评估交换超立方体网络可靠性的一种新方法

梁家荣*[①]　白　杨[①]　王新阳[②]

[①](广西大学计算机与电子信息学院　南宁　530004)
[②](华南理工大学计算机科学与工程学院　广州　510006)

摘　要：交换超立方体互连网络 $(\mathrm{EH}(s,t))$ 作为大规模处理器系统网络模型的重要候选之一，其可靠性问题一直为人们所关注。该文利用额外连通度作为评价可靠性的重要度量，对交换超立方体互连网络的可靠性进行分析，得到了交换超立方体网络的 2-额外点连通度 $(k_2(\mathrm{EH}(s,t)))$ 和 2-额外边连通度 $(\lambda_2(\mathrm{EH}(s,t)))$，证明了当 $t \geq s \geq 2$ 时，$k_2(\mathrm{EH}(s,t)) = 3s-2$；当 $t \geq s \geq 3$ 时，$\lambda_2(\mathrm{EH}(s,t)) = 3s-1$。分析说明了对交换超立方体互连网络的可靠性评价时，2-额外连通度较之传统连通度更具有优势性。

关键词：互连网络；交换超立方体；可靠性；额外连通度

中图分类号：TP393　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-5896(2015)03-0693-07

DOI: 10.11999/JEIT140557

A New Method Used for Evaluating Reliability of the Exchanged Hypercube Network

Liang Jia-rong[①]　Bai Yang[①]　Wang Xin-yang[②]

[①](*School of Computer and Electronic Information*, *Guangxi University*, *Nanning* 530004, *China*)
[②](*School of Computer Science & Engineering*, *South China University of Technology*, *Guangzhou* 510006, *China*)

Abstract: Reliability problems on Exchanged Hypercube interconnection network $(\mathrm{EH}(s,t))$ regard as one of important candidates of network models in large-scale processor systems are concerned by people. The extra connectivity, which is an important measure in evaluating the reliability, is utilized to analyze the reliability of exchanged hypercube interconnection network. Then the 2-extra vertex connectivity $(k_2(\mathrm{EH}(s,t)))$ and 2-extra edge connectivity $(\lambda_2(\mathrm{EH}(s,t)))$ of exchanged hypercube interconnection network are obtained. The conclusions are that $k_2(\mathrm{EH}(s,t)) = 3s-2$ for $t \geq s \geq 2$; and $\lambda_2(\mathrm{EH}(s,t)) = 3s-1$ for $t \geq s \geq 3$. The analysis shows that the 2-extra connectivity is much superior to the traditional connectivity in evaluating the reliability of exchanged hypercube interconnection network.

Key words: Interconnection network; Exchanged hypercube; Reliability; Extra connectivity

1　引言

互连网络的可靠性主要是指在网络的部分节点、部分链路出现故障时，剩余子网是否仍能保持正常通信的能力。随着网络规模的不断扩大，网络中出现故障节点、故障链路的情况不可避免，因此网络的可靠性问题就成为不可回避的研究课题。其中，点连通度和边连通度是衡量网络可靠性的两个重要参数，它们表明了一个网络能容忍同时故障的最大节点数和最大链路数。但点连通度和边连通度在衡量网络可靠性方面也存在不足的地方：它们都默认一个节点或一条链路的所有邻居节点(或邻居链路)可能同时出现故障，而这种情况在实际的网络中几乎不可能存在，例如在一个具有 2^n 个节点的正则度为 n 的规则互连网络中，一个节点的所有邻居点同时故障的概率是 $2^n / C_{2^n}^n < 10^{-6}$ (当 $n \geq 6$ 时)，这种概率的事件几乎不可能发生，因此用点连通度和边连通度研究互连网络的可靠性不切实际。

为了解决这一问题，Haray 在传统连通度的基础上加入一些限制条件，提出了条件连通度[1]的概念。后来，Fabrega 和 Fiol 将这一限制条件进一步细化提出了额外连通度的概念[2,3]。额外连通度一经提出便引起众多学者的高度关注，并获得众多研究成果[4−10]。文献[4]研究了超立方体[11]的 2-额外连通度；文献[5]将超立方体的额外连通度精确到了 h 阶，这极大提升了超立方体网络的可靠性精度；文献[6]

2014-04-28 收到，2014-07-14 改回
国家自然科学基金(61363002)资助课题
*通信作者：梁家荣　gxuliangjr@163.com

从网络中不存在孤立节点、孤立链路的角度分别研究了折叠超立方体网络[12]的 2-额外点连通度和 2-额外边连通度；文献[9]研究了一类特殊正则网络的 2-额外连通度；文献[10]则将该类特殊正则网络的可靠性精度提升到 h 阶，证明了当 $0 \le h \le n-4$ 时，n 维一一对应连接(Bijection Connected, BC)网络[13]的 h-额外连通度是 $n(h+1)-(h(h+3))/2$，这为进一步研究更大规模的具有失效节点的BC 互连网络的可靠性提供了支持。

在众多互连网络结构中，超立方体是最具吸引力的网络之一，但它并非各方面性质最好的。针对超立方体的一些缺陷，不少学者提出了很多超立方体的变种[12,14–17]。作为其中最重要的网络之一，交换超立方体[17]不仅保持了超立方体大量的优秀属性，并且拥有比超立方体更好的属性，如其边数几乎是超立方体边数的一半。目前，关于交换超立方体互连网络的研究已经有很多成果[18–21]，其中可靠性问题备受人们关注。文献[18]证明了交换超立方体的点连通度和边连通度均为 $s+1$；在文献[19]中，Ma 等人从网络中不存在孤立节点的角度证明了交换超立方体网络的超点连通度和超边连通度均为 $2s$，这将交换超立方体网络的可靠性的精度提升了近 2 倍。尽管如此，但上述参数仍有一定缺陷，例如当 n 很大时，交换超立方体的连通度 $s+1$ 和超连通度 $2s$ 与节点总数 2^{s+t+1} 的比值均非常小，以至于失去了实际意义，而额外连通度在一定程度上克服了这一缺陷。因此用额外连通度来研究交换超立方体的可靠性具有较高的学术意义和应用价值。本文主要在传统连通度和超连通度的基础上，深入剖析了交换超立方体网络的 2-额外点连通度和 2-额外边连通度，证明了当 $t \ge s \ge 2$ 时，$k_2(\mathrm{EH}(s,t))=3s-2$；当 $t \ge s \ge 3$ 时，$\lambda_2(\mathrm{EH}(s,t))=3s-1$。最后，分析说明了在评价交换超立方体互连网络的可靠性时，2-额外连通度比传统连通度更精确、更符合实际情况。

2 预备知识

本文中没有定义的理论术语与符号描述，本文将参照文献[22]中的相关定义。在无向图 G 中，$V(G)$，$E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集。对于图 G 中的任意的集合 F，令 $G-F$ 表示图 G 在移除了 F 中所有元素之后所形成的子图。$|S|$ 表示集合 S 的基。$(u,v)\in E(G)$ 表示 G 中任意一条边。$N_G(u)$ 和 $E_G(u)$ 分别表示顶点 u 的邻居结点集和邻居边集，且 $N_G(u)=\{v\in V(G) \mid \forall (u,v)\in E(G)\}$，$E_G(u)=\{(u,v)\in E(G) \mid \forall v\in V(G)\}$。$N_G(\mathrm{P})$ 和 $E_G(\mathrm{P})$ 分别表示路径 P 在图 G 中的邻居结点集和邻居边集，且 $N_G(\mathrm{P})=(\bigcup_{\forall u\in V(\mathrm{P})} N_G(u))-V(\mathrm{P})$，$E_G(\mathrm{P})=(\bigcup_{u\in V(\mathrm{P})} \cdot E_G(u))-E(\mathrm{P})$。

定义 1[17] 交换超立方体被定义为一个无向图 $\mathrm{EH}(s,t)=(V,E)(s\ge 1,t\ge 1)$。顶点集 $V=\{a_{s-1}\cdots a_0 b_{t-1}\cdots b_0 c \mid a_i,b_j\in\{0,1\}且 i\in[0,s), j\in[0,t)\}$。该类超立方体包含 3 种类型的边 E_1，E_2 和 E_3，描述为

$$E_1=\{(v_1,v_2)\in V\times V \mid v_1[s+t:1]=v_2[s+t:1],\ v_1[0]\ne v_2[0]\}$$

$$E_2=\{(v_1,v_2)\in V\times V \mid v_1[t:1]=v_2[t:1], H(v_1[s+t:t+1],v_2[s+t:t+1])=1, v_1[0]=v_2[0]=0\}$$

$$E_3=\{(v_1,v_2)\in V\times V \mid v_1[s+t:t+1]=v_2[s+t:t+1], H(v_1[t:1],v_2[t:1])=1, v_1[0]=v_2[0]=1\}$$

其中 $v[x:y]$ 表示 v 的第 y 位与第 x 位之间的比特串，$H(v_1,v_2)$ 表示顶点 v_1,v_2 之间的海明距离。图 1 示出了两个交换超立方体 $\mathrm{EH}(1,1)$ 和 $\mathrm{EH}(1,2)$。

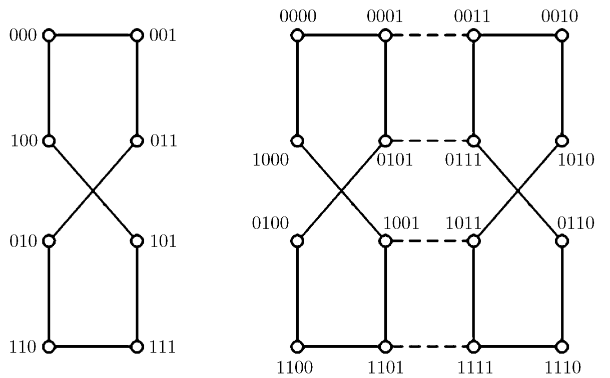
引理 1[17] $\mathrm{EH}(s,t)$ 同构于 $\mathrm{EH}(t,s)$。

引理 2[17] $\mathrm{EH}(s,t)$ 可分解为同构于 $\mathrm{EH}(s-1,t)$ 或 $\mathrm{EH}(s,t-1)$ 的两个子图。

根据引理 1，本文只讨论当 $s\le t$ 时 $\mathrm{EH}(s,t)$ 的情况，为了研究需要，将 $\mathrm{EH}(s,t)$ 分解成子图 L 和 R，其中

$$V(L)=\{0a_{s-2}\cdots a_0 b_{t-1}\cdots b_0 c \mid a_i,b_j,c\in\{0,1\}且 i\in[0,s), j\in[0,t)\}$$

$$V(R)=\{1a_{s-2}\cdots a_0 b_{t-1}\cdots b_0 c \mid a_i,b_j,c\in\{0,1\}且 i\in[0,s), j\in[0,t)\}$$



(a) EH(1,1) (b) EH(1,2)

图 1 两个交换超立方体 EH(1,1) 和 EH(1,2)

通过上面的分解我们得知 $L\cong \mathrm{EH}(s-1,t)$ 和 $R\cong \mathrm{EH}(s-1,t)$。$L$ 和 R 之间的边集被称为交叉边，记为 M_0。设 u 为 $\mathrm{EH}(s,t)$ 中任意一点，则 u_i 表示 u 的第 i 维邻居结点，u_{ij} 表示 u_i 的第 j 维邻居结点，显然 $u_{ii}=u$。令 $(u,u_i)\in E(\mathrm{EH}(s,t))$ 表示邻接于 u 的第 i 维边，记为 $e_i(u)$。在以下的讨论中，做如下规定：令 $e_{s+t}(u)=(u,u_{s+t})$ 表示 $\mathrm{EH}(s,t)$ 中的边，其中 u_{s+t} 与 u 的二进制串只在最左边的位不同。同理 $e_0(u)=(u,u_0)$ 表示 $\mathrm{EH}(s,t)$ 中的边，其中 u_0 与 u 的二进制串只在最右边的位不同。用 i,j,k 与 i',j',k' 分别表示二进制串中 a 与 b 的下标，其中 $0\le i,j,k\le s-2$，$0\le i',j',k'\le t-1$，$i\ne j,k$且$j\ne k$，$i'\ne j',k'$且$j'\ne k'$。

由定义 1 可知，$\mathrm{EH}(s,t)$ 是在超立方体的基础上通过系统地移除部分边而得到。因此，它是超立方体的一个生成子图，保留了其大量优越属性。

引理 3　在 $\mathrm{EH}(s,t)$ 中，任意两个不相邻顶点的公共邻居最多是 2。

定理 1　若 P 为 $\mathrm{EH}(s,t)$ 中任意一条长度为 2 的路，则 $N_{\mathrm{EH}(s,t)}(\mathrm{P})\ge 3s-2$。

证明　由定义 1 及引理 3，很容易证明 $N_{\mathrm{EH}(s,t)}(\mathrm{P})\ge 3s-2$。　证毕

定理 2　若 P 为 $\mathrm{EH}(s,t)$ 中任意一条长度为 2 的路，则 $E_{\mathrm{EH}(s,t)}(\mathrm{P})\ge 3s-1$。

证明　由定义 1 中边的特性，很容易证明 $E_{\mathrm{EH}(s,t)}(\mathrm{P})\ge 3s-1$。　证毕

3　交换超立方网络的额外连通度

3.1　删除部分结点(边)的 $\mathbf{EH}(s,t)$ 的连通性

在交换超立方网络的运行中，出现故障结点和失效链路是不可避免的，存在故障结点和失效链路的交换超立方网络仍能保持通信是网络分析中重要考虑的问题之一。下面本文考虑删除部分结点(边)后，交换超立方网络的连通性问题。

定理 3　对于任意的 $F\subseteq V(\mathrm{EH}(s,t))$ 且 $|F|\le 3s-3$，令 $F_l=F\cap V(L)$，$F_r=F\cap V(R)$。若在 $\mathrm{EH}(s,\ t)-F$ 中既无孤立顶点也无孤立边，则 $R-F_r$（或 $L-F_l$）中每一个顶点均与 $L-F_l$（或 $R-F_r$）中一个顶点连接。

证明　对于任意的顶点 $u_r\in V(R-F_r)$，$u_r=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0c$，分以下两种情形进行讨论。

(1) 令 $u_r=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0$。若 $u_l=0a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0\notin F$，则定理得证。否则 $u_l\in F$。如果存在 $u_{r0}=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 1\notin F$，$1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots \bar b_{i'}\cdots b_0 1\notin F$，$1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots \bar b_{i'}\cdots b_0 0\notin F$，且 $0a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots \bar b_{i'}\cdots b_0 0\notin F$，那么从 u_r 出发总存在一条路径使其连接至 $L-F_l$，定理得证。否则 $u_{r0}\in F$。如果 $u_{ri}=1a_{s-2}\cdots \bar a_i\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0\notin F$ 且 $u_{ri(s+t)}=0a_{s-2}\cdots \bar a_i\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0\notin F$，则定理得证。否则 u_{ri} 与 $u_{ri(s+t)}$（$0\le i\le s-2$）中至少一个顶点在 F 中，此时令 $A=\{u_{ri},u_{ri(s+t)}\mid 0\le i\le s-2\}\cap F$，则必有 $|A|\ge s-1$。

因为 $\mathrm{EH}(s,t)-F$ 中不存在孤立点，不妨令 $v_r=1a_{s-2}\cdots \bar a_i\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0$，如此 $(u_r,v_r)\in E(R-F_r)$。若 $v_l=0a_{s-2}\cdots \bar a_i\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0\notin F$，则定理得证。否则 $v_l\in F$。如果存在 $v_{r0}=1a_{s-2}\cdots \bar a_i\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 1\notin F$，$1a_{s-2}\cdots \bar a_i\cdots a_0b_{t-1}\cdots \bar b_{i'}\cdots b_0 1\notin F$，$1a_{s-2}\cdots \bar a_i\cdots a_0b_{t-1}\cdots \bar b_{i'}\cdots b_0 0\notin F$ 且 $0a_{s-2}\cdots \bar a_i\cdots a_0b_{t-1}\cdots \bar b_{i'}\cdots b_0 0\notin F$，那么从 u_r 出发经过 v_r，总存在一条路径使其连接至 $L-F_l$。否则 $v_{r0}\in F$。如果 $v_{rj}=1a_{s-2}\cdots \bar a_i\cdots \bar a_j\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0\notin F$ 且 $v_{rj(s+t)}=0a_{s-2}\cdots \bar a_i\cdots \bar a_j\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0\notin F$，则定理得证。否则其中之一必在 F 中，此时令 $B=\{v_{rj},v_{rj(s+t)}\mid 0\le j\le s-2$且$j\ne i\}\cap F$，则 $|B|\ge s-2$。

因为 $\mathrm{EH}(s,t)-F$ 中不存在孤立边，令 $w_r=1a_{s-2}\cdots \bar a_i\cdots \bar a_j\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0\notin F$，如此 $(v_r,w_r)\in E(\mathrm{EH}(s,t))$。从 w_r 出发可以构造通向 L 的路径为：

$w_r\to w_l=0a_{s-2}\cdots \bar a_i\cdots \bar a_j\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0$；或 $w_r\to (w_{r0}=1a_{s-2}\cdots \bar a_i\cdots \bar a_j\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 1)\to 1a_{s-2}\cdots \bar a_i\cdots \bar a_j\cdots a_0b_{t-1}\cdots \bar b_{i'}\cdots b_0 1\to 1a_{s-2}\cdots \bar a_i\cdots \bar a_j\cdots a_0b_{t-1}\cdots \bar b_{i'}\cdots b_0 0\to 0a_{s-2}\cdots \bar a_i\cdots \bar a_j\cdots a_0b_{t-1}\cdots \bar b_{i'}\cdots b_0 0$；或 $w_r\to (w_{rk}=1a_{s-2}\cdots \bar a_i\cdots \bar a_j\cdots \bar a_k\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0)\to (w_{rk(s+t)}=0a_{s-2}\cdots \bar a_i\cdots \bar a_j\cdots \bar a_k\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0)$ $(0\le k\le s-2,k\ne i,j)$。

令 $C=\{w_{rk},w_{rk(s+t)}\mid 0\le k\le s-2,k\ne i,j\}$，$D=\{u_l,v_l,w_l,u_{r0},v_{r0},w_{r0}\}$，其中 $w_l\in F$，$w_{r0}\in F$。由于 $|F-(A\cup B\cup D)|=|F|-|A|-|B|-|D|\le s-6$，而在 C 中有 $s-3$ 对顶点使 u_r 连接至 $L-F_l$，因此至少存在一个常数 $k(k\ne i,j)$ 使 u 与 $L-F_l$ 中一个顶点相连接，定理得证。

(2) 令 $u_r=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 1$。由于 $N(u_r)\cap V(L)=\varphi$ 若 $u'=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0\notin F$，$1a_{s-2}\cdots \bar a_i\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0\notin F$，$0a_{s-2}\cdots \bar a_i\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0\notin F$，则存在一条路径，使 u_r 连通至 $L-F_l$。否则 $u'\in F$。令 $A'=\{1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots \bar b_{i'}\cdots b_0 1,1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots \bar b_{i'}\cdots b_0 0,0a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots \bar b_{i'}\cdots b_0 0\mid 0\le i'\le t-1\}\cap F$，若 $|A'|<t$，则必定存在某一 i' 使 $1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots \bar b_{i'}\cdots b_0 1\notin F$，$1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots \bar b_{i'}\cdots b_0 0\notin F$，$0a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots \bar b_{i'}\cdots b_0 0\notin F$，如此 u_r 连通至 $L-F_l$。否则 $|A'|\ge t$。

因为 $\mathrm{EH}(s,t)-F$ 中不存在孤立点，不妨令 $v_r'=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots \bar b_{i'}\cdots b_0 1\notin F$，如此 $(u_r,v_r')\in$

$E(\mathrm{EH}(s,t)-F)$。若 $v'=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots b_0 0\notin F$，$1a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots b_0 0\notin F$，$0a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots b_0 0\notin F$，则 u_r 连通至 $L-F_l$。否则 $v'\in F$。令 $B'=\{1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots\bar{b}_{j'}\cdots b_0 1$，$1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots\bar{b}_{j'}\cdots b_0 0$，$0a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots\bar{b}_{j'}\cdots b_0 0\mid 0\le j'\le t-1, j'\ne i'\}\cap F$，若 $|B'|<t-1$，同理可得 u_r 连通至 $L-F_l$。否则，令 $|B'|\ge t-1$。

因为 $\mathrm{EH}(s,t)-F$ 中不存在孤立边，令 $w_r'=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots\overline{b}_{j'}\cdots b_0 1\notin F$，使 $(v_r',w_r')\in E(\mathrm{EH}(s,t)-F)$，则 u_r 通过 w_r' 可构造通向 $L-F_l$ 的路径为：

$w_r'\to 1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots\bar{b}_{j'}\cdots b_0 0\to 0a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots\bar{b}_{j'}\cdots b_0 0$；或 $w_r'\to 1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots\bar{b}_{j'}\cdots\bar{b}_{k'}\cdots b_0 1\to 1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots\bar{b}_{j'}\cdots\bar{b}_{k'}\cdots b_0 0\to 0a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots\bar{b}_{j'}\cdots\bar{b}_{k'}\cdots b_0 0$，其中 $0\le k'\le t-1$且 $k'\ne i',j'$。

令 $C'=\{u',v'\}$，由于 $|F-(A'\cup B'\cup C')|\le(3s-3)-t-(t-1)-2\le s-4$，而 u_r 通过 w_r' 可构造 $t-1$ 条路径且 $t-1\ge s-1>s-4$，如此至少存在一条路径使 u_r 与 $L-F_l$ 中的一个顶点相连接，定理得证。

定理 4 对于任意的 $F'\subseteq E(\mathrm{EH}(s,t))$ 且 $|F'|\le 3s-2$，令 $F_l'=F'\cap E(L)$，$F_r'=F'\cap E(R)$，$F_0'=F'\cap M_0$。若在 $\mathrm{EH}(s,t)-F'$ 中既无孤立顶点也无孤立边，则 $R-F_r'$(或 $L-F_l'$)中每一个顶点均与 $L-F_l'$(或 $R-F_r'$)中一个顶点相连。

证明 设 u_r 为 $R-F_r'$ 中任意一顶点，令 $u_r=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0$，则有以下两种情形。

(1) 令 $u_r=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0$。若 $e_{s+t}(u_r)=(u_l,u_r)\notin F'$，则定理得证。否则 $e_{s+t}(u_r)\in F'$。若 $e_0(u_r)\notin F'$，$e_{i'}(u_{r0})\notin F'$，$e_{i'}(u_r)\notin F'$ 且 $e_{s+t}(u_{ri'})\notin F'$，则存在一条路径使 u_r 连通至 $L-F_l'$，定理得证。否则 $e_0(u_r)\in F'$。令 $A=\{e_i(u_r),e_{s+t}(u_{ri})\mid 0\le i\le s-2\}\cap F'$，若 $|A|<s-1$，则必定存在某一 i，使 $e_i(u_r)\notin F'$ 且 $e_{s+t}(u_{ri})\notin F'$，如此 u_r 必定与 $L-F_l'$ 中某一顶点相连接，定理得证。否则 $|A|\ge s-1$。

由于 $\mathrm{EH}(s,t)-F'$ 中无孤立顶点，如此存在某一 $e_i(u_r)\notin F'$ 使 $(u_r,u_{ri})\in E(\mathrm{EH}(s,t)-F')$。若 $e_{s+t}(u_{ri})\notin F'$，则定理得证。否则 $e_{s+t}(u_{ri})\in F'$。若 $e_0(u_{ri})\notin F'$，此时可以形成一条通向 $L-F_l'$ 的路径为：

$u_r\to u_{ri}\to 1a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 1\to 1a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots b_0 1\to 1a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots b_0 0\to 0a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots b_0 0$。

如此定理可证。否则 $e_0(u_{ri})\in F'$。令 $B=\{e_j(u_{ri}),e_{s+t}(u_{rij})\mid 0\le j\le s-2, j\ne i\}\cap F'$，若 $|B|<s-2$，则必定存在某一 j，使 $e_j(u_{ri})\notin F'$,$e_{s+t}(u_{rij})\notin F'$，$u_r$ 可通过一条路径连接至 $L-F_l'$，定理可证。否则 $|B|\ge s-2$。

由于 $\mathrm{EH}(s,t)-F'$ 中不存在孤立边，因此存在 $e_j(u_{ri})\notin F'$ 且 $j\ne i$，如此 u_r 经过 u_{rij} 至 $L-F_l'$ 可构造如下路径：

$e_{s+t}(u_{rij})$；

或 $u_{rij}\to 1a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots\bar{a}_j\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 1\to 1a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots\bar{a}_j\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots b_0 1\to 1a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots\bar{a}_j\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots b_0 0\to 0a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots\bar{a}_j\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots b_0 0$；

或 $e_k(u_{rij})\to e_{s+t}(u_{rijk})$，其中 $0\le k\le s-2$且 $k\ne i,j$。

令 $C=\{e_{s+t}(u_r),e_0(u_r),e_{s+t}(u_{ri}),e_0(u_{ri})\}$，因为 $|F'-A\cup B\cup C|=|F'|-|A|-|B|-|C|\le(3s-2)-(s-1)-(s-2)-4=s-3$，而 u_r 通过 u_{rij} 可构造 $(s-1)$ 条通向 $L-F_l'$ 的路径，如此至少存在一条路径使 u_r 与 $L-F_l'$ 中一个顶点相连，定理得证。

(2) 令 $u_r=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 1$。由于 $N(u_r)\cap V(L)=\varphi$，若 $e_0(u_r)\notin F'$，则此时存在一条路径 $u_r\to u_{r0}\to 0a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0$，定理得证。否则 $e_0(u_r)\in F'$。令 $A'=\{e_{i'}(u_r),e_0(u_{ri'}),e_{s+t}(u_{ri'0})\mid 0\le i'\le t-1\}\cap F'$，若 $|A'|<t$，则同理可得存在某一 i'，使 $e_{i'}(u_r)\notin F'$，$e_0(u_{ri'})\notin F'$，$e_{s+t}(u_{ri'0})\notin F'$，如此 u_r 可连接至 $L-F_l'$ 中一个顶点，定理可证。否则 $|A'|\ge t$。

因为 $\mathrm{EH}(s,t)-F'$ 不存在孤立点，如此存在某一 $e_{i'}(u_r)\notin F'$，使 $(u_r,u_{ri'})\in E(\mathrm{EH}(s,t)-F')$，若 $e_0(u_{ri'})\notin F'$，此时可以构造一条通向 $L-F_l'$ 的路径 $u_r\to u_{ri'}\to 1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots b_0 0\to 0a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots b_0 0$，则定理得证。否则 $e_0(u_{ri'})\in F'$。令 $B'=\{e_{j'}(u_{ri'}),e_0(u_{ri'j'}),e_{s+t}(u_{ri'j'0})\mid 0\le j'\le t-1,\ j'\ne i'\}\cap F'$，当 $|B'|<t-1$ 时，同理可知存在一条通向 $L-F_l'$ 的路径，定理可证。否则 $|B'|\ge t-1$。

因为 $\mathrm{EH}(s,t)-F'$ 不存在孤立边，假定 $e_{j'}(u_{ri'})\notin F'$，同理通过 $u_{ri'j'}$ 可构造通向 $L-F_l'$ 的路径为：

$u_{ri'j'}\to 1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots\bar{b}_{j'}\cdots b_0 0\to 0a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots\bar{b}_{j'}\cdots b_0 0$；或 $u_{ri'j'}\to 1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots\bar{b}_{j'}\cdots\bar{b}_{k'}\cdots b_0 1\to 1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots\bar{b}_{j'}\cdots\bar{b}_{k'}\cdots b_0 0\to 0a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots\bar{b}_{j'}\cdots\bar{b}_{k'}\cdots b_0 0$，其中 $0\le k'\le t-1$且$k'\ne i',j'$。

令 $C'=\{e_0(u_r),e_0(u_{ri'})\}$，由于 $|F'-A'\cup B'\cup C'|\le(3s-2)-t-(t-1)-2\le s-3$，而 u_r 通过 $u_{ri'j'}$ 可构造 $(t-1)$ 条通向 $L-F_l'$ 的路径，其中 $t\ge s$，因此至少存在一条路径使 u_r 与 $L-F_l'$ 中一个顶点相连，定理得证。

3.2 EH(s,t) 的 2-额外连通度

额外连通度是评价交换超立方网络可靠性的重要度量，依靠于 3.1 节的结论，下面给出交换超立方网络的 2-额外连通度的相关结果。

引理 4[19]　当 $s\le t$ 时，$k'(\mathrm{EH}(s,t))=\lambda'(\mathrm{EH}(s,t))=2s$。

定理 5　$k_2(\mathrm{EH}(s,t))=3s-2$，其中 $t\ge s\ge 2$。

证明　在 EH(s,t) 中任取一条长度为 2 的路径 P，由定理 1 有 $N_{\mathrm{EH}(s,t)}(\mathrm{P})\ge 3s-2$。很容易验证，$\mathrm{EH}(s,t)-N_{\mathrm{EH}(s,t)}(\mathrm{P})$ 既不包含孤立顶点，也不包含孤立边，如此 $N_{\mathrm{EH}(s,t)}(\mathrm{P})$ 为一点割集且 $k_2(\mathrm{EH}(s,t))\le 3s-2$。若要证明定理 5 成立，只需证明 $k_2(\mathrm{EH}(s,t))\ge 3s-2$，即证明对于任意的顶点集 $F\subseteq V(\mathrm{EH}(s,t))$，当 $|F|=3s-3$ 且不存在孤立顶点也不存在孤立边时，$\mathrm{EH}(s,t)-F$ 是连通的。令 $F_l=F\cap V(L)$，$F_r=F\cap V(R)$，由定理 3 可知，$R-F_r$ 中任意一顶点与 $L-F_l$ 中一顶点连通。如此，只需证明当 $|F|=3s-3$ 且在 $\mathrm{EH}(s,t)-F$ 不存在孤立顶点也不存在孤立边时，$L-F_l$ 是连通的即可。不失一般性，令 $|F_l|\le|F_r|$，则 $|F_l|\le(3s-3)/2<2s-2\ (s\ge 2)$。

若在 $L-F_l$ 中无孤立点，而 $|F_l|<2s-2=k'(L)$，则 $L-F_l$ 是连通的，定理得证。否则在 $L-F_l$ 中有孤立点，假设有两个孤立点，记为 x,y。由于 $|N_L(x)|,|N_L(y)|\ge(s-1)+1=s$，且在 L 中任意两个不相邻顶点之间的公共邻居最多为 2，故至少移出 $(2s-2)$ 个顶点才能得到两个孤立点，而 $|F_l|<2s-2$，如此在 L 中只存在一个孤立点，设为 u_l，即 $N_L(u_l)\subseteq F_l$ 且 $|N_L(u_l)|\ge s$。下面证明当 $|F|=3s-3$ 且在 $\mathrm{EH}(s,t)-F$ 不存在孤立顶点也不存在孤立边时，u_l 与 $L-F_l\cup\{u_l\}$ 是连通的。

若 $u_l=0a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 1$ 时，由于 $N(u_l)\cap V(R)=\varphi$，则 u_l 在 $\mathrm{EH}(s,t)-F$ 中为一孤立点，这与 $\mathrm{EH}(s,t)-F$ 不存在孤立顶点相矛盾，此时 u_l 只能取下面的值，即 $u_l=0a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0$。

因为在 $\mathrm{EH}(s,t)-F$ 中无孤立点，故存在 $u_r=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0\notin F$，如此 $(u_l,u_r)\in E(\mathrm{EH}(s,t)-F)$。若 $u_{r0}=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 1\notin F$，$1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots b_0 1\notin F$，$1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots b_0 0\notin F$，$0a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots b_0 0\notin F$，则定理得证。否则 $u_{r0}\in F$。若 $u_{ri}=1a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0\notin F$ 且 $u_{ri(s+t)}=0a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0\notin F$，则定理得证。否则令 $A=\{u_{ri},u_{ri(s+t)}\mid 0\le i\le s-2\}\cap F$，则 $|A|\ge s-1$。

因为在 $\mathrm{EH}(s,t)-F$ 中无孤立边，如此存在一个 $u_{ri}\notin F$，使 $(u_r,u_{ri})\in E(\mathrm{EH}(s,t)-F)$，则 u_l 通过 u_{ri} 构造通向 $L-u_l$ 的路径为：

$u_{ri}\to 1a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 1\to 1a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots b_0 1\to 1a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots b_0 0\to 0a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots b_0 0$；或 $u_{ri}\to 1a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots\bar{a}_j\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0\to 0a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots\bar{a}_j\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0$，其中 $0\le j\le s-2$ 且 $j\ne i$。

由于 $|F-N_L(u_l)\cup A\cup\{u_{r0}\}|\le(3s-3)-s-(s-1)-1=s-3$ 且 u_l 通过 u_{ri} 可构造 $(s-2)+1=s-1$ 条通向 $L-u_l$ 的路径，故至少存在一条路径使 u_l 与 $L-F_l\cup\{u_l\}$ 连通，定理得证。

引理 5[22]　对任意的图 G，都有 $k(G)\le\lambda(G)\le\delta(G)$。

引理 6[18]　当 $s\le t$ 时，$k(\mathrm{EH}(s,t))=\lambda(\mathrm{EH}(s,t))=s+1$。

定理 6　$\lambda_2(\mathrm{EH}(s,t))=3s-1$，其中 $t\ge s\ge 3$。

证明　在 EH(s,t) 中任取一条长度为 2 的路径 P，根据定理 2 有 $|E_{\mathrm{EH}(s,t)}(\mathrm{P})|\ge 3s-1$。由于 $\mathrm{EH}(s,t)-E_{\mathrm{EH}(s,t)}(\mathrm{P})$ 既不包含孤立顶点也不包含孤立边，根据 λ_2 的定义，有 $\lambda_2(\mathrm{EH}(s,t))\le 3s-1$。如此，只需证明 $\lambda_2(\mathrm{EH}(s,t))\ge 3s-1$，即证明对于任意的边集 $F'\subseteq E(\mathrm{EH}(s,t))$，若 $|F'|=3s-2$ 且既无孤立顶点也无孤立边时，$\mathrm{EH}(s,t)-F'$ 为连通的。令 $F_l'=F\cap E(L)$，$F_r'=F\cap E(R)$，$F_{M_0}'=F\cap M_0$。由定理 4 可知，$R-F_r'$ 中每个顶点至少与 $L-F_l'$ 中一个顶点相连接，故只需证明当 $|F'|=3s-2$ 且 $\mathrm{EH}(s,t)-F'$ 既无孤立顶点也无孤立边时，$L-F_l'$ 是连通的即可。由于 $|F'|=3s-2<4(s-1)\ (s\ge 3)$，故 F_l',F_r' 与 F_{M_0}' 中至少两个小于 $2(s-1)$，不妨设 $|F_l'|<2(s-1)$。若 $L-F_l'$ 中无孤立点，且 $|F_l'|<2(s-1)=\lambda'(L)$，如此 $L-F_l'$ 为连通的，定理得证。否则 $L-F_l'$ 存在孤立点。同理定理 5 可得，$L-F_l'$ 中没有两个孤立点，只能有一个孤立点，记为 u_l，此时有 $E_L(u_l)\subseteq F_l'$ 且 $|E_L(u_l)|\ge s$。由于 $\lambda(L-u_l)\ge k(L-u_l)\ge s-1$，而 $|E(L-u_l)\cap F_l'|\le|F_l'|-|E_L(u_l)|<s-2<s-1$，如此 $L-F_l'\cup\{u_l\}$ 为连通的。下面只需证明当 $|F'|=3s-2$ 且在 $\mathrm{EH}(s,t)-F'$ 中既不包含孤立点也不包含孤立边时，u_l 与 $L-F_l'\cup\{u_l\}$ 连通即可。

若 $u_l=0a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 1$，由于 u_l 在 $L-F_l'$ 中为孤立点且 $N(u_l)\cap V(R)=\varphi$，这与 $\mathrm{E}(\mathrm{EH}(s,t)-F')$ 中无孤立顶点相矛盾，如此 u_l 只能为下面值，即 $u_l=0a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0$。

由于 $\mathrm{EH}(s,t)-F'$ 中无孤立点，如此 $e_{s+t}(u_l)\notin F'$，使 $(u_l,u_r)\in E(\mathrm{EH}(s,t)-F')$，其中 $u_{s+t}=u_r$。若 $e_0(u_r)\notin F'$，则 u_l 可通过下面路径连接至 $L-F_l'\cup\{u_l\}$：

$u_l \to u_r \to 1a_{s-2}\cdots a_0 b_{t-1}\cdots b_0 1 \to 1a_{s-2}\cdots a_0 b_{t-1}\cdots \bar{b}_{i'}\cdots b_0 1 \to 1a_{s-2}\cdots a_0 b_{t-1}\cdots \bar{b}_{i'}\cdots b_0 0 \to 0a_{s-2}\cdots a_0 b_{t-1}\cdots \bar{b}_{i'}\cdots b_0 0$ 。

如此，则定理成立。否则 $e_0(u_r) \in F'$ ，令 $A' = \{e_i(u_r), e_{s+t}(u_{ri}) \mid 0 \le i \le s-2\} \cap F'$ ，则 $|A'| \ge s-1$ 。

由于 $\mathrm{EH}(s,t) - F'$ 中无孤立边，则存在某个 i ，使 $e_i(u_r) \notin F'$ ，如此 $(u_r, u_{ri}) \in E(\mathrm{EH}(s,t) - F')$ ，则从 u_l 出发经过 u_{ri} 可构造通向 $L - u_l$ 的路径为：

$u_l \to u_r \to u_{ri} \to 1a_{s-2}\cdots \bar{a}_i \cdots a_0 b_{t-1}\cdots b_0 1 \to 1a_{s-2}\cdots \bar{a}_i \cdots a_0 b_{t-1}\cdots \bar{b}_{i'}\cdots b_0 1 \to 1a_{s-2}\cdots \bar{a}_i \cdots a_0 b_{t-1}\cdots \bar{b}_{i'}\cdots b_0 0 \to 0a_{s-2}\cdots \bar{a}_i \cdots a_0 b_{t-1}\cdots \bar{b}_{i'}\cdots b_0 0$ ；或 $u_l \to u_r \to u_{ri} \to 1a_{s-2}\cdots \bar{a}_i \cdots \bar{a}_j \cdots a_0 b_{t-1}\cdots b_0 0 \to 0a_{s-2}\cdots \bar{a}_i \cdots \bar{a}_j \cdots a_0 b_{t-1}\cdots b_0 0$ ，其中 $0 \le j \le s-2$ 且 $j \ne i$ 。

由于 $|F' - A' \cup E_L(u_l) \cup \{e_0(u_r)\}| = |F'| - |A'| - |E_L(u_l)| - 1 \le s-2$ ，而 u_l 通过 u_{ri} 连接至 $L - u_l$ 的路径有 $s-1$ 条，故至少存在一条路径使 u_l 连接至 $L - F_l' \cup \{u_l\}$ ，定理得证。

4 EH(s,t) 的 2-额外连通度与传统连通度比较

综上所述，当 $t \ge s \ge 2$ 时，EH(s,t) 的 2-额外点连通度是 $3s-2$ ；当 $t \ge s \ge 3$ 时， EH(s,t) 的 2-额外边连通度是 $3s-1$ 。而当 $t \ge s$ 时，EH(s,t) 的传统点连通度和传统边连通度均是 $s+1$ 。由此可以看出，2-额外连通度几乎是传统连通度的 3 倍，这使得交换超立方体网络可靠性的量度更加精确，因此 2-额外连通度比传统连通度更适合评价大规模交换超立方体网络的可靠性。另一方面，传统连通度假定交换超立方体网络的任一节点或任一链路的所有邻居节点(或邻居链路)都可能同时故障，这种情况发生的概率是 $2^n / C_{2^n}^n < 10^{-6}$ (当 $n \ge 6$ 时)，不切实际。而 2-额外连通度假定交换超立方体网络的任一节点或任一链路的部分邻居节点(或邻居链路)不能同时故障，这更符合实际情况，因此在评价交换超立方体互连网络的可靠性时，2-额外连通度比传统连通度更具优势性。

5 结束语

本文在交换超立方体网络传统连通度和超连通度的基础上深入研究，进一步证明了 2-额外点连通度和 2-额外边连通度：当 $t \ge s \ge 2$ 时，$k_2(\mathrm{EH}(s,t)) = 3s-2$ ；当 $t \ge s \ge 3$ 时，$\lambda_2(\mathrm{EH}(s,t)) = 3s-1$ 。也就是说，当 $t \ge s \ge 2$ (或 $t \ge s \ge 3$)时，交换超立方体至少删除 $3s-2$ 个顶点(或 $3s-1$ 条边)，才能得到既不包含孤立顶点也不包含孤立边的非连通图。该结果的得出进一步扩展了交换超立方体网络的可靠性研究，同时对交换超立方体网络的可靠性提供了更精确的量度。

参 考 文 献

[1] Harary F. Conditional connectivity[J]. *Networks*, 1983, 13(3): 347–357.

[2] Fàbrega J and Fiol M A. Extraconnectivity of graphs with large girth[J]. *Discrete Mathematics*, 1994, 127(1): 163–170.

[3] Fàbrega J and Fiol M A. On the extraconnectivity of graphs[J]. *Discrete Mathematics*, 1996, 155(1): 49–57.

[4] Xu J M and Zhu Q. On restricted connectivity and extra-connectivity of hypercubes and folded hypercubes[J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2005, 10(2): 203–207.

[5] Yang W and Meng J. Extraconnectivity of hypercubes[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2009, 22(6): 887–891.

[6] Zhu Q, Xu J M, Hou X, *et al.*. On reliability of the folded hypercubes[J]. *Information Sciences*, 2007, 177(8): 1782–1788.

[7] Hong W S and Hsieh S Y. Extra edge connectivity of hypercube-like networks[J]. *International Journal of Parallel, Emergent and Distributed Systems*, 2013, 28(2): 123–133.

[8] Li H and Yang W. Bounding the size of the subgraph induced by m vertices and extra edge-connectivity of hypercubes[J]. *Discrete Applied Mathematics*, 2013, 161(16/17): 2753–2757.

[9] Xu J M, Zhu Q, and Xu M. Fault-tolerant analysis of a class of networks[J]. *Information Processing Letters*, 2007, 103(6): 222–226.

[10] Zhu Q, Wang X K, and Cheng G. Reliability evaluation of BC networks[J]. *IEEE Transactions on Computers*, 2013, 62(11): 2337–2340.

[11] Saad Y and Schultz M H. Topological properties of hypercubes[J]. *IEEE Transactions on Computers*, 1988, 37(7): 867–872.

[12] El-Amawy A and Latifi S. Properties and performance of folded hypercubes[J]. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 1991, 2(1): 31–42.

[13] Fan J X. BC interconnection networks and their properties[J]. *Chinese Journal of Computers-Chinese Edition*, 2003, 26(1): 84–90.

[14] Cheng B, Fan J, Jia X, *et al.*. Parallel construction of independent spanning trees and an application in diagnosis on Möbius cubes[J]. *Journal of Supercomputing*, 2013, 65(3): 1279–1301.

[15] Chen J C, Lai C J, Tsai C H, *et al.*. A lower bound on the number of Hamiltonian cycles through a prescribed edge in a

crossed cube[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, 219(19): 9885–9892.

[16] Yang X F, Evans D J, and Megson G M. The locally twisted cubes[J]. *International Journal of Computer Mathematics*, 2005, 82(4): 401–413.

[17] Loh P K K, Hsu W J, and Pan Y. The exchanged hypercube[J]. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 2005, 16(9): 866-874.

[18] Ma M J. The connectivity of exchanged hypercubes[J]. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, 2010, 2(2): 213–220.

[19] Ma M J and Zhu L Y. The super connectivity of exchanged hypercubes[J]. *Information Processing Letters*, 2011, 111(8): 360–364.

[20] Li X J and Xu J M. Generalized measures of fault tolerance in exchanged hypercubes[J]. *Information Processing Letters*, 2013, 113(14): 533–537.

[21] Klavžar S and Ma M J. The domination number of exchanged hypercubes[J]. *Information Processing Letters*, 2014, 114(4): 159–162.

[22] Bondy J A and Murty U S R. Graph Theory with Applications[M]. London: MacMillan, 1976: 10–24.

梁家荣：　男，1966 年生，教授，博士，博士生导师，研究方向为网络与并行计算、人工智能.

白　杨：　男，1987 年生，硕士生，研究方向为网络与并行计算.

王新阳：　男，1985 年生，博士生，研究方向为网络与并行计算、云计算、大数据.