

基于 Laplace 先验的 Bayes 压缩感知波达方向估计

王 军^{①②} 闫锋刚^{*②} 马文洁^② 乔晓林^{①②}

^①(哈尔滨工业大学电子与信息工程学院 哈尔滨 150001)

^②(哈尔滨工业大学(威海)信息与电气工程学院 威海 264209)

摘 要: 基于多任务贝叶斯压缩感知(BCS)理论, 该文提出一种使用 Laplace 先验的目标到达角(DOA)估计算法。该算法利用阵元输出为观测值, 将 DOA 估计转化为 Laplace 先验约束下的 BCS 求解稀疏信号问题, 使用 Laplace 先验获得比传统 BCS 更好的稀疏性。该算法不需要信源个数的先验信息和进行特征值分解, 能够适应相干信源场景, 仿真结果表明该算法具有比传统 BCS 方法和经典 MUSIC 算法更好的 DOA 估计性能。

关键词: 目标到达角估计; 多任务; Bayes 压缩感知; Laplace 先验

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2015)04-0817-07

DOI: 10.11999/JEIT140937

Direction-of-arrival Estimation Using Laplace Prior Based on Bayes Compressive Sensing

Wang Jun^{①②} Yan Feng-gang^② Ma Wen-jie^② Qiao Xiao-lin^{①②}

^①(School of Electronics and Information Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

^②(School of Information and Electrical Engineering, Harbin Institute of Technology at Weihai, Weihai 264209, China)

Abstract: Based on the multi-task Bayes Compressive Sensing (BCS), a Direction-Of-Arrival (DOA) estimation strategy using Laplace prior is proposed. The DOA estimation is formulated as the reconstruction of sparse signal constrained by the Laplace prior through the BCS framework. The outputs of array sensors are directly employed as the observations, and the exploiting of Laplace prior leads to better sparse property than the conventional BCS method. The proposed method needs not the prior information of the number of sources, needs not the eigenvalue decomposition and can work in the coherent signal scenario. The numerical experiments show that the proposed method has the better performance than the conventional BCS and MUSIC algorithm on the DOA estimation.

Key words: Directions-Of-Arrival (DOA) estimation; Multi-task; Bayes Compressive Sensing (BCS); Laplace prior

1 引言

信号的波达角(Direction-Of-Arrival, DOA)估计在雷达、声呐、无线通信等领域有重要应用。一般地, DOA 估计问题具有空域信号稀疏特征, 满足压缩感知理论(Compressive Sensing, CS)^[1,2]的应用条件, 基于 CS 的 DOA 估计得到国内外学者的关注和研究。

利用 CS 理论, 文献[3,4]基于单测量向量模型、文献[5,6]基于多测量向量模型实现了 DOA 估计, 仿真表明基于 CS 的 DOA 估计具有比多重信号分类(Multiple Signals Classification, MUSIC)等经典算法更好的性能, 特别是在低信噪比和相干信源场景时性能改善更明显。文献[7]基于 CS 理论利用两个

正交子阵的互相关信息获得比互相关矩阵-旋转不变子空间信号参数估计算法(Cross Correlation Matrix-Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques, CCM-ESPRIT)更好的估计性能; 文献[8]对空间相关信源建立块-稀疏信号模型, 同时获得了中心 DOA 和相关信源角度跨度。文献[9]在目标的距离-多普勒单元进行 CS 稀疏重构, 获得目标的超分辨 DOA 估计; 文献[10]利用压缩感知-MUSIC 算法(CS-MUSIC)在快拍数少于信源数和相干信源场景下获得高分辨 DOA 估计。文献[11]基于 CS 理论解决了分布式天线阵列引起的角度模糊问题; 文献[12]的波束形成算法在低快拍下可有效抑制相干、非相干干扰。

贝叶斯压缩感知(Bayes CS, BCS)^[13]将 CS 中信号重构转化为求解稀疏先验约束下的信号后验概率问题, 具有比传统 CS 更好的性能。文献[14]和文献[15]针对单任务和多任务观测模型, 提出基于

2014-07-15 收到, 2014-12-05 改回

山东省自然科学基金(ZR2014FQ003)和国家自然科学基金(61371181)资助课题

*通信作者: 闫锋刚 yfglion@163.com

Laplace 先验的 BCS 重构理论, 获得比传统 BCS^[13] 更好的重构性能。文献[16]提出基于 BCS 的 DOA 估计, 仿真表明其性能优于 ESPRIT 算法和求根 MUSIC 算法。本文根据多快拍 DOA 估计中观测矩阵不变特征, 基于文献[14], 给出一种观测矩阵不变时基于 Laplace 先验的多任务 CS 重构方法(Multi-Task CS using Laplace prior, MTCS-LAP), 对文献[15]中方法进行改进并消除了文献[15]中的迭代近似误差; 然后将 MTCS-LAP 应用到 DOA 估计中, 获得了比基于 BCS 的 DOA 估计方法和经典 MUSIC 算法更优的性能。

2 MTCS-LAP 算法

2.1 MTCS-LAP 分层模型

设多任务观测模型为

$$\mathbf{t}_i = \Phi \omega_i + \mathbf{n}_i, \quad i = 1, 2, \dots, W \quad (1)$$

式中 $\omega_i \in \mathbb{R}^N, i = 1, 2, \dots, W$ 代表 W 个共享支撑集但取值不同的稀疏信号; $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 为多任务中共享的观测矩阵; $\mathbf{n}_i \in \mathbb{R}^M, i = 1, 2, \dots, W$ 代表观测噪声。设 $\{\omega_i\}_{i=1}^W$ 具有高斯先验^[14]:

$$p(\omega_i | \gamma) = \prod_{j=1}^N N(\omega_{i,j} | 0, \gamma_j) \quad (2)$$

其中 $\omega_{i,j}, i = 1, 2, \dots, W; j = 1, 2, \dots, N$ 代表 ω_i 的第 j 个元素。在式(2)中, 不同 ω_i 中第 j 个相同位置元素 $\omega_{i,j}$ 的概率密度受同一个参数 γ_j 控制, 这种共享参数设置为多任务中不同的稀疏信号 $\{\omega_i\}_{i=1}^W$ 建立关联。式(2)中 $\gamma_j = \sigma_j^2$ 为 $\omega_{i,j}, j = 1, 2, \dots, N$ 的方差, 称 $\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N]^T$ 为超参数, 且服从 Gamma 分布:

$$p(\gamma | \lambda) = \prod_{j=1}^N \text{Gamma}(\gamma_j | 1, \lambda/2) \quad (3)$$

其中 $\text{Gamma}(\gamma_j | 1, \lambda/2) = \lambda/2 \cdot \exp(-\lambda\gamma_j/2), \lambda > 0$ 。根据式(2)和式(3)可得 $\{\omega_i\}_{i=1}^W$ 的边缘概率:

$$p(\omega_i | \lambda) = \int p(\omega_i | \gamma) p(\gamma | \lambda) d\gamma = \left(\lambda^{N/2} / 2^N \right) \cdot \exp \left[-\sqrt{\lambda} \sum_{j=1}^N |\omega_{i,j}| \right] \quad (4)$$

如式(4)所示, $\{\omega_i\}_{i=1}^W$ 服从 Laplace 先验。相对于 BCS^[13], ω_i 服从 Laplace 分布使其具有更好的稀疏特征。对 λ 指定 Gamma 先验

$$p(\lambda | \nu) = \text{Gamma}(\lambda | \nu/2, \nu/2)$$

设如式(1)观测模型中噪声 $\mathbf{n}_i, i = 1, 2, \dots, W$ 服从高斯分布:

$$\mathbf{n}_i \sim N(0, \beta^{-1} \mathbf{I}_M) \quad (5)$$

其中 $\beta = 1/\sigma_0^2$ 为噪声方差的倒数, \mathbf{I}_M 为 M 维单位阵。称 β 为超参数并为其定义 Gamma 先验:

$$p(\beta | c, d) = \text{Gamma}(\beta | c, d) \quad (6)$$

式中 c, d 为控制参数。由式(1)~式(6)定义的基于 Laplace 先验的 BCS 分层模型如图 1 所示。

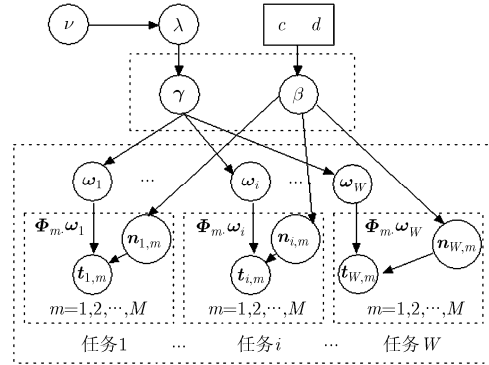


图1 基于 Laplace 先验的多任务 BCS 分层模型

图1中 Φ_m 代表 Φ 的第 m 行, $t_{i,m}$ 和 $n_{i,m}$ 分别代表 t_i 和 \mathbf{n}_i 的第 $m \in [1, M]$ 个元素。

根据式(1)线性模型, 由贝叶斯估计理论可得 $\{\omega_i\}_{i=1}^W$ 的后验为多变量高斯分布:

$$p(\omega_i | \mathbf{t}_i, \beta, \gamma) = N(\omega_i | \mu_i, \Sigma_i) \quad (7)$$

式中 $\mu_i \in \mathbb{R}^N$ 和 $\Sigma_i \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 分别为 ω_i 的后验均值和后验协方差:

$$\mu_i = \beta \Sigma_i \Phi^T \mathbf{t}_i \quad (8)$$

$$\Sigma_i = \Sigma = (\beta \Phi^T \Phi + \Lambda)^{-1} \quad (9)$$

式(9)中 $\Lambda = \text{diag}(\gamma_1^{-1}, \gamma_2^{-1}, \dots, \gamma_N^{-1}), \text{diag}(\cdot)$ 为对角阵。因多任务中观测阵 Φ 不变, 不同 $\{\omega_i\}_{i=1}^W$ 的后验协方差取相同值 Σ 。若式(8)和式(9)中超参数 β 和 γ 已知, 可得 ω_i 的后验均值估计 $\hat{\omega}_i = \mu_i, i = 1, 2, \dots, W$ 。根据 II 型最大似然估计算法, β, γ, λ 可通过最大化 $p(\beta, \gamma, \lambda, \{\mathbf{t}_i\}_{i=1}^W)$ 得到

$$\begin{aligned} p(\beta, \gamma, \lambda, \{\mathbf{t}_i\}_{i=1}^W) &= p(\{\mathbf{t}_i\}_{i=1}^W | \beta, \gamma, \lambda) p(\gamma | \lambda) p(\lambda) p(\beta) \\ &= p(\gamma | \lambda) p(\lambda) p(\beta) \prod_{i=1}^W \int p(\mathbf{t}_i | \omega_i, \beta) p(\omega_i | \gamma) d\omega_i \\ &= p(\gamma | \lambda) p(\lambda) p(\beta) \prod_{i=1}^W (1/2\pi)^{N/2} |\mathbf{C}|^{-1/2} \\ &\quad \cdot \exp(-\mathbf{t}_i^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{t}_i / 2) \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $\mathbf{C} = (\beta^{-1} \mathbf{I}_M + \Phi \Lambda^{-1} \Phi^T)$ 。关于 β, γ, λ 的对数似然 $L^{mt}(\beta, \gamma, \lambda) = \ln p(\beta, \gamma, \lambda, \{\mathbf{t}_i\}_{i=1}^W)$ 为

$$\begin{aligned} L^{mt}(\beta, \gamma, \lambda) &= \sum_{i=1}^W \left(-\frac{1}{2} \ln |\mathbf{C}| - \frac{1}{2} \mathbf{t}_i^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{t}_i \right) \\ &\quad + \left[N \ln \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^N \gamma_j \right] \\ &\quad + \left[\frac{\nu}{2} \ln \frac{\nu}{2} - \ln \Gamma(\nu/2) \right] \\ &\quad + \left[\left(\frac{\nu}{2} - 1 \right) \ln \lambda - \frac{\nu}{2} \lambda \right] \\ &\quad + [(c-1) \ln \beta - d\beta] \end{aligned} \quad (11)$$

式中 $\ln(\cdot)$ 代表取自然对数。舍弃 $L^{mt}(\beta, \gamma, \lambda)$ 中与 γ 无关的项, 可得关于 γ 的似然函数:

$$L^{mt}(\gamma) = \sum_{i=1}^W \left(-\frac{1}{2} [-\ln |\mathbf{L}| - N \ln \beta - \ln |\boldsymbol{\Sigma}|] - \frac{1}{2} [\beta \|\mathbf{t}_i - \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\mu}_i\|^2 + \boldsymbol{\mu}_i^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\mu}_i] \right) - \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^N \gamma_j \quad (12)$$

式中用到了 $\ln |\mathbf{C}| = -\ln |\boldsymbol{\Lambda}| - N \ln \beta - \ln |\boldsymbol{\Sigma}|$ 和 $\mathbf{t}_i^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{t}_i = \beta \|\mathbf{t}_i - \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\mu}_i\|^2 + \boldsymbol{\mu}_i^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\mu}_i$ 。令 $dL^{mt}(\gamma)/d\gamma_j = 0$, 可得 $\gamma_j, j=1, 2, \dots, N$ 的估计为

$$\gamma_j = -\frac{W}{2\lambda} + \sqrt{\frac{W^2}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^W \langle \omega_{i,j}^2 \rangle} \quad (13)$$

其中 $\langle \omega_{i,j}^2 \rangle = \mu_{i,j}^2 + \Sigma_{j,j}$, $\mu_{i,j}$ 代表 $\boldsymbol{\mu}_i$ 的第 j 个元素, $\Sigma_{j,j}$ 代表 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的第 j 个主对角元素, $\langle \cdot \rangle$ 代表求均值。类似于对 γ 的求解, 根据 $L^{mt}(\beta, \gamma, \lambda)$ 可得关于 λ, β, ν 的估计为

$$\lambda = (N - 1 + \nu/2) / \left(\sum_{j=1}^N (\gamma_j/2) + \nu/2 \right) \quad (14)$$

$$\beta = \frac{(WN)/2 + c}{\sum_{i=1}^W \left(\langle \|\mathbf{t}_i - \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\omega}_i\|^2 \rangle / 2 \right) + d} \quad (15)$$

$$\ln(\nu/2) + 1 - \psi(\nu/2) + \ln \lambda - \lambda = 0 \quad (16)$$

式(15)中 $\langle \|\mathbf{t}_i - \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\omega}_i\|^2 \rangle$ 是根据 $\boldsymbol{\omega}_i$ 的概率求 $\|\mathbf{t}_i - \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\omega}_i\|^2$ 的均值; 式(16)中 $\psi(\nu/2)$ 表示函数 $\ln \Gamma(\cdot)$ 在 $\nu/2$ 处的导数。根据式(13)~式(16)可知 $\gamma, \lambda, \beta, \nu$ 的求解需要已知 $\boldsymbol{\mu}_i$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$, 根据式(8)和式(9)可知 $\boldsymbol{\mu}_i$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 求解需要已知 $\gamma, \lambda, \beta, \nu$, 因此可通过迭代求解。迭代求解步骤为: (1)为参数 $\gamma, \lambda, \beta, \nu$ 设定初始值; (2)根据当前 γ, λ, β , 得到 $\boldsymbol{\mu}_i$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$; (3)根据步骤(2)的 $\boldsymbol{\mu}_i$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$, 利用式(13)~式(16)得到关于 $\gamma, \lambda, \beta, \nu$ 的新估计值; (4)判断迭代收敛条件是否满足, 如果收敛条件不满足, 跳回步骤(2); 如果收敛条件满足, 终止迭代。

这种在多任务观测下, 通过图 1 所示分层概率模型为稀疏信号 $\{\boldsymbol{\omega}_i\}_{i=1}^W$ 施加如式(4)所示 Laplace 先验约束的 BCS 重构称为基于 Laplace 先验的多任务压缩感知(MTCS-LAP)。

2.2 MTCS-LAP 快速算法

如上节迭代求解, 在每次迭代中都要计算式(9)所示 N 维矩阵求逆, 计算复杂度高。为降低计算量, 可通过快速算法在每次迭代中只更新一个参数 $\gamma_j \in \gamma$, 不对 γ 整体更新。快速算法由空模型($\gamma = \mathbf{0}$)开始, 通过迭代不断向模型中添加 γ_j , 等价于向观测模型中不断添加 $\boldsymbol{\Phi}$ 的基向量 $\boldsymbol{\varphi}_j$, 这里 $\boldsymbol{\varphi}_j$ 代表 $\boldsymbol{\Phi}$ 的第 j 列。

式(11)中的矩阵 \mathbf{C} 可重写为

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \left[\beta^{-1} \mathbf{I}_M + \sum_{j=1, j \neq k}^N \gamma_j \boldsymbol{\varphi}_j \boldsymbol{\varphi}_j^T \right] + \gamma_k \boldsymbol{\varphi}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T \\ &= \gamma_k \boldsymbol{\varphi}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T + \mathbf{C}_{-k} \end{aligned} \quad (17)$$

式中第 1 项是仅与 γ_k 有关的项, 第 2 项 \mathbf{C}_{-k} 是与 γ_k 无关的项。将式(17)代入式(11)可得关于 γ 的似然函数:

$$L^{mt}(\gamma) = L(\gamma_{-k}) + \ell(\gamma_k) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} L(\gamma_{-k}) &= (-1/2) \sum_{i=1}^W \left\{ \ln |\mathbf{C}_{-k}| + \mathbf{t}_i^T \mathbf{C}_{-k}^{-1} \mathbf{t}_i \right\} \\ &\quad - (\lambda/2) \sum_{j=1, j \neq k}^N \gamma_j \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \ell(\gamma_k) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^W \left\{ \mathbf{t}_i^T \frac{\mathbf{C}_{-k}^{-1} \boldsymbol{\varphi}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{C}_{-k}^{-1}}{\gamma_k^{-1} + \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{C}_{-k}^{-1} \boldsymbol{\varphi}_k} \mathbf{t}_i \right. \\ &\quad \left. - \ln \left[1 + \gamma_k \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{C}_{-k}^{-1} \boldsymbol{\varphi}_k \right] - \frac{\lambda}{2} \gamma_k \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $L(\gamma_{-k})$ 代表与 γ_k 无关的项, $\ell(\gamma_k)$ 代表仅与 γ_k 有关的项。定义:

$$s_k = \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{C}_{-k}^{-1} \boldsymbol{\varphi}_k, \quad k \in [1, N] \quad (21)$$

$$q_{i,k} = \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{C}_{-k}^{-1} \mathbf{t}_i, \quad k \in [1, N]; i \in [1, W] \quad (22)$$

s_k 在多任务中不变, 而 $q_{i,k}$ 在多任务中与每个观测 \mathbf{t}_i 有关。式(20)中 $\ell(\gamma_k)$ 可重写为

$$\begin{aligned} \ell(\gamma_k) &= (1/2) \left\{ -W \ln(1 + \gamma_k s_k) \right. \\ &\quad \left. + \left[\sum_{i=1}^W \gamma_k q_{i,k}^2 / (1 + \gamma_k s_k) \right] - \gamma_k \lambda \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

因 $dL^{mt}(\gamma)/d\gamma_j = d\ell(\gamma_k)/d\gamma_j$,

$$\begin{aligned} d\ell(\gamma_k)/d\gamma_k &= (1/2) \left[-W s_k / (1 + \gamma_k s_k) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^W q_{i,k}^2 / (1 + \gamma_k s_k)^2 - \lambda \right] \end{aligned} \quad (24)$$

在文献[15]中, 利用近似式 $s_k \gg \gamma_k^{-1}$, 将分母做了近似处理 $(\gamma_k^{-1} + s_k)^2 \approx s_k^2$ 。在式(24)中, 因多任务中共享观测矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 所以分母 $1 + \gamma_k s_k$ 中的 s_k 与观测 $\{\mathbf{t}_i\}_{i=1}^W$ 无关, 式(24)不需近似, 经过通分变为

$$\begin{aligned} d\ell(\gamma_k)/d\gamma_k &= (-1/2) \left[(\lambda s_k^2) \gamma_k^2 + (W s_k^2 + 2\lambda s_k) \gamma_k \right. \\ &\quad \left. + \left(\lambda + W s_k - \sum_{i=1}^W q_{i,k}^2 \right) \right] / (1 + \gamma_k s_k)^2 \end{aligned} \quad (25)$$

令 $d\ell(\gamma_k)/d\gamma_k = 0$ 并根据 $\gamma_k \geq 0$ 的性质, 可得 γ_k 为

$$\gamma_k = (-B + \sqrt{D}) / 2A, \quad D > \lambda \quad (26)$$

$$\gamma_k = 0, \quad \text{其他} \quad (27)$$

其中 $A = \lambda s_k^2$, $B = W s_k^2 + 2\lambda s_k$, $C = \lambda + W s_k$, $-\sum_{i=1}^W q_{i,k}^2$, $\Delta = B^2 - 4AC$, $D = \sum_{i=1}^W q_{i,k}^2 - W s_k$ 。关于 λ, β, ν 的求解公式如式(14), 式(15)和式(16)所示。MTCS-LAP 快速算法步骤如表 1 所示。

表 1 MTCS-LAP 快速算法步骤

输入: $\Phi, (t_1, t_2, \dots, t_W)$
输出: $\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N]^T, \lambda, \nu, \beta$
(1)初始化: $\gamma = \mathbf{0}, \lambda = 0$, 迭代步骤 $p = 0$
(2)如果收敛条件不满足, 按照步骤(3)~步骤(10)进行迭代; 如果满足收敛条件, 终止迭代
(3)选择一个 $\gamma_k, k \in [1, N]$
(4)如果 $D > \lambda$ 且 $\gamma_k = 0$, 则将 γ_k 加入到模型中
(5)如果 $D > \lambda$ 且 $\gamma_k > 0$, 则根据式(26)重新估计 γ_k
(6)如果 $D > \lambda$, 则将模型 Φ 中的第 k 列 φ_k 剪除, 置 $\gamma_k = 0$
(7)根据式(8)和式(9)更新 $\mu_i, i = 1, 2, \dots, W$ 和 Σ
(8)更新 $s_k, q_{i,k}$
(9)根据式(14)~式(16)更新 λ, β, ν
(10)迭代步骤 $k = k + 1$, 跳回步骤(2)

3 基于 MTCS-LAP 的 DOA 估计

在 DOA 估计中, 在包含多个快拍的观测时间段内可假设信源空间位置不变, 多个快拍的阵列输出可认为是对空间信源的多任务观测, 可通过 MTCS-LAP 算法实现对信源的 DOA 估计。

如图 2 均匀线阵, 设 $x_m = (m-1)d, m = 1, 2, \dots, M'$ 为阵元位置, 其中 $d = \lambda/2, \lambda$ 为入射信号波长。对入射角为 θ 的远场信号, 导向矢量为 $\mathbf{a}(\theta) = [\exp(-jk_\theta x_1), \exp(-jk_\theta x_2), \dots, \exp(-jk_\theta x_{M'})]^T$, $k_\theta = 2\pi \sin \theta / \lambda$ 。将入射空间划分为 N' 个离散角度 $\Theta = \{\theta_n, n = 1, 2, \dots, N'\}$, 设在 Θ 上的入射信号为 $\mathbf{s}_i = [s_i(1), s_i(2), \dots, s_i(N')]^T, i = 1, 2, \dots, W$, 其中 W 为快拍数。阵列关于 $\{\mathbf{s}_i\}_{i=1}^W$ 的输出为

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{A} \mathbf{s}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad i = 1, 2, \dots, W \quad (28)$$

式(28)中 $\mathbf{y}_i \in \mathbb{C}^{M'}$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_i \in \mathbb{C}^{M'}, i = 1, 2, \dots, W$ 分别为阵列输出和观测噪声; $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{M' \times N'}$ 为阵列流形。

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_{N'})] \quad (29)$$

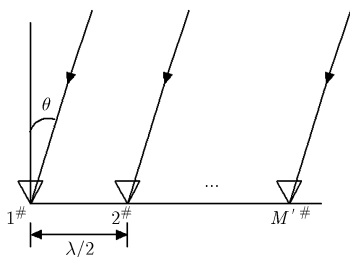


图 2 均匀线阵空间示意图

设 Θ 中仅存在 $K' \ll N'$ 个入射信号, 即 $\|\mathbf{s}_i\|_0 = K'$, 称 $\{\mathbf{s}_i\}_{i=1}^W$ 为稀疏目标场景, $\|\cdot\|_0$ 代表 ℓ_0 -范数。为使用 BCS^[13]理论, 将观测式(28)转化为实数形式:

$$\mathbf{t}_i = \Phi \boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{n}_i, \quad i = 1, 2, \dots, W \quad (30)$$

其中 $\mathbf{t}_i = [\text{Re}\{\mathbf{y}_i\}, \text{Im}\{\mathbf{y}_i\}]^T$ 为 $M = 2M'$ 维实数观测; $\mathbf{n}_i = [\text{Re}\{\boldsymbol{\varepsilon}_i\}, \text{Im}\{\boldsymbol{\varepsilon}_i\}]^T, \boldsymbol{\omega}_i = [\text{Re}\{\mathbf{s}_i\}, \text{Im}\{\mathbf{s}_i\}]^T$ 分别为 $N = 2N'$ 维实数噪声和信号, 其中实信号 $\boldsymbol{\omega}_i$ 的稀疏度为 $K = 2K'$ 。矩阵 $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 是实数阵列流形:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \text{Re}\{A\} & -\text{Im}\{A\} \\ \text{Im}\{A\} & \text{Re}\{A\} \end{bmatrix} \quad (31)$$

其中 $\text{Re}\{\cdot\}, \text{Im}\{\cdot\}$ 为取实部、取虚部。如式(30)所示, $\{\boldsymbol{\omega}_i\}_{i=1}^W$ 代表 W 个快拍中的稀疏目标场景, 根据入射信源空间位置不变假设可知 $\{\boldsymbol{\omega}_i\}_{i=1}^W$ 是共支撑集的稀疏信号, 满足 MTCS-LAP 算法条件。设经过 MTCS-LAP 快速算法得到后验均值估计 $\hat{\boldsymbol{\omega}}_i = \boldsymbol{\mu}_i, i = 1, 2, \dots, W$, 则复观测模型式(28)中 $\{\mathbf{s}_i\}_{i=1}^W$ 的估计为

$$\hat{\mathbf{s}}_i = [\hat{\omega}_i(1), \hat{\omega}_i(2), \dots, \hat{\omega}_i(N')]^T + \text{sqrt}(-1) \cdot [\hat{\omega}_i(N'+1), \hat{\omega}_i(N'+2), \dots, \hat{\omega}_i(2N')]^T \quad (32)$$

4 仿真分析

本节通过仿真分析基于 MTCS-LAP 的 DOA 估计性能, 将经典 MUSIC 算法和基于 BCS 的 DOA 估计算法^[16]作为比较基准。在仿真中, 设信源角度空间 $\Theta = \{-90^\circ, -89^\circ, \dots, 89^\circ\}, N' = 180$ 。定义阵元数 M' 、快拍数 W 、信源数 K' 和信源信噪比 SNR 取固定值时为一个仿真设置 $\text{St} = \{M', W, K', \text{SNR}\}$, 对于一个 St 进行 $Q=500$ 次仿真评估此 St 下 MTCS-LAP 的 DOA 估计性能。在每次独立仿真中, 在 Θ 上随机取 K' 个目标, 令 K' 个目标 SNR 取相同值。一个 St 下信源角度估计的均方根误差(Root Mean Square Error, RMSE)为

$$\text{RMSE} = \sqrt{(1/Q) \sum_{q=1}^Q \left[(1/K') \sum_{k=1}^{K'} (\theta_k^q - \hat{\theta}_k^q)^2 \right]} \quad (33)$$

其中 θ_k^q 和 $\hat{\theta}_k^q, q = 1, 2, \dots, Q; k = 1, 2, \dots, K'$ 分别代表第 q 次独立仿真中第 k 个目标的角度真实值和估计值。

4.1 单快拍 DOA 估计

实验 1 单快拍观测时, MTCS-LAP 在不同信噪比下的 DOA 估计性能。单快拍是 MTCS-LAP 取任务数 $W=1$ 的情形。实验参数: $M' = 10, W = 1, K' = 2$ 。保持 M', W, K' 不变, MTCS-LAP 随 SNR 变化的性能如图 3 所示: 随信噪比增加, MTCS-LAP 算法的 RMSE 变小; 相同信噪比下 MTCS-LAP 的 RMSE 比传统 BCS 算法小; MTCS-LAP 可实现单快拍的 DOA 估计。

实验 2 单快拍观测时, MTCS-LAP 在不同阵

元数下的 DOA 估计性能。实验参数：阵元数 $M' \in [4, 20]$ ，快拍数 $W = 1$ ，信源数 $K' = 2$ ，SNR=6 dB。保持 W, K', SNR 不变，MTCS-LAP 随阵元数变化时的性能如图 4：随阵元数增加，MTCS-LAP 算法的 RMSE 变小；相同阵元数时，MTCS-LAP 算法的 RMSE 比 BCS 算法小。综合实验 1，实验 2 结果，单快拍观测时，MTCS-LAP 算法的 DOA 估计性能优于 BCS 算法。

4.2 多快拍 DOA 估计

实验 3 多快拍时，MTCS-LAP 在不同信噪比下的 DOA 估计性能。实验参数：阵元数 $M' = 10$ ，快拍数 $W = 50$ ，信源数 $K' = 2$ 。保持 M', W, K' 不变，MTCS-LAP 随 SNR 变化时的估计性能如图 5 所示。多快拍时，随信噪比增加 MTCS-LAP 算法的 RMSE 减小；相同信噪比下，3 种算法的 RMSE 大小顺序为：MTCS-LAP < BCS < MUSIC，MTCS-LAP 算法具有比 BCS 和 MUSIC 算法更小的角度估计误差。

实验 4 多快拍时，MTCS-LAP 随阵元数变化时的 DOA 估计性能。实验参数：阵元数 $M' \in [4, 20]$ ，快拍数 $W = 50$ ，信源数 $K' = 2$ ，SNR = 6 dB。保持 W, K', SNR 不变，MTCS-LAP 随阵元数变化的性能如图 6：随阵元数 M' 的增加，MTCS-LAP 算法的 RMSE 减小；阵元数相同时，3 种算法 RMSE 大小顺序为 MTCS-LAP < BCS < MUSIC。

实验 5 多快拍时，MTCS-LAP 随快拍数变化时的 DOA 估计性能。实验参数：阵元数 $M' = 10$ ，快拍数 $W \in [20, 180]$ ，信源数 $K' = 2$ ，信噪比 SNR =

6 dB。保持 M', K', SNR 不变，MTCS-LAP 随快拍数变化时的性能如图 7：随着快拍数增加，MTCS-LAP 的 RMSE 减小；快拍数相同时，3 种算法的 RMSE 大小顺序为 MTCS-LAP < BCS < MUSIC。

实验 6 多快拍时，MTCS-LAP 在不同信源 DOA 时的估计性能。实验参数：阵元数 $M' = 10$ ，快拍数 $W = 50$ ，信源数 $K' = 1$ ，SNR = 6 dB。保持 M', W, K', SNR 参数不变，仿真得到 MTCS-LAP 在信源角度区间 $\theta \in [0^\circ, 85^\circ]$ 的估计性能如图 8 所示：随信源 DOA 变大，MTCS-LAP 的估计性能下降；随信源 DOA 的变大，MTCS-LAP 的 RMSE 增加速率变快；在相同 DOA 下，MTCS-LAP 的性能优于 MUSIC 和 BCS。

4.3 相干信源场景

实验 7 两个相干信源场景下，MTCS-LAP 算法的估计性能。实验参数：阵元数 $M' = 10$ ，快拍数 $W = 50$ ；设 θ 上存在 $K' = 2$ 个相干信源。保持 M', W, K' 不变，MTCS-LAP 随信噪比变化时的性能如图 9 所示。

从图 9 可以看出：在相干信源场景下，随 SNR 增加 MTCS-LAP 的 RMSE 降低；相同信噪比下各算法 RMSE 大小顺序为 MTCS-LAP < BCS，MTCS-LAP 算法优于 BCS 算法；CS 理论框架下的 MTCS-LAP 和 BCS 可以对相干信源场景实现有效的 DOA 估计。

如图 10 是在一次仿真中 MTCS-LAP 对两个相干信源进行 DOA 估计的结果。两个信源角度分别

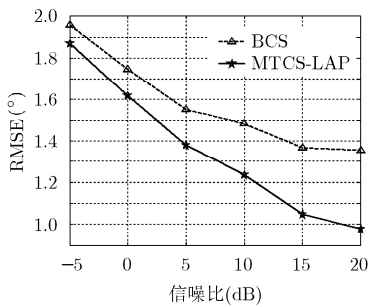


图 3 单快拍 MTCS-LAP 算法性能 (不同信噪比)

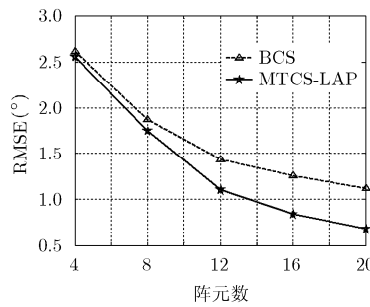


图 4 单快拍 MTCS-LAP 算法性能 (不同阵元数)

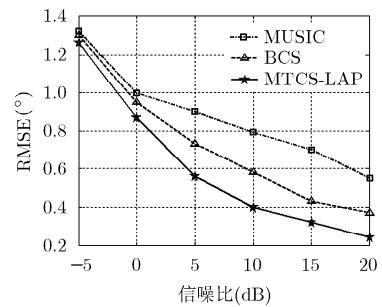


图 5 多快拍 MTCS-LAP 算法 DOA 估计性能(不同信噪比)

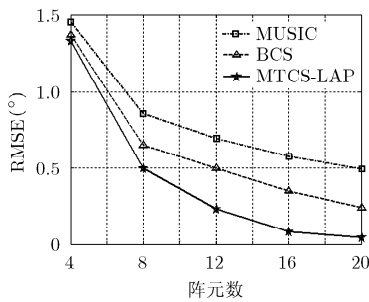


图 6 多快拍 MTCS-LAP 算法 DOA 估计性能(不同阵元数)

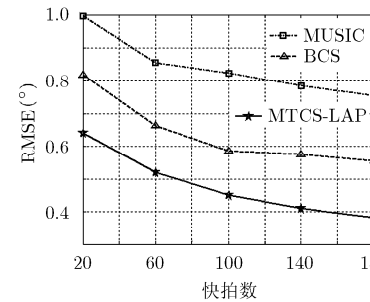


图 7 多快拍 MTCS-LAP 算法 DOA 估计性能(不同快拍数)

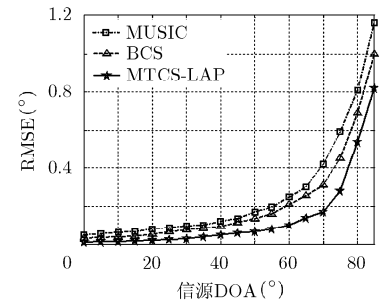


图 8 MTCS-LAP 在不同 DOA 时的估计性能

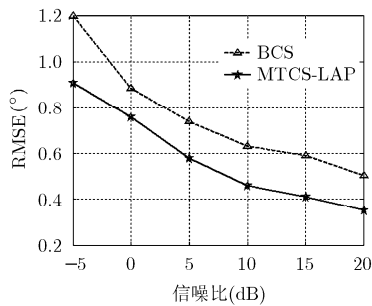


图 9 MTCS-LAP 在相干信源场景下的性能

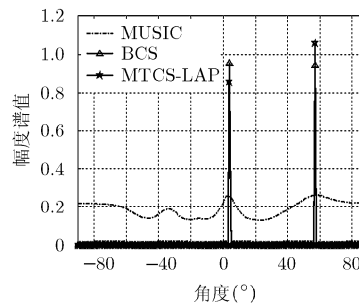


图 10 MTCS-LAP 对相干信源的一次重构结果

为 4° 和 57° ，信噪比同为 $\text{SNR}=6 \text{ dB}$ 。由图 10 可知：对于相干信源场景，MUSIC 算法难以得到目标真实 DOA；而 CS 理论框架下的 BCS 和 MTCS-LAP 能有效估计出信源真实角度。

通过上述实验可知，基于 Laplace 先验的 MTCS-LAP 在 DOA 估计中性能优于 BCS，明显优于经典 MUSIC 算法；MTCS-LAP 能够实现单快拍 DOA 估计，克服经典子空间方法对快拍数的要求；在相干信源场景下 MTCS-LAP 能有效实现信源 DOA 估计，估计性能比 BCS 好，克服了经典 MUSIC 算法对相干信源场景的 DOA 估计失效问题；MTCS-LAP 进行 DOA 估计时不需要信源数先验信息，提高了算法的适应性。

5 结束语

基于 BCS 理论，本文首先给出了基于 Laplace 先验的多任务 BCS 重构算法 MTCS-LAP，得到了比 BCS 更稀疏的重构性能；然后提出一种利用 MTCS-LAP 的 DOA 估计算法。仿真实验表明：MTCS-LAP 可根据单个快拍观测进行 DOA 估计，估计性能优于传统 BCS 方法，解决了经典 MUSIC 算法不能根据单个快拍进行 DOA 估计的难题；多快拍观测时 MTCS-LAP 的 DOA 估计性能优于 BCS 算法，明显优于经典 MUSIC 算法，且不需信源个数的先验信息；MTCS-LAP 能在相干信源场景下实现有效的 DOA 估计，解决了经典 MUSIC 算法不能适应相干信源场景的问题。

参考文献

- [1] Candes E J, Romberg J, and Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(2): 489-509.
- [2] Candes E J and Wakin M B. An introduction to compressive sampling[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, 25(2): 21-30.
- [3] Ender J H G. On compressive sensing applied to radar[J]. *Signal Processing*, 2010, 90: 1402-1414.
- [4] Bilik I. Spatial compressive sensing for direction-of-arrival estimation of multiple sources using dynamic sensor arrays[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2011, 47(3): 1754-1769.
- [5] Cotter S F. Multiple snapshot matching pursuit for direction of arrival(DOA) estimation[C]. *Proceedings of 15th European Signal Processing Conference*, Poznan, Poland, 2007: 247-251.
- [6] Gretsistas A and Plumbley M. A multichannel spatial compressed sensing approach for direction of arrival estimation[C]. *Proceedings of the 9th International Conference on Latent Variable Analysis and Signal Separation*, St Malo, France, 2010: 458-465.
- [7] Gu Jian-feng, Wei Ping, and Tai Heng-ming. Two-dimensional DOA estimation by cross-correlation matrix stacking[J]. *Circuits System and Signal Processing*, 2011, 30(2): 339-353.
- [8] Gan Lu and Wang Xiao-qing. DOA estimation of coherently distributed sources based on block-sparse constraint[J]. *IEICE Transactions on Communications*, 2012, E95-B(7): 2472-2476.
- [9] 王海涛, 王俊. 基于压缩感知的无源雷达超分辨 DOA 估计[J]. *电子与信息学报*, 2013, 35(4): 877-881.
Wang Hai-tao and Wang Jun. Super-resolution DOA estimation in passive radar based on compressed sensing[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2013, 35(4): 877-881.
- [10] 吴小川, 邓维波, 杨强. 基于 CS-MUSIC 算法的 DOA 估计[J]. *系统工程与电子技术*, 2013, 35(9): 1821-1824.
Wu Xiao-chuan, Deng Wei-bo, and Yang Qiang. DOA estimation method based on CS-MUSIC algorithm[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2013, 35(9): 1821-1824.
- [11] 王赞, 陈伯孝. 利用压缩感知技术的分布式高频地波雷达 DOA 估计方法[J]. *西安电子科技大学学报(自然科学版)*, 2014, 41(2): 69-77.
Wang Zan and Chen Bo-xiao. Distributed high-frequency surface wave radar DOA estimation using compressed

- sensing[J]. *Journal of Xidian University*, 2014, 41(2): 69-77.
- [12] 李洪涛, 贺亚鹏, 肖瑶, 等. 基于压缩感知的单通道鲁棒自适应波束形成算法[J]. *电子与信息学报*, 2012, 34(10): 2421-2426.
- Li Hong-tao, He Ya-peng, Xiao Yao, *et al.*. Compressive sensing based single-channel robust adaptive beamforming algorithm[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2012, 34(10): 2421-2426.
- [13] Ji Shi-hao, Xue Ya, and Carin L. Bayesian compressive sensing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(6): 2346-2356.
- [14] Babacan S D, Molina R, and Katsaggelos A K. Bayesian compressive sensing using Laplace priors[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2010, 19(1): 53-63.
- [15] Wang Ying-gui, Yang Le, Tang Liang, *et al.*. Enhanced multi-task compressive sensing using Laplace priors and MDL-based task classification[J]. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2013, (Article ID: 2013-160): 1-17.
- [16] Carlin M, Rocca P, Oliveri G, *et al.*. Direction-of-arrival estimation through Bayesian compressive sensing strategies [J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2013, 61(7): 3828-3838.
- 王 军: 男, 1976 年生, 博士生, 讲师, 研究方向为压缩感知雷达信号处理、雷达对抗理论.
- 闫锋刚: 男, 1982 年生, 博士, 讲师, 研究方向为雷达对抗、阵列信号处理.
- 马文洁: 女, 1988 年生, 硕士生, 研究方向为阵列信号处理.
- 乔晓林: 男, 1948 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向为新体制雷达技术、极化信号处理.