithm, with its proof of monotonic convergence to local optimum, is given. Experiments on several public image databases verify the robustness and the effectiveness of the proposed method.

Key words: Image processing; L1-norm; Two-Dimensional Linear Discriminant Analysis (2DLDA); Linear projection; Dimensionality reduction

1 引言

在模式识别和图像处理领域，由于所处理的图像维数特别高，而训练样本数量又非常有限，经常导致“维数灾难”问题[1]。此外，在高维空间中存在着测度的“集中现象”，为了克服这些问题并且使得后续的数据表示或分类更加稳健，对高维数据进行降维就成了一个非常重要的步骤。

众所周知，最为经典的线性投影降维方法通常将高维训练数据用向量形式进行表示，再进行线性投影降维和特征提取，其中基于向量的1维线性投影降维方法主要有主成分分析(Principal Component Analysis, PCA)[2,3]，线性判别分析(Fisher Linear Discriminant Analysis, Fisher LDA)[1,2], PCA+LDA[4]等。然而，1维方法通常将图像数据拉直成向量形式，其维数通常非常高，但训练数据又非常有限，这通常导致矩阵计算的不稳定，出现矩阵奇异问题。针对1维方法所遇到的问题，许多学者又提出了直接基于图像矩阵的线性投影降维方法，即2维线性投影降维方法。经典的2维方法有2维主成分分析(Two-Dimensional PCA, 2DPCA)[5,6]和2维线性判别分析(Two-Dimensional LDA, 2DLDA)[7−9]。然而，这些1维的和2维的线性投影降维方法都基于L2-范数来计算相应的目标函数。当训练数据中存在野值或噪声时，计算所得到的投影方向会严重受到这些野值或噪声的影响。

最近，一些文献中出现了基于L1-范数[10−16]的线性投影降维方法，诸如：基于L1-范数的PCA (L1-norm based PCA, PCA-L1)[12]、基于旋转不变L1-范数的LDA(Rotational invariant L1-norm based LDA, LDA-R1)[13]、基于L1-范数的LDA

2014-08-18收到，2015-02-04改回
国家自然科学基金(61202228)和安徽省高校自然科学研究重点项目(KJ2012A004)资助课题
*通信作者：陈思宝 sbchen@ahu.edu.cn

(L1-norm based LDA, LDA-L1)[14,15] 及基于 L1-范数的 2DPCA(L1-norm based 2DPCA, 2DPCA-L1)[16]。这些基于 L1-范数的线性投影降维方法均对野值及噪声表现出了很强的鲁棒性。但是，PCA-L1, LDA-R1 和 LDA-L1 都把图像数据进行了向量化预处理，并没有充分利用图像数据固有的矩阵形式，破坏了图像数据原有的空间结构关系。2DPCA-L1 着重利用图像数据矩阵来提取低维特征，但它没有充分利用训练数据中的类别信息以提高投影方向的判别性能。

本文提出的 2DLDA-L1 线性投影降维方法不仅充分利用 L1-范数对野值及噪声的强鲁棒性，而且直接对图像数据矩阵进行线性投影，减少了图像数据空间的信息丢失，并且避免了图像向量化后的高维矩阵的庞杂计算及解的不稳定性。相比于以前的方法对野值及噪声具有更强的鲁棒性，并且在分类识别的性能上取得了显著提升。

本文其余部分的结构安排如下：第 2 节先提出 2DLDA-L1 最优投影方向的目标优化函数，然后给出一种优化迭代方法，最后给出多重投影方向的完整 2DLDA-L1 算法并分析算法的复杂度；第 3 节在多个图像数据库上实验验证所提出的 2DLDA-L1 算法的判别性能及鲁棒性能，并给出相应的实验结果及分析；第 4 节为结束语。

2 基于 L1-范数的 2 维线性判别分析(2DLDA-L1)

2.1 2DLDA-L1 最优投影方向

设有 n 个训练数据，分别来自于 c 个类别，令 $\boldsymbol{x}_j^i \in R^p$ 表示第 i 类的第 j 个训练向量，其中，$j=1,2,\cdots,n_i$，$i=1,2,\cdots,c$，并满足 $\sum_{i=1}^c n_i = n$。令 $\boldsymbol{A}_j^i \in R^{m\times s}$ 表示第 i 类的第 j 个训练图像数据矩阵，作线性投影 $\boldsymbol{x}_j^i = \boldsymbol{A}_j^i\boldsymbol{W}$，我们希望投影后的特征向量能最大化如式(1)目标函数：

$$J(\boldsymbol{w}) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{c} n_i \left\|\overline{\boldsymbol{x}}_i - \overline{\boldsymbol{x}}\right\|_1}{\sum\limits_{i=1}^{c}\sum\limits_{j=1}^{n_i}\left\|\boldsymbol{x}_j^i - \overline{\boldsymbol{x}}_i\right\|_1} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{c} n_i \left\|\left(\overline{\boldsymbol{A}}_i - \overline{\boldsymbol{A}}\right)\boldsymbol{w}\right\|_1}{\sum\limits_{i=1}^{c}\sum\limits_{j=1}^{n_i}\left\|\left(\boldsymbol{A}_j^i - \overline{\boldsymbol{A}}_i\right)\boldsymbol{w}\right\|_1} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{c}\sum\limits_{k=1}^{m} n_i \left|\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\left(\overline{\boldsymbol{a}}_i^{(k)} - \overline{\boldsymbol{a}}^{(k)}\right)\right|}{\sum\limits_{i=1}^{c}\sum\limits_{j=1}^{n_i}\sum\limits_{k=1}^{m}\left|\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{a}_j^{i(k)} - \overline{\boldsymbol{a}}_i^{(k)}\right)\right|} \tag{1}$$

其中，$\overline{\boldsymbol{A}}$ 是所有图像矩阵 $\boldsymbol{A}_j^i$ 样本的平均值，即 $\overline{\boldsymbol{A}} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{c}\sum\limits_{j=1}^{n_i}\boldsymbol{A}_j^i$，$\overline{\boldsymbol{A}}_i$ 是第 i 类的图像矩阵的平均值，即 $\overline{\boldsymbol{A}}_i = \dfrac{1}{n_i}\sum\limits_{j=1}^{n_i}\boldsymbol{A}_j^i$。记 $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}^{(1)}\boldsymbol{a}^{(2)}\cdots\boldsymbol{a}^{(m)}]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}^{(k)}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 k 行的列向量形式，即 $\boldsymbol{A}$ 的第 k 行为 $\boldsymbol{a}^{(k)}$ 的转置。我们采用一种梯度法来迭代计算 2DLDA-L1 最优投影向量 $\boldsymbol{w}$。在迭代的第 t ($t=0,1,2,\cdots$) 步时，由于目标函数 $J(\boldsymbol{w}(t))$ 中存在绝对值符号，然而绝对值操作是非凸的，故为了消除绝对值符号，分别定义符号函数：

$$\left.\begin{aligned} s_i^k(t) &= \begin{cases} 1, & \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)(\overline{\boldsymbol{a}}_i^{(k)} - \overline{\boldsymbol{a}}^{(k)}) > 0 \\ -1, & \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)(\overline{\boldsymbol{a}}_i^{(k)} - \overline{\boldsymbol{a}}^{(k)}) \le 0 \end{cases} \\ r_j^{i(k)}(t) &= \begin{cases} 1, & \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{a}_j^{i(k)} - \overline{\boldsymbol{a}}_i^{(k)}) > 0 \\ -1, & \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{a}_j^{i(k)} - \overline{\boldsymbol{a}}_i^{(k)}) \le 0 \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

采用 $\boldsymbol{w}(t+1) = \boldsymbol{w}(t) + \gamma\boldsymbol{g}(\boldsymbol{w}(t))$ 来更新 2DLDA-L1 最优投影向量 $\boldsymbol{w}(t)$，其中

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{w}(t)) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{c}\sum\limits_{k=1}^{m} s_i^k(t) n_i \left(\overline{\boldsymbol{a}}_i^{(k)} - \overline{\boldsymbol{a}}^{(k)}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{c}\sum\limits_{k=1}^{m} n_i \left|\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)\left(\overline{\boldsymbol{a}}_i^{(k)} - \overline{\boldsymbol{a}}^{(k)}\right)\right|} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{c}\sum\limits_{j=1}^{n_i}\sum\limits_{k=1}^{m} r_j^{i(k)}(t)\left(\boldsymbol{a}_j^{i(k)} - \overline{\boldsymbol{a}}_i^{(k)}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{c}\sum\limits_{j=1}^{n_i}\sum\limits_{k=1}^{m}\left|\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)\left(\boldsymbol{a}_j^{i(k)} - \overline{\boldsymbol{a}}_i^{(k)}\right)\right|} \tag{3}$$

$\gamma > 0$ 为学习步长，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{w}(t))$ 的获得见文献[14]。循环交替计算式(2)的符号函数及式(3)的梯度公式来求解 2DLDA-L1 最优投影向量 $\boldsymbol{w}$。在迭代过程中，若目标函数 $J(\boldsymbol{w}(t+1))$ 停止增长，则终止循环。否则，更新式(2)并继续循环，直到找到满足条件的投影向量 $\boldsymbol{w}$。

可以证明：在每次循环计算式(2)与式(3)后，式(1)中的目标函数 $J(\boldsymbol{w}(t+1))$ 都保持非降。另外，J 函数存在上界(当目标函数 J 在分母约束恒为 1 时，根据文献[17，18]中的定理，可知其上界为图像类间离散度矩阵 $\boldsymbol{S}_B = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{c} n_i\left(\overline{\boldsymbol{A}}_i - \overline{\boldsymbol{A}}\right)^{\mathrm{T}}\left(\overline{\boldsymbol{A}}_i - \overline{\boldsymbol{A}}\right)$ 的最大特征值)，因此，循环计算式(2)与式(3)的迭代过程逐渐收敛。然而，通过迭代算法所求的投影向量 $\boldsymbol{w}$ 可使目标函数 J 达到局部最优，但并不能保证 J 达到全局最优。由于篇幅有限，此处略去详细证明，具体证明方法可以参考文献[14]。

2.2 2DLDA-L1 多个投影方向扩展

前面所述的迭代优化求解方法仅计算 2DLDA-L1 的一个最优投影方向，这不利于实际应用，故需要扩展到求取多个投影方向。设已得到第 1 个最优投影轴为 $\boldsymbol{w}_1$，我们在 $\boldsymbol{w}_1$ 的正交补空间中寻求第 2

个最优投影轴 $\boldsymbol{w}_2$，即在 $\boldsymbol{w}_1$ 的正交补空间中最大化式(1)。$\boldsymbol{w}_1$ 的正交补空间为 $\boldsymbol{I}_s-\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{w}_1^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{I}_s$ 表示一个 s 维的单位矩阵。故存在一个向量 $\boldsymbol{b}_1\in R^s$，使 $\boldsymbol{w}_2=(\boldsymbol{I}_s-\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{w}_1^{\mathrm{T}})\boldsymbol{b}_1$。代入 $\boldsymbol{w}_2$ 到式(1)中，得

$$J(\boldsymbol{w}_2)=\frac{\sum_{i=1}^{c}n_i\left\|\left(\overline{\boldsymbol{A}}_i-\overline{\boldsymbol{A}}\right)\boldsymbol{w}_2\right\|_1}{\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n_i}\left\|\left(\boldsymbol{A}_j^i-\overline{\boldsymbol{A}}_i\right)\boldsymbol{w}_2\right\|_1}=\frac{\sum_{i=1}^{c}n_i\left\|\left(\overline{\boldsymbol{A}}_i-\overline{\boldsymbol{A}}\right)\left(\boldsymbol{I}_s-\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{w}_1^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{b}_1\right\|_1}{\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n_i}\left\|\left(\boldsymbol{A}_j^i-\overline{\boldsymbol{A}}_i\right)\left(\boldsymbol{I}_s-\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{w}_1^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{b}_1\right\|_1}\tag{4}$$

令 $\boldsymbol{A}_j^{i(2)}=\boldsymbol{A}_j^i(\boldsymbol{I}_s-\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{w}_1^{\mathrm{T}})$，则 $\boldsymbol{A}_j^{i(2)}$ 为 $\boldsymbol{A}_j^i$ 在 $\boldsymbol{w}_1$ 的正交补空间中的表示。计算 $\boldsymbol{A}_j^{i(2)}$ 的类平均值 $\overline{\boldsymbol{A}}_i^{(2)}=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\boldsymbol{A}_j^{i(2)}=\overline{\boldsymbol{A}}_i\left(\boldsymbol{I}_s-\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{w}_1^{\mathrm{T}}\right)$ 和全部平均值 $\overline{\boldsymbol{A}}_i^{(2)}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n_i}\boldsymbol{A}_j^{i(2)}=\overline{\boldsymbol{A}}\left(\boldsymbol{I}_s-\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{w}_1^{\mathrm{T}}\right)$。将公式 $\overline{\boldsymbol{A}_i}^{(2)}$ 和 $\overline{\boldsymbol{A}}^{(2)}$ 代入式(4)中得

$$J(\boldsymbol{w}_2)=\frac{\sum_{i=1}^{c}n_i\left\|\left(\overline{\boldsymbol{A}}_i^{(2)}-\overline{\boldsymbol{A}}^{(2)}\right)\boldsymbol{b}_1\right\|_1}{\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n_i}\left\|\left(\boldsymbol{A}_j^{i(2)}-\overline{\boldsymbol{A}}_i^{(2)}\right)\boldsymbol{b}_1\right\|_1}\tag{5}$$

同样，由 2.1 节的迭代算法可解出 $\boldsymbol{b}_1$。再根据公式 $\boldsymbol{w}_2=(\boldsymbol{I}_s-\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{w}_1^{\mathrm{T}})\boldsymbol{b}_1$，便可得到第 2 个投影轴 $\boldsymbol{w}_2$，并归一化 $\boldsymbol{w}_2$ 为 $\boldsymbol{w}_2/\|\boldsymbol{w}_2\|$。

设已获得 l 个最优投影轴 $\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{w}_2\cdots\boldsymbol{w}_l$，则第 $l+1$ 个最优投影轴 $\boldsymbol{w}_{l+1}$ 可在正交向量 $\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{w}_2\cdots\boldsymbol{w}_l$ 的正交补空间中寻求，其中 $\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{w}_2\cdots\boldsymbol{w}_l$ 的正交补空间为 $\boldsymbol{I}_s-\boldsymbol{W}_l\boldsymbol{W}_l^{\mathrm{T}}$，投影矩阵 $\boldsymbol{W}_l=[\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{w}_2\cdots\boldsymbol{w}_l]$。同样存在一个向量 $\boldsymbol{b}_l\in R^s$，使 $\boldsymbol{w}_{l+1}=(\boldsymbol{I}_s-\boldsymbol{W}_l\boldsymbol{W}_l^{\mathrm{T}})\boldsymbol{b}_l$，则 $\boldsymbol{b}_l$ 可迭代优化由新数据矩阵 $\boldsymbol{A}_j^{i(l+1)}=\boldsymbol{A}_j^i(\boldsymbol{I}_s-\boldsymbol{W}_l\boldsymbol{W}_l^{\mathrm{T}})$ 计算的式(1)来求出。注意到

$$\boldsymbol{I}_s-\boldsymbol{W}_l\boldsymbol{W}_l^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{I}_s-\boldsymbol{W}_{l-1}\boldsymbol{W}_{l-1}^{\mathrm{T}}\right)\left(\boldsymbol{I}_s-\boldsymbol{w}_l\boldsymbol{w}_l^{\mathrm{T}}\right)\tag{6}$$

故 $\boldsymbol{A}_j^{i(l+1)}=\boldsymbol{A}_j^{i(l)}(\boldsymbol{I}_s-\boldsymbol{w}_l\boldsymbol{w}_l^{\mathrm{T}})$，即为了减少计算量，新数据矩阵 $\boldsymbol{A}_j^{i(l+1)}$ 可以由前一步的数据矩阵 $\boldsymbol{A}_j^{i(l)}$ 计算得到。在循环迭代计算得到第 $l+1$ 个最优投影轴 $\boldsymbol{w}_{l+1}$ 后，对其进行归一化为 $\boldsymbol{w}_{l+1}/\|\boldsymbol{w}_{l+1}\|$。投影矩阵 $\boldsymbol{W}_{l+1}=[\boldsymbol{W}_l,\boldsymbol{w}_{l+1}]$。根据上述的方法，可提取任意 q 个投影轴组成一个投影矩阵。完整的多个投影方向的 2DLDA-L1 算法步骤如表 1 所示。

表 1 基于 L1-范数的 2 维线性判别分析(2DLDA-L1)

输入 图像数据矩阵为 $\boldsymbol{A}_j^i\in R^{m\times s}$, $j=1,2,\cdots,n_i$, $i=1,2,\cdots,c$, $\sum_{i=1}^{c}n_i=n$。需提取的投影轴个数 $q(q<s)$，学习步长参数 $\gamma>0$。

输出 投影矩阵 $\boldsymbol{W}=[\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{w}_2\cdots\boldsymbol{w}_q]\in R^{s\times q}$。

步骤 1 记 $l=0,\boldsymbol{W}_l$ 为空；

步骤 2 计算投影向量 $\boldsymbol{w}_{l+1}$：

(1)类平均值：$\overline{\boldsymbol{A}}_i=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\boldsymbol{A}_j^i,\overline{\boldsymbol{A}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n_i}\boldsymbol{A}_j^i$；

(2)初始化：设迭代次数 $t=0$，并生成一个任意 s 维的非零向量 $\boldsymbol{b}(0)$；

(3)计算符号函数：

$$s_i^k(t)=\begin{cases}1, & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}(t)(\overline{\boldsymbol{a}}_i^{(k)}-\overline{\boldsymbol{a}}^{(k)})>0\\-1, & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}(t)(\overline{\boldsymbol{a}}_i^{(k)}-\overline{\boldsymbol{a}}^{(k)})\le 0\end{cases}$$

$$r_j^{i(k)}(t)=\begin{cases}1, & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{a}_j^{i(k)}-\overline{\boldsymbol{a}}_i^{(k)})>0\\-1, & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{a}_j^{i(k)}-\overline{\boldsymbol{a}}_i^{(k)})\le 0\end{cases}$$

$j=1,2,\cdots,n_i,i=1,2,\cdots,c,k=1,2,\cdots,m$；

(4)更新为 $\boldsymbol{b}(t+1)=\boldsymbol{b}(t)+\gamma\boldsymbol{g}(t)$，其中

$$\boldsymbol{g}(t)=\frac{\sum_{i=1}^{c}\sum_{k=1}^{m}s_i^k(t)n_i(\overline{\boldsymbol{a}}_i^{(k)}-\overline{\boldsymbol{a}}^{(k)})}{\sum_{i=1}^{c}\sum_{k=1}^{m}n_i\left|\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}(t)(\overline{\boldsymbol{a}}_i^{(k)}-\overline{\boldsymbol{a}}^{(k)})\right|}-\frac{\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{m}r_j^{i(k)}(t)(\boldsymbol{a}_j^{i(k)}-\overline{\boldsymbol{a}}_i^{(k)})}{\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{m}\left|\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{a}_j^{i(k)}-\overline{\boldsymbol{a}}_i^{(k)})\right|}$$

(5)判断是否收敛：若 $J(\boldsymbol{b}(t+1))$ 停止增长，则终止内循环并令

$$\boldsymbol{w}_{l+1}=(\boldsymbol{I}_s-\boldsymbol{W}_l\boldsymbol{W}_l^{\mathrm{T}})\boldsymbol{b}(t+1)$$

否则，令 $t=t+1$，并返回(3)；

步骤 3 更新 $\boldsymbol{A}_j^i$：$\boldsymbol{A}_j^i=\boldsymbol{A}_j^i(\boldsymbol{I}_s-\boldsymbol{w}_{l+1}\boldsymbol{w}_{l+1}^{\mathrm{T}})$, $j=1,2,\cdots,n_i$, $i=1,2,\cdots,c$；

步骤 4 合并 $\boldsymbol{W}_l,\boldsymbol{w}_{l+1}$：$\boldsymbol{W}_{l+1}=[\boldsymbol{W}_l,\boldsymbol{w}_{l+1}]$，其中 $\boldsymbol{w}_{l+1}=\boldsymbol{w}_{l+1}/\|\boldsymbol{w}_{l+1}\|$；

步骤 5 如果 $l+1<q$，令 $l=l+1$ 并返回步骤(2)，否则停止循环，并输出投影矩阵 $\boldsymbol{W}_{l+1}$。

2.3 2DLDA-L1 计算复杂度分析

对于含有 c 个类别共 n 个($m\times s$)大小的图片训练数据集，所提出的 2DLDA-L1 最耗时的是两重循环内部的步骤 2(3)计算符号函数与(4)计算梯度方向，它们的计算复杂度分别为 $O((cm+nm)s)$ 和 $O(2(cm+nm)s)$。因此，若欲每次内循环迭代 t 次，共提取 q 个投影方向轴，则整个 2DLDA-L1 的计算复杂度为 $O((cm+nm)stq)$。在相同的数据集上，与之相对应的 2DLDA 的计算复杂度为 $O((n+c)ms^2+s^3)$。LDA-L1 的计算复杂度为 $O((c+n)mstq)$，最耗时的是两重循环内部的计算符号函数与计算梯度方向。LDA-R1 的计算复杂度为 $O((n+c)m^2s^2tq^2)$，最耗时的是其中的特征值分解。LDA 的计算复杂度

为 $O((n+c)m^2s^2+m^3s^3)$，最耗时的是求解广义特征向量。

3　实验结果及分析

为了验证本文所提出的 2DLDA-L1 方法的鲁棒性及最终识别性能，本文选择在 3 个常用的人脸图像数据库(PIE[19], AR[20]及 ORL[21])上进行先降维后分类识别的对比实验。在实验中，我们选择 4 种对比方法，分别是 LDA, LDA-R1, LDA-L1 和 2DLDA。为了保证实验结果的公平与合理性，同类实验中的参数设置均一致。为简化实验，我们仅采用最近邻分类器进行分类识别。

3.1 PIE 人脸数据库

PIE 人脸数据库提供了不同姿态、光照、表情条件下 68 位志愿者的 40000 多幅不同的图像，每一幅图像都是在严格控制的条件下采集的。本文在其中一个子集共 17000 幅图像上进行测试，即随机提取出 68 人每人 24 幅图像作为 PIE 子库。所有的人脸图像都被缩放到 32×32 大小，量化到 256 级灰度。

3.1.1 目标函数的迭代收敛性　2.1 节中提到了目标函数 $J(\boldsymbol{w}(t))$ 是非降的并逐渐收敛到局部最优。在这一部分，我们验证 2DLDA-L1 的目标函数 $J(\boldsymbol{w}(t))$ 的局部最优化，并与迭代次数 t 之间的关系。实验结果如图 1 所示。

图 1 表明，在提取投影向量的过程中，随着迭代次数的逐渐增加，目标函数 $J(\boldsymbol{w}(t))$ 逐渐递增并达到局部最大。

3.1.2 步长参数 γ 的影响

为了验证梯度法 $\boldsymbol{w}(t+1)=\boldsymbol{w}(t)+\gamma\boldsymbol{g}(\boldsymbol{w}(t))$ 中更新步长参数 γ 的影响，我们从集合 {0.01,0.05,0.1,0.5, 1,5,10,50,100,500,1000} 中选择不同的 γ 值测试其对收敛性及识别率的影响。实验结果如图 2 所示。

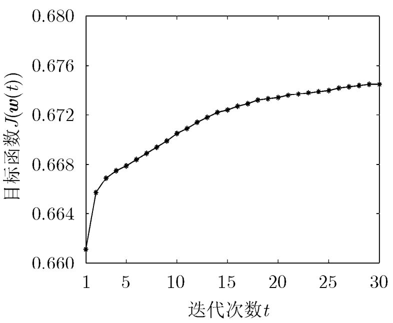
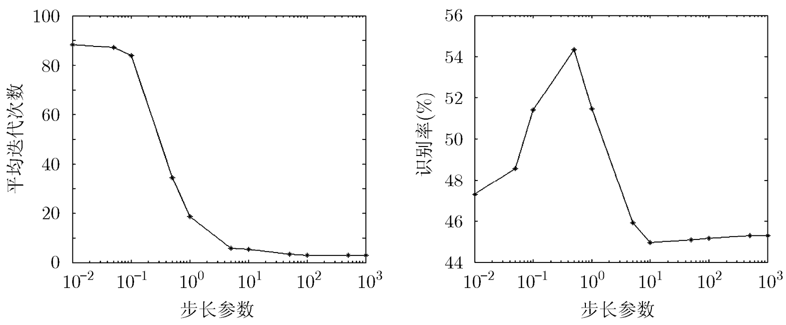


图 1　$J(\boldsymbol{w}(t))$ 随着迭代次数 t 的变化趋势



(a)步长对迭代收敛的影响　(b)步长对识别率的影响

图 2　步长参数 γ 的影响

图 2(a)和 2(b)充分说明 γ 不仅影响算法的收敛速度而且还影响算法的识别性能。由于 2DLDA-L1 中的目标函数并不是全局严格凸的，一个固定的 γ 值易使迭代算法中的目标函数局部最优化，因此在运行实验时，我们随机选择不同的 γ 值来优化目标函数，并选取使得目标函数达到最大的参数。

3.2 AR 人脸数据库

AR 人脸数据库由西班牙巴塞罗那计算机视觉中心建立，包括 3120 幅图像，共 120 个人，每人 26 幅图像，采集环境中的摄像机参数、光照环境、摄像机距离等都受到严格控制。所有人脸图像都被缩放到 32×32 大小，量化到 256 级灰度。

3.2.1 投影轴数 q 对识别率的影响　线性投影降维是处理高维数据的一个重要步骤。为了验证不同的投影轴数对识别率的影响，本节依次选择 $1,2,\cdots,20$ 个投影轴数进行测试。实验结果如图 3 所示。

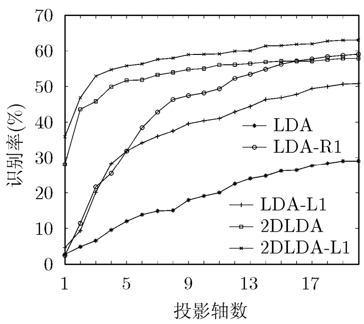


图 3　识别率随着不同投影轴数 q 的变化趋势

图 3 表明，随着投影轴数的逐渐增加，各种方法的识别率都会达到一个饱和值。但是，当投影轴数相同时，2DLDA-L1 方法的识别率比其它方法的识别率高。

3.2.2 噪声的影响　为了验证 2DLDA-L1 对噪声的鲁棒性，本节在加有高斯噪声或椒盐噪声的人脸图像上进行对比分类识别实验。图 4(a)和图 4(b)分别

为加入高斯噪声和椒盐噪声后的图像示例，图像加入高斯噪声的方差或椒盐噪声的密度从小到大依次为 0.0001, 0.0005, 0.001, 0.005 , 0.01, 0.05, 0.1。实验结果如图 5 所示。

(a)高斯噪声图像示例

(b)椒盐噪声图像示例

图 4 加入噪声示例

图 5 表明，随着噪声方差或密度的逐渐增加，各种方法的识别率逐渐降低。但是 2DLDA-L1 的识别率一直最高，这说明 2DLDA-L1 具有更好的鲁棒性。

3.3 ORL 人脸数据库

ORL 数据库是一个最为常用的人脸数据库，它由 40 个人，每个人 10 幅 92×112 的灰度人脸正面图像组成，每张人脸图像都有姿态、表情和面部饰物的变化。所有的人脸图像都被缩放到 32×32 大小，量化到 256 级灰度。

3.3.1 不同训练集大小对识别率的影响 为了验证不同的训练集大小对识别率的影响，每类中前 $k(k=2,3,\cdots,7)$ 幅图像作为训练集，余下的作为测试集。实验效果如图 6 所示。

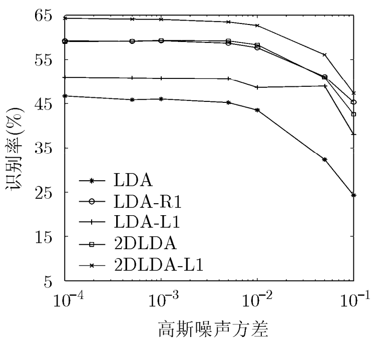
图 6 表明，同等条件下，随着训练样本数目的增多，各种方法的识别率逐渐增高，而 2DLDA-L1 的识别率一直最高，这充分说明 2DLDA-L1 方法的高效性。

3.3.2 部分缺失遮挡的影响 本节对人脸图像设置不同比例的缺失或遮挡，以验证所提出的 2DLDA-L1 的鲁棒性。设置图像缺失或遮挡的百分比分别为 5%, 10%,15%,20%,25%,30%,35%,40%,45%,50%。图 7(a)为不同比例块随机缺失示例，图 7(b)为不同比例块随机遮挡示例。实验结果如图 8 所示。

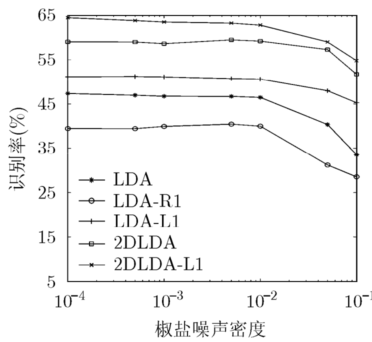
图 8 表明，随着图像随机缺失或遮挡的百分比逐渐增加，2DLDA 算法的识别率有很大的波动而其它算法的识别率整体趋势都在逐渐下降。然而，当有相同比例的缺失或遮挡时，2DLDA-L1 方法的识别率比其它算法的识别率高，这说明 2DLDA-L1 具有更强的鲁棒性。

4 结束语

本文在 LDA, LDA-L1 和 2DLDA 方法的基础上，提出基于 L1-范数的 2 维线性判别分析(2DLDA-L1)。该方法充分利用 L1-范数对野值及噪声的强鲁棒性，并且直接在图像数据矩阵上进行线性投影降维，减少了图像数据空间的信息丢失以及避免了向



(a)高斯噪声的影响



(b)椒盐噪声的影响

图 5 噪声对识别率的影响

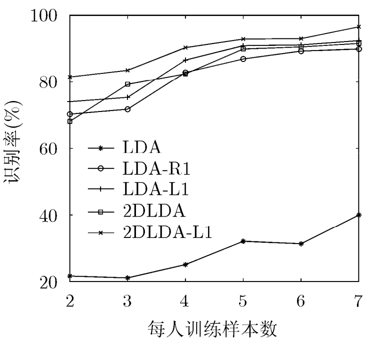
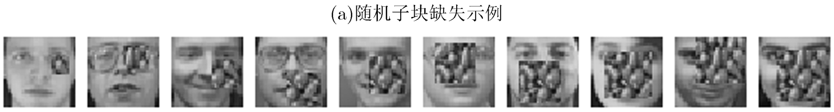


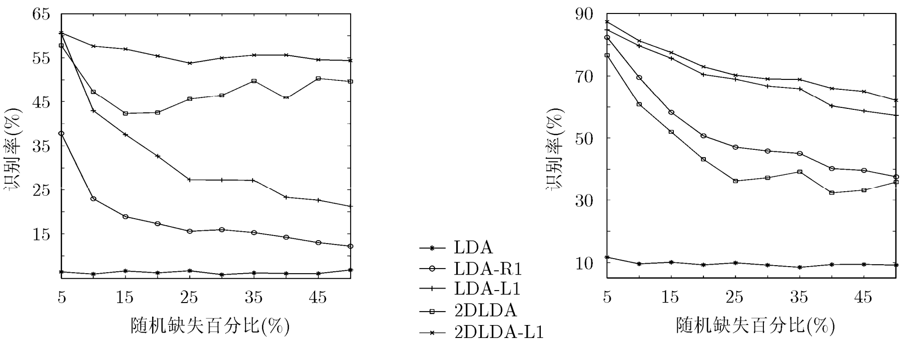
图 6 识别率随着不同训练集大小的变化趋势

(a)随机子块缺失示例



(b)随机子块遮挡示例

图 7 图像随机子块缺失遮挡示例



(a)不同比例缺失的影响 (b)不同比例遮挡的影响

图 8 不同比例缺失遮挡对识别率的影响

量化图像数据出现的维数灾难。提出了一个单调优化迭代算法来求解其最优投影矩阵，并给出了其单调收敛到局部最优的证明。在多个图像数据库上的实验结果表明，本文提出的 2DLDA-L1 对野值及噪声具有强鲁棒性，并且比其它方法具有更好的判别性能。注意到，本文方法仅仅是收敛到局部最优。在后续的工作中，我们将继续深入研究如何找到全局最优。

参 考 文 献

[1] Duda R, Hart P, and Stork D. Pattern Classification[M]. Second edition, New York: John Wiley & Sons, 2001: 2–5.

[2] Chan L, Salleh S, Ting C, *et al.*. Face identification and verification using PCA and LDA[C]. International Symposium on Information Technology, Kuala Lumpur, Malaysia, 2008: 1–6.

[3] Rujirakul K, So-In C, Arnonkijpanich B, *et al.*. PFP-PCA: parallel fixed point PCA face recognition[C]. 2013 4th International Conference on Intelligent Systems, Modelling and Simulation, Bangkok, 2013: 29–31.

[4] Belhumeur P, Hespanha J, and Kriegman D. Eigenfaces vs. fisherfaces: recognition using class specific linear projection[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1997, 19(7): 711–720.

[5] Yang Jian, Zhang D, Frangi A, *et al.*. Two-dimensional PCA: a new approach to appearance-based face representation and recognition[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2004, 26(1): 131–137.

[6] Wang Shi-min, Ye Ji-hua, and Ying De-quan. Research of 2DPCA principal component uncertainty in face recognition[C]. 2013 8th International Conference on Computer Science & Education, Colombo, Sri Lanka, 2013: 159–162.

[7] Li Ming and Yuan Bao-zong. A novel statistical linear discriminant analysis for image matrix: two-dimensional Fisherfaces[J]. *Pattern Recognition Letters*, 2005, 26(5): 527–532.

[8] Mahanta M and Plataniotis K. Ranking 2DLDA features based on fisher discriminance[C]. IEEE International Conference on Acoustic, Speech and Signal Processing, Florence, Italy, 2014: 4–9.

[9] Wang Bin-bin, Hao Xin-jie, Chen Li-sheng, *et al.*. Face recognition based on the feature fusion of 2DLDA and LBP[C]. 2013 Fourth International Conference on Information, Intelligence, Systems and Applications, Piraeus, Greece, 2013: 10–12.

[10] Pang Yan-wei, Li Xue-long, and Yuan Yuan. Robust tensor analysis with L1-norm[J]. *IEEE Transactions on Circuits Syst ems for Video Techology,* 2010, 20(2): 172–178.

[11] Zheng Wen-ming, Lin Zhou-chen, and Wang Hai-xian. L1-norm kernel discriminant analysis via Bayes error bound optimization for robust feature extraction[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2014, 25(4): 793–805.

[12] Kwak N. Principal component analysis based on L1-norm maximization[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2008, 30(9): 1672–1680.

[13] Li Xi, Hu Wei-ming, Wang Han-zi, *et al.*. Linear discriminant analysis using rotational invariant L1 norm[J]. *Neurocomputing*, 2010, 73(13): 2571–2579.

[14] Wang Hai-xian, Lu Xue-song, Hu Zi-lan, *et al.*. Fisher discriminant analysis with L1-norm[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2013, 44(6): 828–842.

[15] Zhong Fu-jin and Zhang Jia-shu. Linear discriminant analysis based on L1-norm maximization[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2013, 22(8): 3018–3027.

[16] Li Xue-long, Pang Yan-wei, and Yuan Yuan. L1-norm-based 2DPCA[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2010, 40(4): 1170–1175.

[17] Wang Hai-xian, Tang Qin, and Zheng Wen-ming. L1-norm-based common spatial patterns[J]. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 2012, 59(3): 653–662.

[18] Jenatton R, Obozinski G, and Bach F. Structured sparse principal component analysis[C]. International Conference on Artificial Intelligence and Statistics, Paris, France, 2009: 1–8.

[19] Gross R, Matthews I, Cohn J, *et al.*. Multi-PIE[C]. 8th IEEE International Conference on Automatic Face & Gesture Recognition, Amsterdam, The Netherland, 2008: 1–8.

[20] Martinez A and Benavente R. The AR face database[R]. CVC Technical Report 24, Barcelona, Spain, 1998.

[21] Samaria F and Harter A. Parameterisation of a stochastic model for human face identification[C]. Proceedings of the Second IEEE Workshop on Applications of Computer Vision, Sarasota, USA, 1994, 138–142.

陈思宝： 男，1979 年生，副教授，硕士生导师，研究方向为图像处理与模式识别.

陈道然： 女，1989 年生，硕士生，研究方向为图像处理与模式识别.

罗 斌： 男，1963 年生，教授，博士生导师，研究方向为计算机视觉与模式识别.