OFDM 系统双选择性慢衰落信道的压缩感知估计

叶新荣*①② 朱卫平① 张爱清①② 孟庆民①
①(南京邮电大学信号处理与传输研究院 南京 210003)
②(安徽师范大学物理与电子信息学院 芜湖 241000)

摘 要：为了增强压缩感知框架里 $S\ell_0$ (Smoothed ℓ_0-norm)重构算法的抗噪性能，该文在其目标函数里添加一个误差容允项，并提出了一种改进型重构算法 $\ell_2-S\ell_0$ (Smoothed ℓ_0-norm regularized least-square)。另外通过对多径信道的时延和多普勒频移参数构成的时频 2 维有界区域进行量化，将 OFDM 时频双选择性慢衰落信道估计问题建模为压缩感知理论中的稀疏信号重构问题，提出了一种采用 $\ell_2-S\ell_0$ 估计信道时频参数的方法。仿真结果表明在相同的噪声环境里，$\ell_2-S\ell_0$ 的重构性能优于 $S\ell_0$ 10 dB 左右；运用 $\ell_2-S\ell_0$ 的信道估计方法可获得接近于理想最小二乘法的估计性能，且该方法在低信噪比的场景里也能获得较高的估计准确度。

关键词：压缩感知；OFDM；慢时变信道；信道估计
中图分类号：TN92 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-5896(2015)01-0169-06
DOI: 10.11999/JEIT140247

Compressed Sensing Based on Doubly-selective Slow-fading Channel Estimation in OFDM Systems

Ye Xin-rong①② Zhu Wei-ping① Zhang Ai-qing①② Meng Qing-min①
①(*Institute of Signal Processing and Transmission, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing* 210003, *China*)
②(*The College of Physics and Electronic Information, Anhui Normal University, Wuhu* 241000, *China*)

Abstract: In order to improve the reconstruction accuracy of smoothed ℓ_0-norm ($S\ell_0$) algorithm in the presence of noise, a modified algorithm named smoothed ℓ_0-norm regularized least-square ($\ell_2-S\ell_0$) is proposed in this paper, which permits a small perturbation. Further, through placing a finite grid in the planar time-frequency bounded region, the problem of doubly-selective slow-fading channel estimation in OFDM system is modeled as the problem of sparse signal reconstruction in compressed sensing framework, and then the $\ell_2-S\ell_0$ algorithm is applied to reconstruct the channel parameters. A number of computer-simulation-based experiments show that reconstruction accuracy of the $\ell_2-S\ell_0$ algorithm is improved by approximately 10 dB as compared with the $S\ell_0$ algorithm in the presence of noise. The performance of the proposed doubly-selective slow-fading channel estimation method using $\ell_2-S\ell_0$ algorithm is nearly close to that of the ideal Least Square (ideal-LS) method. Moreover, the proposed method has higher estimation uccuracy well in the case of low SNR.

Key words: Compressed sensing; OFDM; Slow time-varying channel; Channel estimation

1 引言

压缩感知技术[1,2]能依据观测信号 $\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^M$ 及线性模型 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n}$ 高概率地重构出稀疏信号 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^N$。这里的 $\boldsymbol{\Phi}\in\mathbb{C}^{M\times N}$ 表示观测矩阵，且通常 $M\ll N$，即高维信号 $\boldsymbol{x}$ 经过线性观测被降维(压缩)成 $\boldsymbol{y}$； $\boldsymbol{n}$ 表示噪声。该技术将传统信号处理过程中的采样和压缩合并成一步实现，有利于提高系统的效率，因而压缩感知理论及其应用是近年来学术界的热点课题[3,4]。信号的稀疏表示、重构算法及观测矩阵的设计是压缩感知技术的 3 个主要组成部分。近年来国内外的学者已提出了很多优秀的重构算法，且总体上可分为 3 类。其一是贪婪追踪类算法，正交匹配追踪(Orthogonal Matching Pursuit, OMP[5])是此类算法的典型代表。其基本思想是先通过观测矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 中与残差信号相关度最大的列向量估计出 $\boldsymbol{x}$ 非零元素的位置，接着通过最小二乘准则计算出非零元素的值，然后更新残差信号，并继续迭

2014-02-26 收到，2014-05-19 改回
国家自然科学基金(61372122)和江苏省普通高校研究生科研创新计划 (CXZZ11-0397)资助课题
*通信作者：叶新荣 2010010126@njupt.edu.cn

代以上过程，直到残差信号能量小于阈值为止。凸松弛方法[6]是第2类有效的重构算法，其用一个凸函数(ℓ_1范数)代替目标函数里的ℓ_0范数，然后通过最优化的方法求解该凸函数的极值问题。由于$\boldsymbol{x}$的ℓ_0范数不可微分，因而常用求极值的方法不能直接用于求解含ℓ_0范数的信号重构问题。针对ℓ_0范数不可微分问题，文献[7]设计了一个近似ℓ_0范数的连续可微函数。文献[7]和文献[8]将该类方法称为光滑近似ℓ_0范数法(Smoothed ℓ_0-norm, $S\ell_0$)。$S\ell_0$算法不必将信号稀疏度及噪声方差作为输入参数，并具有运行速度快的优点，但其抗噪能力不强，且运用一个常数值作为最速下降方向的步长因子，而在实际应用场景里很难合理地设置该常数值。因此，本文在$S\ell_0$目标函数里添加了一个误差容允项，以此来提高算法的抗干扰能力，且采用共轭梯度法代替最速下降法求解建立的目标优化问题，避免了需要设置步长因子的限制，并将该算法称为$S\ell_0$正则化的最小二乘法(Smoothed ℓ_0-norm regularized least-square, $\ell_2-S\ell_0$)。

压缩感知技术能凭借少量的观测信号高概率地重构出原始信号，因此相对于传统信道估计方法而言，运用压缩感知技术的信道估计方法能有效地减少导频符号数，从而提高了系统的频谱利用率。文献[9]较为全面地研究了由不同衰落信道及不同系统模型组合成的多种场景里的压缩信道估计问题，但缺少研究 OFDM 系统时变信道这种情形。针对 OFDM 系统压缩信道感知方法的最优导频设计问题，文献[10]提出了一种迭代搜索局部最优的导频子载波方法，并将该方法推广到MIMO-OFDM系统[11]，但讨论的均是频率选择性非时变衰落信道。文献[12]联合离散傅里叶变换基和离散椭球序列(Discrete Prolate Spheroidal Sequences, DPSS)来稀疏表示OFDM系统时变信道，并提出一种迭代优化该基的算法。文献[13]针对MIMO-OFDM系统的信道矩阵从频-时域变换到时延-多普勒域过程存在谱泄漏问题，提出了一种增强信道稀疏表示的时域加窗方法。与文献[12,13]的信道稀疏表示思想不同，文献[14]通过对时频2维有界区域进行量化，并将多径信道每条路径的时延和多普勒参数对用一个量化点来近似，由于信道的多径数远远少于量化点的个数，从而实现了无线信道的稀疏表示。另外在此基础上，文献[14,15]分别研究了单载波单天线和多天线系统压缩信道感知方法的最佳导频信号设计问题，但并未涉及OFDM系统。本文借鉴文献[14]的信道稀疏表示思想，将OFDM系统慢时变信道估计问题建模为压缩感知框架里的信号重构问题，并运用$\ell_2-S\ell_0$算法重构信道的参数，另外通过仿真实验检验了该信道估计方法的可行性。

2 $\ell_2-S\ell_0$重构算法

压缩感知框架里的信号重构问题可表示为

$$\min_{\boldsymbol{x}} \|\boldsymbol{x}\|_0, \quad \text{s.t. } \boldsymbol{y}=\boldsymbol{\Phi x}+\boldsymbol{n} \tag{1}$$

其中$\|\boldsymbol{x}\|_0$称为ℓ_0范数，即计算向量$\boldsymbol{x}$中非零元素的数目。针对ℓ_0范数不可微分问题，$S\ell_0$算法采用连续可微函数$\mathrm{F}_\sigma(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{N}\mathrm{f}_\sigma(x_i)$近似$\ell_0$范数，其中$\mathrm{f}_\sigma(x_i)=1-\exp\left(-\dfrac{x_i^2}{2\sigma^2}\right)$，$\sigma$是一个决定$\mathrm{F}_\sigma(\boldsymbol{x})$光滑度和近似$\ell_0$范数程度的参数。通常$\sigma$越大，$\mathrm{F}_\sigma(\boldsymbol{x})$越光滑、局部极小值点越少，越易于找到其全局极小值点，但近似ℓ_0范数的程度越差，因而$S\ell_0$算法采用迭代的方式逐步减小σ，即$\sigma_i=r\sigma_{i-1}$(常数$0<r<1$)，并将$\mathrm{F}_{\sigma_{i-1}}(\boldsymbol{x})$极小值解$\boldsymbol{x}^*$作为最小化$\mathrm{F}_{\sigma_i}(\boldsymbol{x})$的初始解$\boldsymbol{x}_0$。以上步骤经过多次迭代之后，在目标参数$\sigma_J$求得的$\mathrm{F}_\sigma(\boldsymbol{x})$最小值解满足$\|\boldsymbol{x}\|_0$最小。

为了提高$S\ell_0$算法的抗噪声能力，$\ell_2-S\ell_0$算法借鉴$\ell_2-\ell_1$类型[16]重构方法的思想，在$S\ell_0$目标函数里加入一个误差容许项(或称数据匹配项)$\|\boldsymbol{\Phi x}-\boldsymbol{y}\|_2^2$，并采用一正则化参数$\lambda>0$来平衡数据匹配项和稀疏引入项$\mathrm{F}_\sigma(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{N}\mathrm{f}_\sigma(x_i)$，从而构建式(2)的目标优化函数：

$$\min_{\boldsymbol{x}} \mathrm{F}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\Phi x}-\boldsymbol{y}\|_2^2+\lambda \mathrm{F}_\sigma(\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

该目标函数$\mathrm{F}(\boldsymbol{x})$是可微的，且其梯度函数可表示为

$$\boldsymbol{g}=\nabla \mathrm{F}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Phi x}-\boldsymbol{y})+\boldsymbol{g}_\sigma \tag{3}$$

这里$\boldsymbol{g}_\sigma=[g_1,g_2,\cdots,g_N]^{\mathrm{T}}$， 其中$g_i=\lambda\dfrac{x_i}{\sigma^2}\exp\left(-\dfrac{x_i^2}{2\sigma^2}\right)$。

另外，$\mathrm{F}(\boldsymbol{x})$的 Hess 矩阵可表示为

$$\boldsymbol{H}=\nabla^2\mathrm{F}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}+\lambda\nabla^2\mathrm{F}_\sigma(\boldsymbol{x}) \tag{4}$$

其中$\nabla^2\mathrm{F}_\sigma(\boldsymbol{x})$表示$\mathrm{F}_\sigma(\boldsymbol{x})$的 Hess 矩阵，且其可计算为

$$\begin{aligned}\nabla^2\mathrm{F}_\sigma(\boldsymbol{x})&=\mathrm{diag}\{h_{11},h_{22},\cdots,h_{NN}\},\\ h_{ii}&=\left(\frac{1}{\sigma^2}-\frac{x_i^2}{\sigma^4}\right)\exp\left(-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}\right)\end{aligned} \tag{5}$$

这里采用共轭梯度法(Conjugate Gradient, CG)求解式(2)的优化问题，并将该算法简记为$\ell_2-S\ell_0$-CG。在其第k次迭代过程中，$\boldsymbol{x}_k$更新为

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{x}_k+\alpha_k\boldsymbol{d}_k,\ \ k=0,1,\cdots,P-1 \tag{6}$$

其中共轭方向$\boldsymbol{d}_k=\begin{cases}-\boldsymbol{g}_0, & k=0\\ -\boldsymbol{g}_k+\beta_{k-1}\boldsymbol{d}_{k-1}, & k=1,2,\cdots,P-1\end{cases}$，

这里 $\beta_{k-1}=\dfrac{\boldsymbol{g}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_k}{\boldsymbol{g}_{k-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_{k-1}}$，步长 $\alpha_k=\dfrac{\boldsymbol{g}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_k}{\boldsymbol{d}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{d}_k}$，$\boldsymbol{g}_k$ 和 $\boldsymbol{H}_k$ 可分别由式(3)和式(4)计算得到。

根据以上分析可将 $\ell_2-S\ell_0$-CG 算法描述如表 1。

表 1　$\ell_2-S\ell_0$-CG 重构算法的步骤

步骤 1　输入观测矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$，观测信号 $\boldsymbol{y}$，目标参数值 σ_{J}，正则化参数 λ，收缩因子 r 和迭代次数 P；

步骤 2　计算 $\hat{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{\Phi}^{\dagger}\boldsymbol{y}$，$\sigma=\max\limits_i\{|\hat{\boldsymbol{x}}(i)|\}$，并初始化 $\boldsymbol{x}_0=0$，这里 † 表示伪逆运算；

步骤 3　For　$k=0,1,\cdots,P-1$

(1)将 $\boldsymbol{x}_k$ 分别代入式(3)和式(4)计算 $\boldsymbol{g}_k$ 和 $\boldsymbol{H}_k$；

(2) 如果 $k=0$，设置 $\boldsymbol{d}_k=-\boldsymbol{g}_0$；否则计算

$$\boldsymbol{d}_k=-\boldsymbol{g}_k+\frac{\boldsymbol{g}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_k}{\boldsymbol{g}_{k-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_{k-1}}\boldsymbol{d}_{k-1}$$

(3)设置 $\alpha_k=\dfrac{\boldsymbol{g}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_k}{\boldsymbol{d}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{d}_k}$，并计算 $\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{x}_k+\alpha_k\boldsymbol{d}_k$；

步骤 4　计算 $\sigma=r\sigma$，如果 $\sigma>\sigma_{\mathrm{J}}$，设置 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}_P$ 并跳转到步骤 3；否则输出估计值 $\boldsymbol{x}_P$。

3　系统模型

考虑一个具有 N 个子载波的 OFDM 系统，并将添加循环前缀的发送信号记为

$$x(t)=\sum_{n=-N_{\mathrm{cp}}}^{N-1}x[(n)_N]g(t-nT_s) \tag{7}$$

其中循环前缀的长度为 N_{cp}，$(n)_N$ 表示数 n 模 N 运算，$g(t)$ 代表脉冲成形滤波器。则接收端收到的信号可表示为

$$y(t)=\sum_{q=1}^{Q}a[q]x\left(t-\tilde{\tau}[q]\right)e^{j2\pi\tilde{f}[q]t}+w(t) \tag{8}$$

这里无线信道的多径数目为 Q，第 q 条路径的衰落系数、时延和多谱勒频移分别为 $a[q]$，$\tilde{\tau}[q]$ 和 $\tilde{f}[q]$，$w(t)$ 指高斯噪声。对接收信号以 $1/T_{\mathrm{s}}$ 的速率进行采样，并将时延和多谱勒频移分别归一化为 $\tau[q]=\tilde{\tau}[q]/T_{\mathrm{s}}$ 和 $f[q]=\tilde{f}[q]T_{\mathrm{s}}$，则离散化的接收信号(不包括循环前缀)可表示为

$$\begin{aligned}y[k]&=\sum_{q=1}^{Q}a[q]e^{j2\pi f[q]k}x\left((k-\tau(q))T_s\right)+w[k]\\&=\sum_{n=-N_{\mathrm{cp}}}^{N-1}x\left[(n)_N\right]h[k;k-n]+w[k]\end{aligned} \tag{9}$$

这里 $k=0,1,\cdots,N-1$，$h[k;k-n]=\sum_{q=1}^{Q}a[q]\cdot e^{j2\pi f[q]k}g((k-n-\tau[q])T_{\mathrm{s}})$ 表示时变信道的脉冲响应，$\tau[q]\in(\tau_{\min},\tau_{\max})$，$N_{\mathrm{cp}}T_{\mathrm{s}}>\tau_{\max}$，$f[q]\in(-f_{\max}/2,f_{\max}/2)$。通常 $g(t)$ 具有因果性及有限的时长 T_{g}，若记 $L-1=\left\lceil\tau_{\max}+T_{\mathrm{g}}/T_{\mathrm{s}}\right\rceil$，则 $h[k;l]=0$，($l<0$ 或 $l>L-1$)。从而式(9)可等效为

$$y[k]=\sum_{l=0}^{L-1}x[(k-l)_N]h[k;l]+w[k] \tag{10}$$

假设系统满足如下两个条件：(1)循环前缀长度不小于信道长度，即 $N_{\mathrm{cp}}\geq L$；(2)收发端具有精确的符号同步，则矢量形式的时域接收信号(不包括循环前缀)可表示为

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}+\boldsymbol{w} \tag{11}$$

其中 $\boldsymbol{y}=(y[0],y[1],\cdots,y[N-1])^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^{N\times1}$ 和 $\boldsymbol{x}=(x[0],x[1],\cdots,x[N-1])^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^{N\times1}$ 分别表示接收和发送的时域信号，$\boldsymbol{X}=(X[0],X[1],\cdots,X[N-1])^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^{N\times1}$ 表示发送的频域信号。DFT 变换矩阵 $\boldsymbol{F}$ 的第 (k,n) 个元素 $\boldsymbol{F}_{k,n}=(1/\sqrt{N})e^{-j2\pi nk/N}$，信道脉冲响应矩阵 $\boldsymbol{H}\in\mathbb{C}^{N\times N}$ 的第 (i,j) 个元素 $\boldsymbol{H}_{i,j}=h[i;\mathrm{mod}(i-j,N)]$，$\boldsymbol{w}=(w[0],w[1],\cdots,w[N-1])^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^{N\times1}$ 表示时域噪声。$N\times NL$ 维矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 $(i,iL+j)$ 个元素 $\boldsymbol{A}_{i,j}=\boldsymbol{x}[(i-j)_N]$，($i=0,1,\cdots,N-1$，$j=0,1,\cdots,L-1$)，其余元素为零。$\boldsymbol{h}=(h[0;0],\cdots,h[0;L-1],h[1;0],\cdots,h[N-1;L-1])^{\mathrm{T}}$。

记 $NL\times Q$ 维矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的元素 $\boldsymbol{G}_{l+kL,q}=e^{j2\pi f[q]k}\cdot g((l-\tau[q])T_{\mathrm{s}})$，$\boldsymbol{a}=(a[1],a[2],\cdots,a[Q])^{\mathrm{T}}$，则可得

$$\boldsymbol{h}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{a} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{w} \tag{13}$$

4　信道估计的方法

若分别对时延 τ 和多谱勒频移 f 所在的区间 $(0,\tau_{\max})$ 和 $(-f_{\max}/2,f_{\max}/2)$ 进行 I_τ 和 I_f 次的均匀量化，则在 2 维有界区域 $(0,\tau_{\max})\times(-f_{\max}/2,f_{\max}/2)$ 可获得 $I=I_fI_\tau$ 个点 (τ_{i_τ},f_{i_f})，其下标 $i_\tau\in\{0,1,\cdots,I_\tau-1\}$，$i_f\in\{0,1,\cdots,I_f-1\}$。从而在这 I 个点中存在一个距离 $(\tau[q],f[q])$ 最近的点，将其记为 $(\tau_{i_\tau^{(q)}},f_{i_f^{(q)}})$，其中 $(\tau[q],f[q])$ 是由第 q 条路径的真实时延 $\tau[q]$ 和多谱勒频移 $f[q]$ 确定的点，下标 $i_\tau^{(q)}\in\{0,1,\cdots,I_\tau-1\}$，$i_f^{(q)}\in\{0,1,\cdots,I_f-1\}$。

令 $NL\times I_\tau I_f$ 维矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{G}}$ 的元素为 $\widetilde{G}[l+kL,i_f+i_\tau I_f]=e^{j2\pi kf_{i_f}}g((l-\tau_{i_\tau})T_{\mathrm{s}})$，其中 $l\in\{0,1,\cdots,L-1\}$；列向量 $\tilde{\boldsymbol{a}}$ 的元素为 $\tilde{a}\left[i_f+i_\tau I_f\right]=\sum_{q=1}^{Q}a[q]\delta\left(f_{i_f}-f_{i_f^{(q)}}\right)\delta\left(\tau_{i_\tau}-\tau_{i_\tau^{(q)}}\right)$，则向量 $\boldsymbol{h}$ 及接收信号可分别稀疏线性表示为

$$\boldsymbol{h}=\widetilde{\boldsymbol{G}}\tilde{\boldsymbol{a}}+\varepsilon_{\boldsymbol{h}} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{G}}\tilde{\boldsymbol{a}}+\boldsymbol{w}+\varepsilon_{\boldsymbol{y}}=\widetilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{a}}+\widetilde{\boldsymbol{w}} \tag{15}$$

其中 $\varepsilon_{\boldsymbol{y}}$ 和 $\varepsilon_{\boldsymbol{h}}$ 表示用 2 维区域的 $(\tau_{i_\tau^{(q)}},f_{i_f^{(q)}})$ 代替真实信道参数 $(\tau[q],f[q])$ 所产生的建模误差，$\widetilde{\boldsymbol{w}}$ 包含噪声和

系统稀疏建模所产生的误差，$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{G}}$。

从式(15)可获得如下的最小二乘问题：

$$\min_{\tilde{\boldsymbol{a}}} \|\boldsymbol{y}-\widetilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{a}}\|_2^2 \tag{16}$$

其解为

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_{\mathrm{LS}}=\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\dagger}\boldsymbol{y} \tag{17}$$

然后由$\hat{\boldsymbol{h}}_{\mathrm{LS}}=\widetilde{\boldsymbol{G}}\tilde{\boldsymbol{a}}_{\mathrm{LS}}$估计出信道的脉冲响应。这种估计信道参数的方法就是传统的最小二乘法(Least Square, LS)。

式(15)与压缩感知的模型$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n}$具有相同的形式，且$\tilde{\boldsymbol{a}}$是稀疏向量，因此可先采用$\ell_2-S\ell_0$-CG算法求出式(18)的解$\hat{\boldsymbol{a}}_{\mathrm{CS}}$，然后由$\hat{\boldsymbol{h}}_{\mathrm{CS}}=\widetilde{\boldsymbol{G}}\hat{\boldsymbol{a}}_{\mathrm{CS}}$估计出信道的脉冲响应。

$$\hat{\boldsymbol{a}}_{\mathrm{CS}}=\arg\min_{\tilde{\boldsymbol{a}}} F_\sigma(\hat{\boldsymbol{a}}),\quad \text{s. t. } \boldsymbol{y}=\widetilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{a}}+\widetilde{\boldsymbol{w}} \tag{18}$$

在2维区域$(0,\tau_{\max})\times(-f_{\max}/2,f_{\max}/2)$已正确地检测到距离$(\tau[q],f[q])$最近点的情形，并将该点的序号记为$(i_\tau^{(q)},i_f^{(q)})$，(即$\tau_{i_\tau^q}=\arg\min_{\tau_{i_\tau}}|\tau[q]-\tau_{i_\tau}|$，$f_{i_f^q}=\arg\min_{f_{i_f}}|f[q]-f_{i_f}|$)，则可从$\widetilde{\boldsymbol{G}}$抽取$Q$列组成一个$NL\times Q$维的子矩阵$\widetilde{\boldsymbol{G}}_Q$，其中被抽取的$Q$列的序号为$i_f^{(q)}+i_\tau^{(q)}I_f$，$q\in\{1,2,\cdots,Q\}$；从而式(15)可简化为

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{G}}\tilde{\boldsymbol{a}}+\widetilde{\boldsymbol{w}}=\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{G}}_Q\boldsymbol{d}+\widetilde{\boldsymbol{w}} \tag{19}$$

通过求解式(20)的最小二乘问题：

$$\min_{\boldsymbol{d}} \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{G}}_Q\boldsymbol{d}\|_2 \tag{20}$$

得$\hat{\boldsymbol{d}}=(\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{G}}_Q)^{\dagger}\boldsymbol{y}$，然后由$\boldsymbol{h}=\widetilde{\boldsymbol{G}}_Q\hat{\boldsymbol{d}}$估计出信道的脉冲响应。这里首先假设了一种理想化的情形，即式(15) $\tilde{\boldsymbol{a}}$中非零元素的位置已通过某一种方法(如Time Of Arrival, TOA测量)正确地检测到，然后采用LS方法估计出这些非零元素的值,因而称这种方法为理想化的LS(ideal-LS)。文献[17]的仿真实验结果表明理想化的LS信道估计的MSE性能与稀疏信道的Cramer Rao下界非常吻合，从而用其来衡量压缩信道感知方法的性能。

5 仿真结果与分析

图1给出的是$S\ell_0$，$\ell_2-S\ell_0$-CG和理想OMP 3种重构算法的重构信噪比与噪声功率的关系曲线。在OMP算法里假设已提前获知信号的稀疏度K，且由K来控制算法的终止,这是一种理想化的情形，因此称为理想OMP。这里原始信号$\boldsymbol{x}$和测量信号$\boldsymbol{y}$的长度分别为$N=1000$和$M=400$，$\boldsymbol{x}$的稀疏度$K=100$，且随机抽取的K个非零元素值由复正态分布$\mathrm{N}(0,1/2)+j\mathrm{N}(0,1/2)$产生，测量矩阵$\boldsymbol{\Phi}$的每个元素值由$\mathrm{N}(0,1)+j\mathrm{N}(0,1)$生成。采用定义为$20\lg(\|\boldsymbol{x}\|_2/\|\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}\|_2)$的信噪比 (SNR)来衡量重构算法的性能，且$\ell_2-S\ell_0$-CG算法里的参数$r=0.5$，$P=20$。在各种不同的噪声功率情形，从图1可看出$\ell_2-S\ell_0$-CG算法重构信噪比优于$S\ell_0$近10 dB，且略优于理想OMP。$\ell_2-S\ell_0$-CG不同于$S\ell_0$之处是其目标函数里包含了误差容允项$\|\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2^2$,从而使重构出的$\hat{\boldsymbol{x}}$满足$\boldsymbol{\Phi}\hat{\boldsymbol{x}}$与$\boldsymbol{y}$之间存在一定的误差，更符合噪声环境里的观测模型$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n}$。因此，相对于$S\ell_0$而言，$\ell_2-S\ell_0$-CG抗噪声干扰的重构能力更强。

接着仿真的是OFDM系统采用压缩感知技术估计慢时变信道(块衰落信道)的性能，这里采用块状的形式放置导频信号。系统的子载波数$N=64$，脉冲波形$g(t)=\sin\mathrm{c}(\pi t/T_\mathrm{s})$，归一化的信道参数$\tau_q$和$f_q$分别随机均匀分布于$(0,L-1)$和$(-f_{\max}/2,f_{\max}/2)$。多径信道的数目为$Q$，其幅度衰落系数$\boldsymbol{a}$服从均值为0，方差为$Q^{-1}$的复数正态分布。发送信号采用QPSK调制，并采用均方误差$\mathrm{MSE}=\dfrac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\sqrt{\dfrac{\|\boldsymbol{h}_i-\hat{\boldsymbol{h}}_i\|_2^2}{N_h}}$来衡量信道估计的性能，其中$\boldsymbol{h}_i$和$\hat{\boldsymbol{h}}_i$分别指第$i$次实验的真实值和估计值，$N_h$指$\boldsymbol{h}$的元素数目，$M$指实验的次数。

在$Q=5$，$L=2$和$f_{\max}=0.05$的场景，且量化点数$I_\tau=100$和$I_f=30$，图2和图3分别给出了不同信道估计方法的MSE和BER与信噪比的关系曲线。对于时频双选择性慢衰落信道的情形，从图2和图3可看出：随着信噪比的增大，采用压缩感知技术的信道估计获得的MSE和BER会逐渐地减小；且信噪比仅为9 dB时，采用$\ell_2-S\ell_0$-CG的信道估计方法也能获得低于−20 dB的MSE和0.1的BER。这表明文中对多径信道的时延和多普勒频移构成的时频2维有界区域进行量化,并将OFDM系统信道估计问题建模为压缩感知理论中的稀疏信号重构的方法是可行和有效的。另外在相同的信噪比，$\ell_2-S\ell_0$-CG信道估计方法获得的MSE和BER均优于采用$S\ell_0$和理想OMP的信道估计方法，且其MSE仅低于理想LS方法的MSE 2 dB左右。由于噪声的干扰和用2维区域的(τ_{i_τ},f_{i_f})代替真实信道参数$(\tau[q],f[q])$引入了误差，因而，从式(15)可看出接收信号$\boldsymbol{y}$与$\widetilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{a}}$之间存在误差$\widetilde{\boldsymbol{w}}$。$\ell_2-S\ell_0$-CG算法在$S\ell_0$算法的目标函数里添加了一个误差容许项，与式(15)的实际情况更匹配，因此取得了优于$S\ell_0$算法的估计效果。

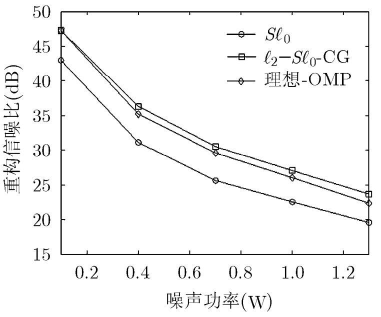

图 1 3 种重构算法的性能比较图

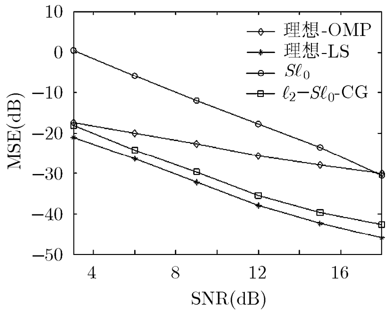

图 2 信道估计的 MSE 与 SNR 关系

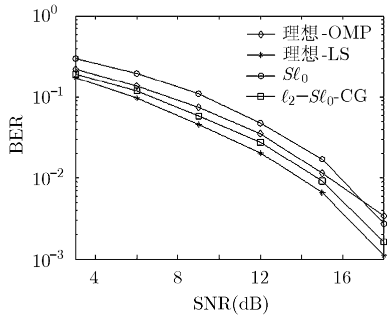

图 3 信道估计的 BER 与 SNR 关系

文中提出的压缩信道感知方法是寻求以距离真实信道参数最近的量化点来近似表示信道的时频参数，因此在理论上随着量化点数的增加，该近似表示误差应该逐渐降低，从而信道估计的准确度也会相应地得到提高。在 $Q=5$，$L=4$ 和 $f_{\max}=0.2$ 的场景，图 4 给出了 $\ell_2-S\ell_0$-CG 信道估计方法在 $I_f=20$ 和不同 I_τ 量化点数时的 MSE 与 SNR 关系曲线。从该图可观察到在相同的信噪比，信道估计的性能随着量化点数的逐渐增加而逐渐获得提升；这是由于在固定的时频 2 维有界区域，量化点数越多，真实信道参数与最临近量化点之间的距离就越小，从而近似误差就会随着量化点数的增多而减小。

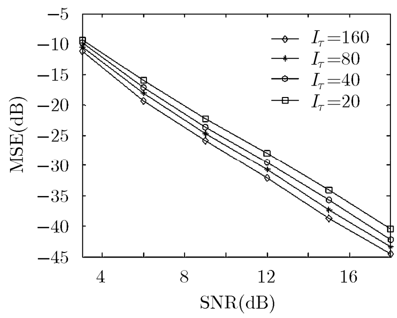

图 4 不同量化点数的压缩信道感知 MSE 与 SNR 关系

6 结束语

本文围绕 OFDM 系统双选择性慢衰落信道估计问题，提出了一种采用压缩感知技术的信道估计方法。为了高概率地重构压缩感知框架里有噪声干扰的稀疏信号，这里首先建立了一个无约束优化目标函数($\ell_2-S\ell_0$)，并采用共轭梯度法求解该优化问题。接着通过对多径信道的时延和多普勒频移参数构成的时频 2 维有界区域进行量化，将 OFDM 时频双选择性慢衰落信道估计问题建模为压缩感知理论中的稀疏信号重构问题。最后通过仿真发现，采用 $\ell_2-S\ell_0$-CG 重构算法的信道估计方法在估计性能方面优于采用 $S\ell_0$ 的信道估计方法，且其 BER 性能接近于理想最小二乘法的性能。

参 考 文 献

[1] Donoho D. Compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289–1306.

[2] Candes E J, Romberg J, and Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal recognition from highly incomplete frequency information[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(2): 489–509.

[3] 吴敏, 邢孟道, 张磊. 基于压缩感知的二维联合超分辨 ISAR 成像算法[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(1): 187–193.
Wu Min, Xing Meng-dao, and Zhang Lei. Two dimensional joint super-resolution ISAR imaging algorithm based on compressive sensing[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014, 36(1): 187–193.

[4] 贾琼琼, 吴仁彪. 基于压缩感知的空时自适应动目标参数估计[J]. 电子与信息学报, 2013, 35(11): 2714–2720.
Jia Qiong-qiong and Wu Ren-biao. Space time adaptive parameter estimation of moving target based on compressed sensing[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2013, 35(11): 2714–2720.

[5] Tropp J A and Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2007, 53(12): 4655–4666.

[6] Chen S S, Donoho D L, and Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1999, 20(1): 33–61.

[7] Mohimani H, Babaie-Zadeh M, and Jutten C. A fast approach for overcomplete sparse decomposition based on smoothed l_0 -norm[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(1): 289–301.

[8] Hyder M M and Mahata K. An improved smoothed l_0 approximation algorithm for sparse representation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(4): 2194–2205.

[9] Bajwa W U, Haupt J, Sayeed A M, *et al*.. Compressed channel sensing: a new approach to estimating sparse

multipath channels[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(6): 1058–1076.

[10] He X, Song R, and Zhu W. Optimal pilot pattern design for compressed sensing-based sparse channel estimation in OFDM systems[J]. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2012, 31(4): 1379–1395.

[11] He X, Song R, and Zhu W. Pilot allocation for sparse channel estimation in MIMO-OFDM systems[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs*, 2013, 60(9): 612–616.

[12] Taubock G, Hlawatsch F, EiwenD, *et al*.. Compressive estimation of doubly selective channels in multicarrier systems: leakage effects and sparsity- enhancing processing[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2010, 4(2): 255–271.

[13] 解志斌, 薛同思, 田雨波, 等. 一种稀疏增强的压缩感知MIMO-OFDM 信道估计算法[J]. 电子与信息学报, 2013, 35(3): 665–670.

Xie Zhi-bin, Xue Tong-si, Tian Yu-bo, *et al*.. A sparsity enhanced channel estimation algorithm based on compressed sensing in MIMO-OFDM systems[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2013, 35(3): 665–670.

[14] Scaglione A and Li X. Compressed channel sensing: Is the restricted isometry property the right metric?[C]. The 17th International Conference on Digital Signal Processing (DSP), Corfu, Greece, 2011: 1–8.

[15] Sharp M and Scaglione A. A useful performance metric for compressed channel sensing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(6): 2982–2988.

[16] Zibulevsky M and Elad M. L1-L2 optimization in signal and image processing[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2010, 27(3): 76–88.

[17] Carbonelli C, Vedantam S, and Mitra U. Sparse channel estimation with zero tap detection[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2007, 6(5): 1743–1753.

叶新荣： 男，1976 年生，博士生，讲师，研究方向为压缩感知与信道估计.

朱卫平： 男，1962 年生，教授，博士生导师，研究方向为通信信号处理.

张爱清： 女，1982 年生，博士生，讲师，研究方向为无线网络安全.

孟庆民： 男，1965 年生，博士，副教授，硕士生导师，研究方向为通信信号处理.