第 24 卷 第 5 期　　电子与信息学报　　Vol.24 No.5
2002 年 5 月　　JOURNAL OF ELECTRONICS AND INFORMATION TECHNOLOGY　　May 2002

超分辨测向中阵元间互耦的校正 [1]

林 敏　　龚铮权

(总参第 63 研究所 南京 210016)

摘 要　该文基于子空间基本原理，提出了一种天线阵单元间互耦的校正方法．该方法的优点在于校正时允许天线阵同时接收校正信号和待测信号．文中给出的计算机模拟结果证明了这种方法适用于均匀线阵或圆阵以及相干信号源的测向．

关键词　阵列信号处理，子空间原理，互耦，误差校正

中图号　TN911.7, TN820

1 引　言

基于阵列信号处理技术来突破瑞利极限，从而实现超分辨测向已经成为电子对抗、移动通信、声纳等领域的一个研究热点 [1]．尽管以 MUSIC 算法 [2] 为代表的各种信号 DOA 估计算法，在理想情况下较常规的测向方法有着许多的优势，但在实际应用过程中，天线阵各个单元之间的互耦往往会导致测向性能急剧下降甚至完全失效 [3-9]，因此阵元间互耦的校正引起了国内外学者的广泛关注，并得出了一些解决问题的办法。其中文献 [4] 提出了一种对互耦进行补偿的思路，但它要求必须事先准确已知互阻抗矩阵，文献 [5-7] 提出了最小平方法、文献 [8] 提出了最大似然法，但它们均要求辅助信号源的个数必须大于阵元个数，并且天线阵每次只能接收到一个信号．尽管文献 [9] 提出了一种自校正的办法，但它有两大缺点：一是只能应用于非线性阵，并且信号源的数目必须足够多；二是计算量大、收敛速度慢，最终结果很容易落入局部最小点。跟它们有所不同，本文基于子空间原理提出了一种新的校正方法，该方法的优点在于校正时允许天线阵同时接收所有的校正信号和待测信号，并且它适用于均匀线阵和均匀圆阵，经过相应的处理后还可推广到存在相干信号源的场合，从而具有较强的实用性。计算机模拟结果证明了这种方法的可行性．

2 问题的描述

如图 1 所示，对于由 N 个无方向性点元组成的平面天线阵，以第 1 个和第 2 个阵元的连线为 X 轴建立坐标系．假设有 M 个来自远场的窄带信号入射到该天线阵上，那么在第 k 次快拍，第 i 个阵元的输出

$$x_i(k)=\sum_{m=1}^{M}\left[\sum_{n=1}^{N}c_{in}a_n(\theta_m)\right]s_m(k)+n_i(k) \tag{1}$$

将 (1) 式用矢量形式表示出来，就可得到

$$\boldsymbol{X}(k)=\boldsymbol{CAS}(k)+\boldsymbol{n}(k) \tag{2}$$

$\boldsymbol{X}(k)=[x_1(k),x_2(k),\cdots,x_N(k)]^T$, $\boldsymbol{S}(k)=[s_1(k),s_2(k),\cdots,s_M(k)]^T$, $\boldsymbol{n}(k)=[n_1(k),n_2(k),\cdots,n_N(k)]^T$, $n_i(k)$ 为第 i 个阵元中零均值且方差等于 σ^2 的高斯加性白噪声。互耦矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为 $N\times N$

[1] 2000-04-28 收到，　2000-11-10 定稿

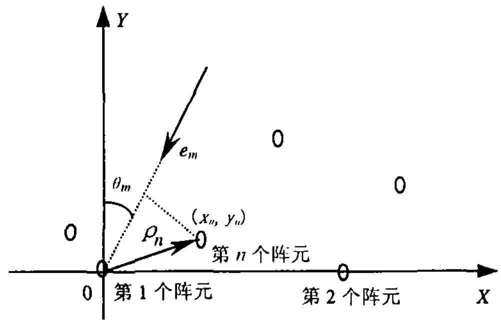

图 1 任意排列的平面天线阵示意图

阶复矩阵，方向矩阵 $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}(\theta_1), \boldsymbol{a}(\theta_2), \cdots, \boldsymbol{a}(\theta_M)]$, $\boldsymbol{a}(\theta_m)$ 为天线阵对于第 m 个信号的引导矢量 (Steering Vector)，它的第 n 个元素

$$a_n(\theta_m) = \exp(-jk_c\boldsymbol{\rho}_n \cdot \hat{e}_m) = \exp[jk_c(x_n \sin\theta_m + y_n \cos\theta_m)] \tag{3}$$

于是阵列的输出协方差矩阵

$$\boldsymbol{R} = E[\boldsymbol{X}(k)\boldsymbol{X}(k)^H] = \boldsymbol{CAR}_{SS}\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{C}^H + \sigma^2\boldsymbol{I} \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{R}_{SS} = E[\boldsymbol{S}(k)\boldsymbol{S}(k)^H]$ 是信号复包络的协方差矩阵。对 $\boldsymbol{R}$ 进行特征值分解后，它的 M 个大特征值和 $N-M$ 个小特征值对应的特征向量分别构成信号子空间 $\boldsymbol{E}_S$ 和噪声子空间 $\boldsymbol{E}_N$，即 $\boldsymbol{E} = [\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_M \vdots \boldsymbol{u}_{M+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_N] = [\boldsymbol{E}_S \vdots \boldsymbol{E}_N]$，不难得到下面的关系式:

$$\mathrm{span}\{\boldsymbol{CA}\} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{E}_S\} \perp \mathrm{span}\{\boldsymbol{E}_N\} \tag{5}$$

这就是广泛应用于阵列信号处理的子空间基本原理。很显然，考虑到阵元间互耦的影响后，MUSIC 算法的空间谱函数应该是

$$P_{MU}(\theta) = \frac{1}{||\boldsymbol{E}_N^H\boldsymbol{Ca}(\theta)||^2} \tag{6}$$

其中 $||\bullet||$ 表示 Frobenius 范数。因此，校正的关键在于求得互耦矩阵 $\boldsymbol{C}$。

3 阵元间互耦的校正原理

假设 M 个入射信号中有 L 个 ($L \geq 2$ 且 $M \leq N-1$) 为方向已知的校正信号。不失一般性，构造代价函数

$$J = \sum_{l=1}^{L} ||\boldsymbol{E}_N^H\boldsymbol{Ca}(\theta_l)||^2 \tag{7}$$

根据子空间基本原理，求互耦矩阵 $\boldsymbol{C}$ 可以转化为解下面的最小化问题

$$\boldsymbol{C} = \arg\min_{C} \sum_{l=1}^{L} ||\boldsymbol{E}_N^H\boldsymbol{Ca}(\theta_l)||^2 \tag{8}$$

显然这是一个 $N-1$ 维的最小值问题，如果采用搜索的方法，那么计算量是相当大的．对于实际工程中用得最多的均匀线阵和均匀圆阵，C 为一个 $N \times N$ 的复对称 Toeplitz 矩阵，它的第一行 (或第一列) 含有矩阵中的所有元素，可以得到 [9]

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{a}(\theta_l) = \boldsymbol{T}(\theta_l)\boldsymbol{c} \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{c} = [c_{11}, c_{12}, \cdots, c_{1N}]^T = [1, c_{12}, \cdots, c_{1N}]^T$ 以及 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_2$

$$[T_1]_{pq} = \begin{cases} a_{p+q-1}(\theta_l), & p+q \leq N+1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \qquad [T_2]_{pq} = \begin{cases} a_{p-q+1}(\theta_l), & p \geq q \geq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

于是 (8) 式变成

$$\boldsymbol{c} = \arg\min_{c} \sum_{l=1}^{L} \|\boldsymbol{E}_N^H \boldsymbol{T}(\theta_l)\boldsymbol{c}\|^2 \Leftrightarrow \arg\min_{c} \boldsymbol{c}^H \boldsymbol{Q}\boldsymbol{c} \tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{Q} = \sum_{l=1}^{L}[\boldsymbol{T}^H(\theta_l)\boldsymbol{E}_N\boldsymbol{E}_N^H\boldsymbol{T}(\theta_l)]$，它是一个正定的 Hermitan 矩阵．令 $\boldsymbol{w} = [1, 0, \cdots, 0]^T$，那么

$$\boldsymbol{c}^H\boldsymbol{w} \equiv 1 \tag{11}$$

(10) 和 (11) 式组成了一个线性约束条件下的二次最小值求解问题，一般采用 Lagrange 乘子法．设目标函数为

$$F(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c}^H\boldsymbol{Q}\boldsymbol{c} + \mu(\boldsymbol{c}^H\boldsymbol{w} - 1) \tag{12}$$

将 $F(\boldsymbol{c})$ 对 $\boldsymbol{c}$ 求梯度，并令其值等于零

$$\nabla_c[F(\boldsymbol{c})] = \nabla_c(\boldsymbol{c}^H\boldsymbol{Q}\boldsymbol{c}) + \mu\nabla_c(\boldsymbol{c}^H\boldsymbol{w} - 1) = 2\boldsymbol{Q}\boldsymbol{c} + \mu\boldsymbol{w} = 0 \tag{13}$$

得到

$$\boldsymbol{c} = -(\mu/2)\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{w} \tag{14}$$

将它代入约束条件

$$\boldsymbol{c}^H\boldsymbol{w} = -(\mu/2)(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{w})^H\boldsymbol{w} = 1 \tag{15}$$

有

$$-(\mu/2) = 1/[\boldsymbol{w}^H(\boldsymbol{Q}^{-1})^H\boldsymbol{w}] = 1/(\boldsymbol{w}^H\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{w}) \tag{16}$$

最后得到

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{w}/(\boldsymbol{w}^H\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{w}) \tag{17}$$

由上式很容易进一步求得互耦矩阵 $\boldsymbol{C}$．但在实际应用时得到的是噪声子空间 $\boldsymbol{E}_N$ 的估计值 $\hat{\boldsymbol{E}}_N$，因此只能求得互耦矩阵的估计值 $\hat{\boldsymbol{C}}$．定义校正误差:

$$\varepsilon = \|\boldsymbol{C} - \hat{\boldsymbol{C}}\|/\|\boldsymbol{C}\| \tag{18}$$

4 计算机模拟结果及结论

下面通过几个有代表性的例子来验证这种校正方法的有效性．如无特殊说明，计算机模拟时选择的条件如下：天线阵为一个均匀分布的 8 元阵，相邻阵元之间的距离为 0.5 λ；2 个待测信号分别来自 $-25°$ 和 $-15°$，另外还有 2 个位于 $10°$ 和 $20°$ 的校正信号源，所有信号的 SNR

均为 20dB；互耦矩阵 C 中的所有元素均不为零，事实上在这种情况下阵元间的互耦比文献 [9] 要严重一些。

例 1 均匀直线阵、信号不相干的情况

图 2(a) 中的曲线 1 表示没有经过校正得到的空间谱曲线，可以看出此时已经无法估计出待测信号的 DOA；校正之后的空间谱则由曲线 2 给出，它在 4 个信号方向上出现了明显的尖峰，这一事实充分证明了校正方法是成功的。另外图 2(b) 表示校正源角度偏差在 1° 时得到的空间谱曲线，此时仍然能利用谱峰分辨出信号的方向。更进一步，图 2(c) 和 2(d) 还给出了校正误差随信噪比和快拍数的变化曲线，它们都是取 30 次 Monte-Carlo 实验的平均值得到的，可见这种方法在信噪比和快拍数超过门限值的条件下，有着较高的校正精度。

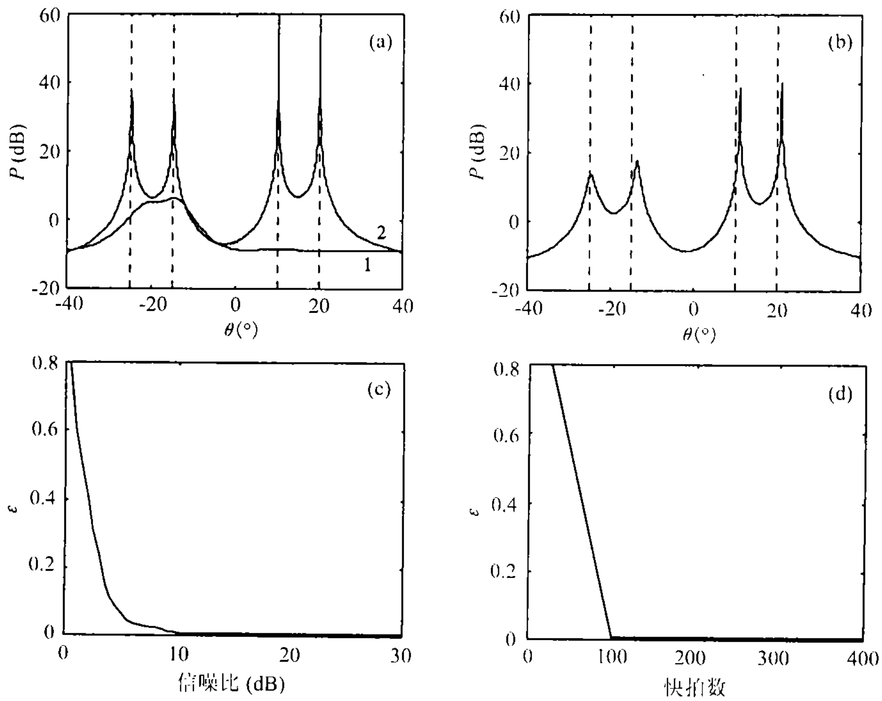

图 2 例 1 的计算机模拟结果

例 2 均匀直线阵、信号相干的情况

在 2 个待测信号互为相干，且相干系数为 $0.8e^{j0.6}$ 的情况下，将天线阵分成均包含 7 个阵元的 2 个子阵，然后采用空间平滑 (Spatial Smoothing) 技术 [10] 后，得到校正前后的 MUSIC 空间谱曲线如图 3(a) 和 3(b) 所示，可见校正之后的效果是非常明显的，同时也说明了这种方法适用于相干信号源的场合。

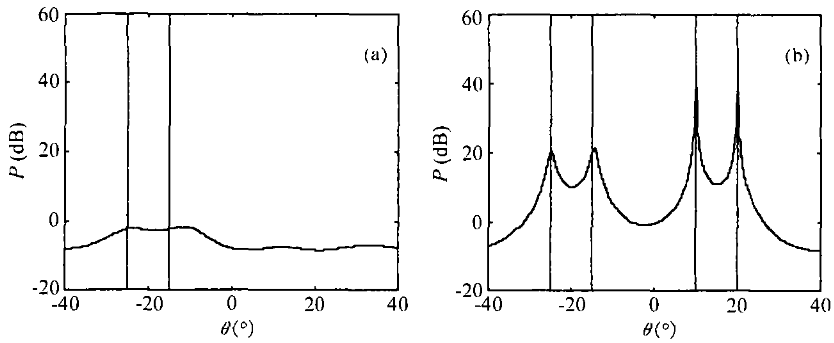

图 3　校正前后的 MUSIC 空间谱比较

例 3　均匀圆形阵、信号不相干的情况

这种情况下得到的计算机模拟结果如图 4 所示，其中 4(a) 和 4(b) 分别表示校正前后的空间谱曲线，很显然校正前的空间谱完全失效，而利用校正之后的空间谱则能准确地估计出待测信号的 DOA ，这就证明了这种校正方法同样适用于圆形阵．另外我们还对校正源角度存在着误差的情况进行模拟之后，得到跟例 1 相同的结论．

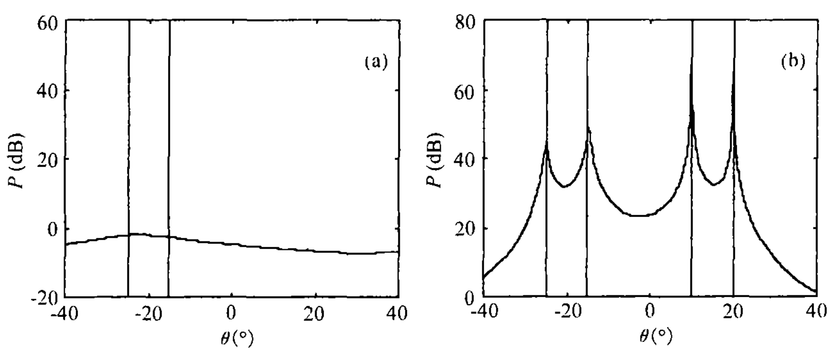

图 4　均匀圆阵校正前后的空间谱曲线

5 结束语

如何消除阵元间互耦引起的性能恶化，是阵列天线领域急需解决的一个技术难题，尤其是对于超分辨测向具有非常重要的现实意义．本文基于子空间基本原理，提出了一种新的校正方法，该方法克服了其他方法要求校正时天线阵只能接收到一个校正信号的缺点，大大方便了工程应用．文中最后给出的计算机模拟结果还证明了这种方法能用于均匀线阵或圆阵以及相干信号源的测向，从而具有较强的实用性．

参　考　文　献

[1]　S. Haykin, J. P. Keily, Some aspects of array signal processing, IEE Proc-F, 1992, 139(1), 1–26.

[2]　R. O. Schmidt, Multiple emitter location and signal parameter estimation, IEEE Trans. on AP, 1986, AP-34(2), 276–280.

[3]　A. J. Weiss, B. Friedlander, Mutual coupling effects on phase-only direction finding, IEEE Trans. on AP, 1992, AP-40(5), 535–541.

[4] C. C. Yeh, *et al.*, Bearing estimations with mutual coupling present, IEEE Trans. on AP, 1989, AP-37(10), 1332–1335.

[5] J. Pierre, *et al.*, Experiment performance of calibration and direction-finding algorithm, Proc. IEEE ICASSP, Toronto, Canada, 1991, 1365–1368.

[6] C. M. S. See, Sensor array calibration in the presence of mutual coupling and unknown sensor gain and phases, Electron. Lett., 1994, 30(3), 373–374.

[7] C. M. S. See, Method for array calibration in high-resolution sensor array processing, IEE Proc.-F, 1995, 142(3), 90–96.

[8] B. C. Ng, *et al.*, Sensor-array calibration using a maximum-likelihood approach, IEEE Trans. on AP, 1996, AP-44(8), 827–835.

[9] B. Friedlander, A. J. Weiss, Direction finding in the presence of mutual coupling, IEEE Trans. on AP, 1991, AP-39(3), 273–284.

[10] T. J. Shan, *et al.*, On spatial smoothing for direction-of-arrival estimation of coherent signals, IEEE Trans. on ASSP, 1985, ASSP-33(4), 806–811.

CALIBRATION FOR MUTUAL COUPLING AMONG SENSORS IN SUPER-RESOLUTION DIRECTION-FINDING

Lin Min Gong Zhengquan

(*The 63rd Research Institute of PLA General Staff, Nanjing* 210016, *China*)

Abstract Basing on subspace principal, this paper provides a calibration approach for mutual coupling among sensors. The benefit of this new method is that calibration signals and unknown signals can be received simultaneously, during the course of calibration. The computer simulation results demonstrate that this approach can be used for uniformly spaced linear or circular arrays and direction-finding of coherent signals.

Key words Array signal processing, Subspace principle, Mutual coupling, Errors calibration

林 敏: 男, 1972 年生, 硕士, 工程师, 主要从事阵列信号处理、智能天线等方向的研究, 已发表文章十余篇.

龚铮权: 男, 1937 年生, 1985 年获美国密西西比大学 Ph.D 学位, 研究员, 总参高级保留专家, 主要从事无线通信系统、智能天线等方向的研究, 在国内外核心刊物和重要会议上发表论文几十篇.