广义门阈分解理论及其应用 [1]

张宏科　　高念俊　　袁保宗

(北方交通大学信息科学研究所 北京 100044)

摘　要　本文在传统门阈分解技术的基础上，进一步导出了广义门阈分解理论和算法，研究了有关应用和实现问题。其效果不仅大大地简化了理论分析和硬件实现，而且也进一步完善了非线性滤波的有关理论。

关键词　门阈分解，非线性映射，中值滤波，排序统计滤波

中图号　TN911.72

1　引　言

1984 年，著名学者 Fitch[1-3] 等在传统中值滤波的基础上，提出了门阈分解技术 [1] 。至今，这种方法仍是中值滤波、排序统计滤波、α- 剪裁平均滤波、最大值、最小值等非线性滤波研究的主要工具之一 [1-6] 。但是这些年来，由于其数学描述不够直观、简单，且受到分解形式 (等权分解，且权值为 1) 的限制，尤其是当提高分解精度时，其分解级数大大增加，以致于理论分析和硬件实现变得十分困难，因而严重地限制了它的广泛应用。本文在传统算法的基础上，进一步导出了广义门阈分解理论 (见定理 1~ 定理 4) ，研究了有关应用和实现问题。其效果不仅大大地降低了分解级数，而且也完善了非线性滤波的有关理论。

2　广义门阈分解 (GTD) 理论

为了分析方便，现以中值滤波为例，进行广义门阈分解的研究。这里假定输入离散序列 $a(m)$ ，具有长度 L ，即 $1 \le m \le L$ ，且幅度在集合 $\{0,1,\cdots,M-1\}$ 之间变化，通过中值滤波运算后，其滤波输出为 $y(m)$ ，即

$$y(m) \triangleq \mathrm{Median}\{a(m-N)\cdots a(m)\cdots a(m+N)\}, \tag{1}$$

式中 $N=(W-1)/2$ ， W 为窗长。

考虑到多电平滑动中值滤波，实质上是一种由 $a(m)$ 到 $y(m)$ 的非线性映射，不妨用符号 $\sigma(\cdot)$ 表示，并记作

$$y(m) \triangleq \sigma(a(m)). \tag{2}$$

现给出广义门阈分解定理如下：

[1] 1994-09-21 收到， 1995-02-13 定稿
中国博士后科学基金和国家模式识别重点实验室基金资助

定理 1 若 $a(m)\in\{D_j\}$， $j\in\{0,1,\cdots M\}$，其中 $D_j=\sum_{r=0}^{j}\varphi(r)$， $\varphi(r)\in R$， R 为实数集合，则

$$a(m)=\sum_{j=0}^{M}\varphi(j)a_j(m), \tag{3}$$

其中 $a_j(m)\in\{0,1\}$， $a_{j+1}(m)\le a_j(m)$ 。

证 令 $m=m_1$, 则有 $a(m_1)=D_p$， $p\in\{0,1,\cdots M\}$

$$a(m_1)=D_p=\sum_{j=0}^{p}\varphi(j). \tag{4}$$

又已知 $a_j(m_1)\in\{0,1\}$， $a_{j+1}(m_1)\le a_j(m_1)$， 由此可构造出

$$a_j(m_1)=\begin{cases}1, & j\le p;\\ 0, & j>p.\end{cases} \tag{5}$$

将 (4) 式与 (5) 式合并，可得

$$a(m_1)=\sum_{j=0}^{M}\varphi(j)a_1(m_1).$$

因为 m_1 是任选的，由此可以改为 m， 即得 (3) 式。

定理 2 若 $a_j(m)\in\{0,1\}$， $a_j(m)\ge a_{j+1}(m)$， 则

$$\sigma(a(m))=\sum_{j=0}^{M}\sigma(a_j(m)). \tag{6}$$

上式表示将序列作中值滤波的分解和合成。

证 我们先证明以下公式：

$$\sigma\left[\sum_{j=0}^{p+1}a_j(m)\right]=\sigma\left[\sum_{j=0}^{p}a_j(m)\right]+\sigma[a_{p+1}(m)], \tag{7}$$

其中 p 为任意正整数。

令 $\sum_{j=0}^{p}a_j(m)=a^p(m)$， 窗宽为 3， 即 $N=1$， 则窗口内的 $a^p(m)$ 和 $a_{p+1}(m)$ 可分别表示为 $\{a^p(m-1),a^p(m),a^p(m+1)\}$ 和 $\{a_{p+1}(m-1),a_{p+1}(m),a_{p+1}(m+1)\}$ 。式中由于经过求和 $a^p(m)$ 已不是二值序列，窗内它有三个元素，现分三种情况讨论。

(1) $\{a^p(m-1),a^p(m),a^p(m+1)\}$ 中，有一个元素的值最大。不失一般性，令 $a^p(m-1)$ 有最大值。由于 $a_j(m)\ge a_{j+1}(m)$， 可求得 $\{a_{p+1}(m-1),a_{p+1}(m),a_{p+1}(m+1)\}$ 为 (1, 0, 0) 或 (0, 0, 0) 。因此 $\sigma(a_{p+1}(m))=0$， 即 (7) 式成立。

(2) $\{a^p(m-1), a^p(m), a^p(m+1)\}$ 中，有二元素有相同最大值。不失一般性，令 $a^p(m-1) = a^p(m)$ 且有最大值。同理，由于 $a_j(m) \geq a_{j+1}(m)$，可以求得 $\{a_{p+1}(m-1), a_{p+1}(m), a_{p+1}(m+1)\}$ 有四种可能：(1,1,0)，(1,0,0)，(0,1,0)，(0,0,0)。我们不难看出，对这四种可能，(7) 式都成立。

(3) $\{a^p(m-1), a^p(m), a^p(m+1)\}$ 中，三个元素有相同值。同理，由于 $a_j(m) \geq a_{j+1}(m)$，可以求得 $\{a_{p+1}(m-1), a_{p+1}(m), a_{p+1}(m+1)\}$ 有八种可能：(1,1,1)，(1,1,0)，(1,0,1)，(1,0,0)，(0,1,1)，(0,1,0)，(0,0,1)，(0,0,0)。可以看出，对这八种情况，(7) 式都成立。

到此为止，我们已经研究了所有可能发生的情况，从而证明了 (7) 式的成立。我们再由此证明 (6) 式。当 $M=0$ 时，(6) 式成立是显而易见的。

在 (7) 式中，令 $p=0$，可得 $\sigma\left[\sum_{j=0}^{1} a_j(m)\right] = \sigma(a_0(m)) + \sigma(a_1(m))$，即当 $M=1$ 时，(6) 式同样成立。推而广之，令 $p = 1, 2, \cdots (M-1)$，即可证明 (6) 式成立。

以上是在 $N=1$ 的条件下证明的，用相同的推理，不难推广到 N 为任意正整数。

证毕

定理 3 设 $a_j(m) \geq a_k(m)$，则

$$\sigma[a_j(m) + a_k(m)] = \sigma(a_j(m)) + \sigma(a_k(m)), \tag{8}$$

其中 $a_j(m)$，$a_k(m)$ 为任意两个二值序列。

证 证明的方法和证明 (7) 式的情况相似。先规定 N 值，设 $N=1$，然后假设 $\{a_j(m-1), a_j(m), a_j(m+1)\}$ 中的三个元素中有一个最大值，二个最大值或三个相同的值，再找出与之对应的 $a_k(m)$ 的各种可能的三元素序列。最后证明，在各种情况下，(8) 式均能成立。

必须指出，若 $a_j(m)$ 和 $a_k(m)$ 为多值序列，即使满足 $a_j(m) \geq a_k(m)$ 的条件，(8) 式也不成立。其证明是容易的，这可以从下例中看出。若 $a_j(m) = (4,1,2) \geq a_k(m) = (1,1,2)$，则 $\sigma(a_j(m)) = 2$，$\sigma(a_k(m)) = 1$，这时 $\sigma[a_j(m) + a_k(m)] = \sigma(5,3,4) = 4$。因此，(8) 式不成立。

由此，可得如下结论。(6) 式成立的充分条件为 (1) $a_j(m), (j = 0, 1, 2, \cdots M)$ 为二值序列，(2) $a_j(m) \geq a_{j+1}(m)$。很明显，这些条件并非必要。

定理 4 若满足定理 1 的条件，则

$$y(m) = \sum_{j=0}^{M} \varphi(j)\sigma(a_j(m)). \tag{9}$$

证 由 (2) 式、定理 1、定理 2 和定理 3 可得

$$y(m) = \sigma(a(m)) = \sigma\left[\sum_{j=0}^{M} \varphi(j) a_j(m)\right] = \sum_{j=0}^{M} \varphi(j)\sigma(a_j(m)).$$ 证毕

表 1 线性加权门阈分解的中值滤波

1	1	0	3	3	10	3	6	6	$\Rightarrow$	MF	$\Rightarrow$	1	1	1	3	3	3	6	6	6
							↓								↑					
							线性加权分解								线性加权恢复					
							↓								↑					
1	1	0	1	1	1	1	1	1	→	TMF	→	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1	→	TMF	→	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	1	0	1	1	→	TMF	→	0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	1	0	0	0	→	TMF	→	0	0	0	0	0	0	0	0	0

上述定理 1~ 定理 4，给出了广义门阈分解的一般理论和它适应的条件。也是我们采用这一技术的理论依据。关于这一点，下面的讨论，我们可进一步看到上述分解定理的重要性。

这里先讨论有关 $\varphi(j)$ 的取值：

(1) $\varphi(j)$ 可以为任何实、正或负数；

(2) 实际上，$\varphi(j)$ 的取值可以有以下几种；

(a) 等权门阈分解 (可以认为是传统的技术 [1−5]) $\varphi(0)=0,\quad \varphi(j)=1,\quad (j=1,2,\cdots M)$.

(b) 线性加权门阈分解 $\varphi(j)=j,\quad (j=0,1,\cdots M)$

(c) 二进制加权门阈分解 $\varphi(0)=0,\quad \varphi(j)=2^{j-1},\quad (j=1,\cdots M)$.

(d) 选择加权门阈分解 $\varphi(j)\triangleq\begin{cases}1, & j\le c_1,\\ 2, & c_1<j\le c_2,\quad j=1,\cdots M,\\ 2^{j-c_2+1}, & c_2<j,\end{cases}$

式中 c_1 和 c_2 是根据需要确定的正整数。

实际上，根据工程需要可自己定义 $\varphi(j)$ 。现举例进一步说明这一技术的实际应用。

3 GTD 技术应用举例

线性加权门阈分解(LWTD)

假定 $\varphi(j)=j$ ，由定理 1 知道，集合 $D_j=\{0,1,3,6,\cdots\}$ ，若 $a(m)\in D_j$ ，则 (3) 式称为线性加权门阈分解。作为一个例子，表 1 给出了一维中值滤波 LWTD 算法的具体过程。

表 1 中，左上面的多电平信号，一方面进行滑动多电平中值滤波 (MF)$N=1$ ，用粗箭头表示，获得表右上端的多电平输出。另一方面，通过线性加权门阈分解 (用细箭头表示)，我们获得权值为 1,2,3,4(从上到下) 的四种二值信号，然后进行窗为 3 的二值滑动中值滤波 (TMF) ，得表右下端二值信号序列。可以看出，两种算法是一致的。但是 LWTD 技术与传统的门阈分解 (等权、且权值为 1) 相比，分解次数从原来的 10 行二值序列降到现在的 4 行二值序列。

4 结 论

综上所述，可以看出，本文提出的 GTD 理论及其应用，不仅通用、直观，而且适合于硬件实时实现，尤其适宜于 VLSI 技术实现，特别是分解定理的导出，不仅大大地简化理论分析和实现，而且也进一步完善了非线性滤波的有关理论，故可望有着引人注目的理论和应用前景。

参 考 文 献

[1] Fitch J P, *et al.* IEEE Trans. on ASSP, 1984, ASSP-32(12): 1183–1188.

[2] Arce G A. IEEE Trans. on IT, 1986, IT-32(3): 243–253.

[3] Gallagher N C. Median Filter: a Tutorial . ISCAS, Princeton, NJ: 1988, 1737–1744.

[4] 张宏科，龚碧秀. 科学通报，1990, 35(19): 1508–1511.

[5] 张宏科，张有正. 电子科学学刊，1991, 13(5): 468–474.

[6] Arce G A, *et al.* IEEE Trans. on ASSP, 1987, ASSP-35(1): 60–69.

THEORY AND APPLICATION FOR GERNERALIZED THRESHOLD DECOMPOSITION

Zhang Hongke Gao Nianjun Yuan Baozong

(*Institute of Information Science, Northern Jiaotong University, Beijing* 100044)

Abstract This paper has modified the tradictional threshold decomposition technique which is introduced for the analysis and implementation of nonlinear filter. This modified technique called generalized threshold decomposition (GTD) is better than the traditional one in the analysis and VLSI realization, and is proved by strict mathematical method. So the traditional threshold decomposition technique is improved greatly.

Key words Threshold decomposition, Nonlinear mapping, Median filtering, Order statistic filters

张宏科： 男，1957 年生，博士后，副教授，现从事非线性数字滤波和高速信息网络的研究。

高念俊： 男，1956 年生，现为洛阳外国语学院计算机中心副主任。

袁保宗： 男，1932 年生，教授，博士生导师，主要研究兴趣包括语音处理、图象处理、计算机视觉、模式识别。