第 12 卷 第 2 期
1990 年 3 月

电 子 科 学 学 刊
JOURNAL OF ELECTRONICS

Vol. 12, No. 2
Mar., 1990

任意传递矩阵的多端口有源网络实现*

戴国胜　　　　戴旦前
(长江航运科学研究所,武汉)　(华中理工大学,武汉)

摘要　本文提出用实际的多端口网络来实现任意传递矩阵的简捷方法,即通过 RC 梯形网络和输入输出加法器进行状态反馈和状态交叉输出的实现方法。主要工作是确定各加法器系数.

关键词　有源多端网络;状态反馈;状态交叉输出

描述 m 个输入 n 个输出的多端口网络输入输出关系的传递矩阵 $\boldsymbol{G}(s)$, $\boldsymbol{G}(s) \in \boldsymbol{R}_{(s)}^{m\times n}$ 的一般形式是

$$\boldsymbol{G}(s) = \left[\frac{t_{i,j}(s)}{u_{i,j}(s)}\right] \begin{matrix} i = 1, 2, \cdots\cdots, m \\ j = 1, 2, \cdots\cdots, n \end{matrix} \tag{1}$$

$\boldsymbol{G}(s)$ 可实现的充分必要条件是: $\boldsymbol{G}(s)$ 的所有元素 $t_{i,j}(s)/u_{i,j}(s)$ 的分子多项式 $t_{i,j}(s)$ 的阶必须小于或者等于分母多项式 $u_{i,j}(s)$ 的阶.

将 $\boldsymbol{G}(s)$ 阵变换成 $\boldsymbol{G}'(s)$ 阵,使得 $\boldsymbol{G}'(s)$ 中每列各元素的分母多项式是相同的,即

$$\boldsymbol{G}'(s) = \left[\frac{t'_{i,j}(s)}{u'_i(s)}\right], \begin{matrix} i = 1, 2, \cdots\cdots, m \\ j = 1, 2, \cdots\cdots, n \end{matrix} \tag{2}$$

变换的目的是使传递矩阵 $\boldsymbol{G}(s)$ 变换成易于实现的矩阵 $\boldsymbol{G}'(s)$. 这种变换是等价的, 若 $\boldsymbol{G}(s)$ 是可实现的,则 $\boldsymbol{G}'(s)$ 也是可实现的.

实现方法与结果不是唯一的,其中一种较简单的方法是: 不用积分器,仅用 RC 梯形网络(串臂全为电阻、每个并臂都有电容)和加法器, 通过 RC 梯形网络作状态反馈和状态交叉输出,可实现形如 (2) 式的任意 $m \times n$ 传递矩阵 $\boldsymbol{G}'(s)$. 具体的网络结构如图 1 所示.

图 1 和文中的主要符号定义如下: i——$\boldsymbol{G}(s)$ 和 $\boldsymbol{G}'(s)$ 中列的序号,即实现网络中输入加法器和 RC 梯形网络的序号, $i = 1, 2, \cdots\cdots, m$. j——$\boldsymbol{G}(s)$ 和 $\boldsymbol{G}'(s)$ 中行的序号,即实现网络中输出加法器序号, $j = 1, 2, \cdots\cdots, n$. K_i——第 i 个 RC 梯形网络中电容 C 的个数,亦即 $\boldsymbol{G}'(s)$ 中第 i 列分母多项式的阶. $e_{i,l}(s)$——第 i 个 RC 梯形网络中的第 l 个状态(并臂电压), $l = K_i$, $K_i - 1, \cdots\cdots, 1, 0$. $h_{i,l}$——第 i 个 RC 梯形网络中第 l 个状态的反馈系数. $f_{i,l,j}$——第 i 个 RC 梯形网络中第 l 个状态输出到第 j 个输出加法器的状态输出系数.

设图 1 多端口网络的传递矩阵为 $\boldsymbol{G}''(s)$

* 1988 年 4 月 19 日收到, 1989 年 8 月 3 日修改定稿.

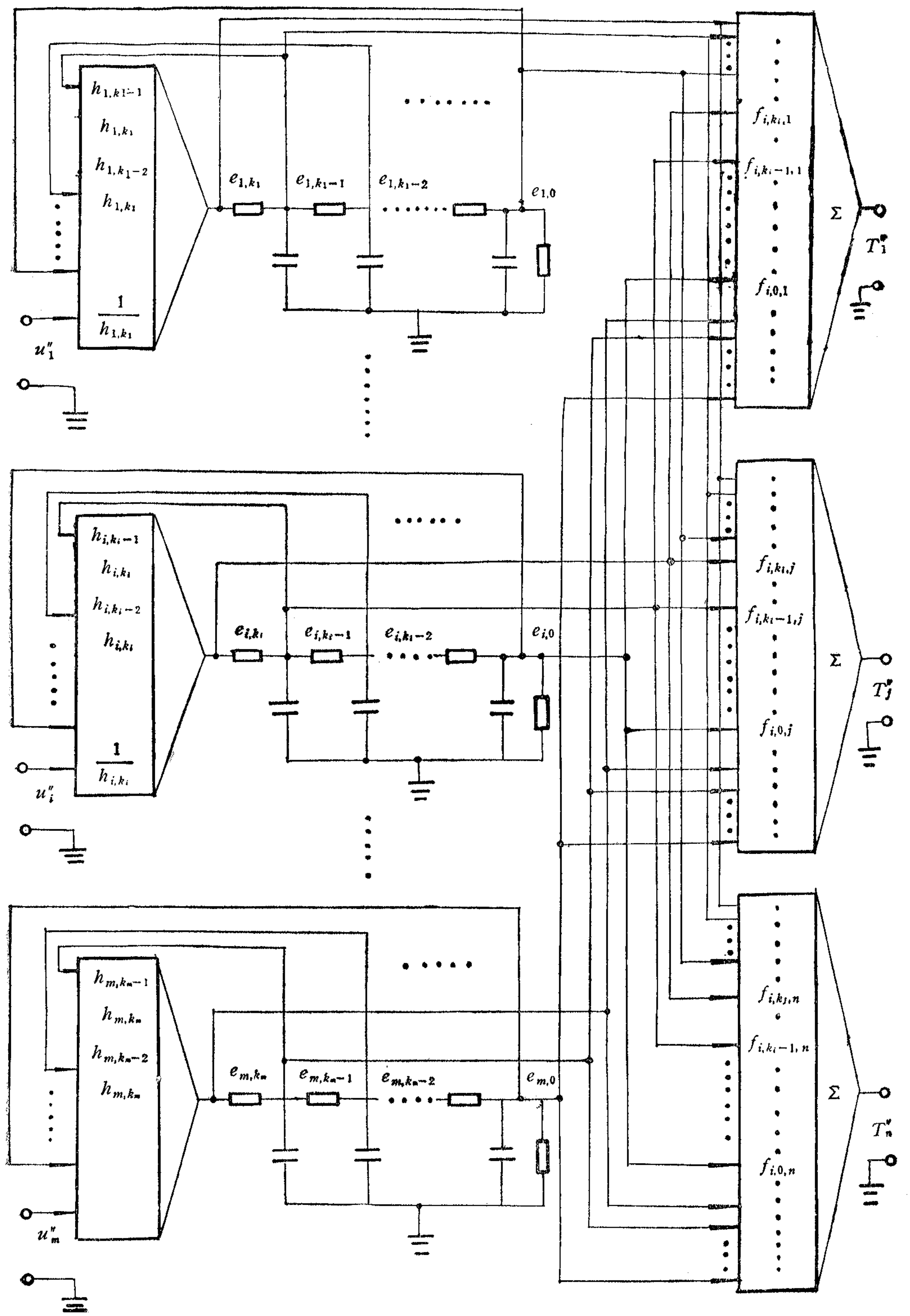

图1 G′(s) 的多端口有源网络实现

$$G''(s)=\left[\frac{t''_{i,j}(s)}{u''_i(s)}\right],\quad \begin{matrix} i=1,2,\cdots\cdots,m \\ j=1,2,\cdots\cdots,n \end{matrix} \tag{3}$$

要证明图 1 的多端口网络是传递矩阵 (2) 式的一个实现，只需证明 $G''(s)=G'(s)$.

根据传递矩阵定义[1]，在图 1 的网络中，任取一 u''_i 为输入，T''_j 为输出．对第 i 个输入加法器可列方程

$$u''_i\frac{1}{h_{i,k_i}}-e_{i,k_i-1}\frac{h_{i,k_i-1}}{h_{i,k_i}}-e_{i,k_i-2}\frac{h_{i,k_i-2}}{h_{i,k_i}}-\cdots\cdots-e_{i,0}\frac{h_{i,0}}{h_{i,k_i}}=e_{i,k_i}$$

即
$$u''_i(s)=e_{i,k_i}h_{i,k_i}+e_{i,k_i-1}h_{i,k_i-1}+\cdots\cdots+e_{i,0}h_{i,0} \tag{4}$$

取 RC 梯形网络的各并臂电压 $e_{i,k_i},e_{i,k_i-1}\cdots\cdots,e_{i,0}$ 为状态，它们均是关于 S 的多项式，可表成

$$e_{i,l}(s)=C_{i,l,l}S^l+C_{i,l,l-1}S^{l-1}+\cdots\cdots+C_{i,l,1}S+C_{i,l,0}$$
$$i=1,2,\cdots\cdots,m;\ l=k_i,\ k_{i-1},\cdots\cdots,1,0 \tag{5}$$

对于确定的 i，多项式 (5) 式中的系数构成三角形矩阵 Δ_i

$$\Delta_i=\begin{bmatrix} C_{i,k_i,k_i} & C_{i,k_i,k_i-1} & \cdots & & C_{i,k_i,1} & C_{i,k_i,0} \\ & C_{i,k_i-1,k_i-1} & C_{i,k_i-1,k_i-2} & \cdots & C_{i,k_i-1,1} & C_{i,k_i-1,0} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & C_{i,1,1} & C_{i,1,0} \\ & 0 & & & & C_{i,0,0} \end{bmatrix}$$

于是 (4) 式可以写成矩阵的形式

$$u''_i(s)=H_i\Delta_iS_i \tag{7}$$

式中，$H_i=[h_{i,k_i}\ h_{i,k_i-1}\cdots\cdots h_{i,1}\ h_{i,0}]$，它是第 i 个梯形网络的状态反馈系数行向量．

$$S_i=[S^{k_i}\ S^{k_i-1}\cdots\cdots S\ 1]^T$$

端口 j 上的输出 T''_j 由各梯形网络在该输出端口上的分向量组成

$$T''_j=[t''_{1,j}\ t''_{2,j}\cdots\cdots t''_{i,j}\cdots\cdots t''_{m,j}] \tag{8}$$

由传递矩阵定义知，仅当 u_i 为输入时在输出端口 j 上除 $t''_{i,j}$ 外，其余输入全部为零，(8) 式成为

$$T''_j=t''_{i,j} \tag{9}$$

这时对第 i 个输出加法器可列方程

$$t''_{i,j}(s)=e_{i,k_i}f_{i,k_i,j}+e_{i,k_i-1}f_{i,k_i-1,j}+\cdots\cdots+e_{i,0}f_{i,0,j} \tag{10}$$

写成矩阵的形式

$$t''_{i,j}(s)=F_{i,j}\Delta_iS_i \tag{11}$$

式中，

$$F_{i,j}=[f_{i,k_i,j}\ f_{i,k_i-1,j}\cdots\cdots f_{i,1,j}\ f_{i,0,j}]$$

于是图 1 多端口网络传递矩阵 (3) 式中的任一元素可表成

$$\frac{t''_{i,j}(s)}{u''_i(s)}=\frac{\boldsymbol{F}_{i,j}\boldsymbol{\Delta}_i\boldsymbol{S}_i}{\boldsymbol{H}_i\boldsymbol{\Delta}_i\boldsymbol{S}_i} \tag{12}$$

设需实现的传递矩阵(2)式中的任一元素为

$$\frac{t'_{i,j}(s)}{u'_i(s)}=\frac{\boldsymbol{B}'_{i,j}\boldsymbol{S}_i}{\boldsymbol{A}'_i\boldsymbol{S}_i} \tag{13}$$

式中，$\boldsymbol{A}'_i=[a'_{i,k_i}\ a'_{i,k_i-1}\cdots\cdots a'_{i,1}\ a'_{i,0}]$ 是多项式 $u'_i(s)$ 的系数向量。

$\boldsymbol{B}'_{i,j}=[b'_{i,k_i,j}\ b'_{i,k_i-1,j}\cdots\cdots b'_{i,1,j}\ b'_{i,0,j}]$ 是多项式 $t'_{i,j}(s)$ 的系数向量。

比较(12)和(13)式的系数有

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}'_i=\boldsymbol{H}_i\boldsymbol{\Delta}_i\\ \boldsymbol{B}'_{i,j}=\boldsymbol{F}_{i,j}\boldsymbol{\Delta}_i\end{cases} \tag{14}$$

对于给定的 $\boldsymbol{G}(s)$ 将其变换成 $\boldsymbol{G}'(s)$ 后，向量 $\boldsymbol{A}'_i$ 和 $\boldsymbol{B}'_{i,j}$ 即确定；按图1给出对应的网络结构和元件值后，状态的系数矩阵 $\boldsymbol{\Delta}_i$ 就容易求出；按(14)式可求得状态反馈向量 $\boldsymbol{H}_i$ 和交叉输出向量 $\boldsymbol{F}_i$，使(2)和(3)式相等，$\boldsymbol{G}'(s)=\boldsymbol{G}''(s)$，即证得图1的网络就是 $\boldsymbol{G}(s)$ 和 $\boldsymbol{G}'(s)$ 的一个实现.

例：下面的传递矩阵 $\boldsymbol{G}(s)$ 变换成 $\boldsymbol{G}'(s)$ 后

$$\boldsymbol{G}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{s+1}{s+4} & \dfrac{1}{s+6}\\ \dfrac{2}{s+4} & \dfrac{2s}{s+6}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{G}'(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{s^2+2s+1}{s^2+5s+4} & \dfrac{1}{s+6}\\ \dfrac{2s+8}{s^2+5s+4} & \dfrac{2s}{s+6}\end{bmatrix}$$

实现成的一个网络示于图2. 图中梯形网络的 R 和 C 元件值全取1. $\boldsymbol{G}'(s)$ 中各多项式的系数向量为：

$\boldsymbol{A}'_1=[1\ 5\ 4]$，$\boldsymbol{A}'_2=[1\ 6]$

$\boldsymbol{B}'_{1,1}=[1\ 2\ 1]$，$\boldsymbol{B}'_{1,2}=[0\ 2\ 8]$

$\boldsymbol{B}'_{2,1}=[0\ 1]$，$\boldsymbol{B}'_{2,2}=[2\ 0]$

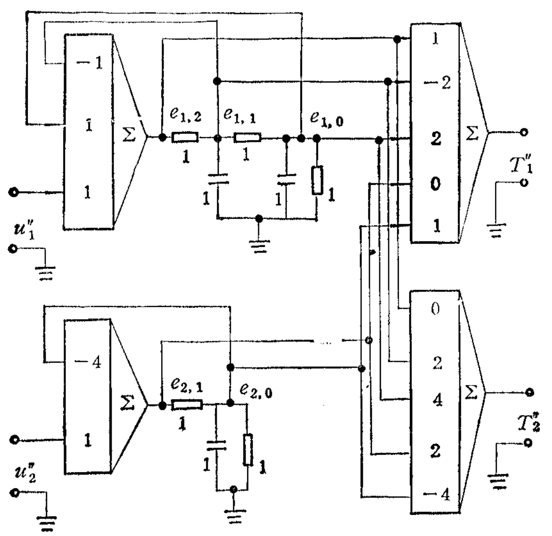

图2 例的实现网络

图中两个梯形网络的各个状态求得[2]为 $e_{1,2}=s^2+4s+3$，$e_{1,1}=e_{2,1}=s+2$，$e_{1,0}=e_{2,0}=1$，状态的系数阵为

$$\boldsymbol{\Delta}_1=\begin{bmatrix}1&4&3\\ &1&2\\ &&1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\Delta}_2=\begin{bmatrix}1&2\\ &1\end{bmatrix}$$

各加法器系数由(14)式求得为：$\boldsymbol{H}_1=[h_{1,2}\ h_{1,1}\ h_{1,0}]=[1\ 1\ -1]$，$\boldsymbol{H}_2=[h_{2,1}\ h_{2,0}]=[1\ 4]$，$\boldsymbol{F}_{1,1}=[f_{1,2,1}\ f_{1,1,1}\ f_{1,0,1}]=[1\ -2\ 2]$，$\boldsymbol{F}_{1,2}=[f_{1,2,2}\ f_{1,1,2}\ f_{1,0,2}]=[0\ 2\ 4]$，$\boldsymbol{F}_{2,1}=[f_{2,1,1}\ f_{2,0,1}]=[0\ 1]$，$\boldsymbol{F}_{2,2}=[f_{2,1,2} f_{2,0,2}]=[2\ -4]$.

参 考 文 献

[1] 贝卡利著，陈大培等译，网络分析与综合基础，人民教育出版社，1979 年，p. 197.
[2] 戴国胜，自动化学报，**10** (1984)4，338—344.

REALIZATION OF ARBITRARY TRANSFER FUNCTION MATRIX WITH ACTIVE MULTITERMINAL PORT NETWORK

Dai Guosheng
(Changjiang Shipping Science Research Institute, Wuhan)

Dai Danqian
(Huazhong University of Science and Technology, Wuhan)

Abstract A new simple method in which arbitrary transfer function matrix is realized with active multiterminal port network instead of computer simulating is proposed. The active multiterminal port network is carried on through state feedback and state cross output for RC ladder network. The main process is to determine coefficients of each adder. Finally, an example is given for illustration.

Key words Active Multi-port network; State feedback; State cross output