

估计相干源到达方位角的双向空间平滑技术*

赵滨生** 陆仲良
(国防科技大学电子技术系, 北京)

摘要 本文在 Evans 的空间平滑预处理技术基础上, 提出了双向空间平滑预处理技术, 并证明了后者在去相关、孔径的有效利用率以及孔径尺寸一定时, 阵列最多可分辨的相干源数目方面均优于前者。计算机仿真结果验证了上述结论。

关键词 阵列天线; 相干源; 双向空间平滑技术

一、引言

近年来, 由于迫切需要解决多路径干扰、低仰角跟踪、高分辨雷达成像等问题, 相干源的超角分辨技术越来越引起人们的关注。已有的技术, 如 J. Capon 的 MLM 及 Burg 的 MEM 已经成功地解决了独立源的超角分辨问题, 但在处理相关/相干源时, 却产生很大的角度偏差, 甚至无法分辨^[1]。R. Schmidt 提出的 MUSIC^[2] 及 T. S. Durrani 等人提出的特征矢量法 EVM^[3] 冲破了前两种方法的限制, 在信号源相关时, 仍能提供高的分辨率和角度的无偏估计。然而, 它们也不能分辨相干(即完全相关)的信号源。

为了解决相干源的超角分辨问题, Evans 提出了先对阵列接收信号进行空间平滑预处理的设想^[4]。T. J. Shan 等人对此过程进行了理论分析^[5], 并证明了当阵列天线的阵元数多于或等于信号源数目的两倍时, 空间平滑后, 原为奇异的信号源相关矩阵(相干源情况)被一等效的非奇异信号源相关矩阵(非相干源情况)所代替。而平滑后, 阵列信号的空间相关矩阵的最小特征矢量仍与信号源方向矢量正交, 这时, 使用 EVM 可有效地指示出各相干源的方位。然而, 这是以孔径的损失为代价的。

本文在 Evans 的空间平滑基础上, 提出了一种双向空间平滑预处理技术。与 Evans 的空间平滑相比, 双向空间平滑具有更好的去相关性、更大的孔径有效利用率, 而且, 阵列尺寸一定时, 双向空间平滑后可分辨的相干源数目也多。

二、阵列模型

图 1 是等间距放置的 p 个相同的全向天线。空间场中存在 q 个窄带平面波($q \leq p-1$)

* 1988 年 2 月收到。

** 现地址: 北京 9628 信箱 7 分箱。

1), 中心频率为 ω_0 , 入射角分别为 $\theta_1, \dots, \theta_q$. 设信号和噪声的统计特性如下:

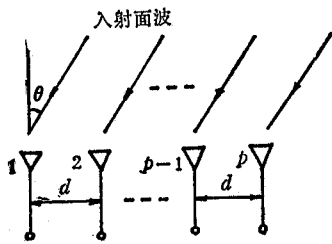


图1 天线阵示意图

$$E[n_i] = 0, E[n_i n_j^*] = \sigma_n^2 \delta_{ij}, E[s_k n_j^*] = 0$$

$$E[s_k s_l^*] = \sigma_k^2, \forall i, j = 1, \dots, p, k = 1, \dots, q$$

假设第1个阵元为参考阵元, 则第*i*个阵元上接收的信号为:

$$r_i(t) = \sum_{k=1}^q s_k(t) e^{j\omega_0(i-1)\sin\theta_k \cdot d/c} + n_i(t) \quad (1)$$

式中, $s_k(t)$ 为 t 时刻第 k 个信号源的复包络幅值, $n_i(t)$ 为 t 时刻第 i 个阵元上的附加噪声, d 为阵元间的间距, c 为电磁波传播的速度.

用矢量来表示 p 个阵元上的接收信号:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (2)$$

其中: $\mathbf{r}(t) = [r_1(t) \dots r_p(t)]^T$, $\mathbf{s}(t) = [s_1(t) \dots s_q(t)]^T$

$$\mathbf{n}(t) = [n_1(t) \dots n_p(t)]^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ e^{j\omega_0\tau_1} & \dots & e^{j\omega_0\tau_q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j\omega_0(p-1)\tau_1} & \dots & e^{j\omega_0(p-1)\tau_q} \end{bmatrix} \triangleq [\mathbf{a}(\theta_1) \dots \mathbf{a}(\theta_q)]$$

$\mathbf{a}(\theta_i) \triangleq [1 e^{j\omega_0\tau_1} \dots e^{j\omega_0(p-1)\tau_1}]^T$ 称为第 i 个信号源的方向矢量, $\tau_i = d \sin \theta_i / c, i = 1, 2, \dots, q$. T 为转置符号.

阵列接收信号的空间相关矩阵定义为:

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{r}(t)\mathbf{r}^H(t)] \quad (3)$$

H 为共轭转置符号. 将(2)式代入(3)式, 得到

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma_n^2\mathbf{I} \quad (4)$$

式中,

$$\mathbf{R}_s = E[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)], \quad E[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(t)] = \sigma_n^2\mathbf{I}$$

\mathbf{R}_s 为信号源的相关矩阵. 信号源非相干时, \mathbf{R}_s 为非奇异阵(即 \mathbf{R}_s 为满秩的); 信号源相干时, \mathbf{R}_s 为奇异阵(即 \mathbf{R}_s 不是满秩的). 文献[5]中证明了特征矢量法不能分辨相干源, 并指出这是由于相干源的 \mathbf{R}_s 为奇异的缘故. 空间平滑技术正是为了解决这一矛盾而提出的.

三、双向空间平滑

Evans 的空间平滑过程如图 2 所示, 以后称其为正向空间平滑. 将 L 个等间距放置的阵元分成若干个子阵列, 每个子阵列包含 p 个阵元, 第 k 个子阵列由阵元 $\{k, k+1, \dots, k+p-1\}$ 组成. 用 $\mathbf{r}_k(\cdot)$ 表示第 k 个子阵列接收的信号列矢量, 则

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_k(t) &= [r_k(t) r_{k+1}(t) \dots r_{k+p-1}(t)]^T \\ &= \mathbf{A}D^{(k-1)\mathbf{d}}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}_k(t) \end{aligned} \quad (5)$$

$D^{(k)}$ 为 $q \times q$ 对角矩阵 D 的 k 次幂,

$$D = \text{diag}\{e^{j\omega_0\tau_1}, \dots, e^{j\omega_0\tau_q}\}$$

$$\mathbf{n}_k(t) = [n_k(t) n_{k+1}(t) \cdots n_{k+p-1}(t)]^T$$

第 k 个子阵列的相关矩阵为:

$$R_k = E[\mathbf{r}_k(t) \mathbf{r}_k^H(t)] = AD^{(k-L)}R_s D^{H(k-L)}A^H + \sigma_n^2 I \quad (6)$$

正向空间平滑的相关矩阵为:

$$\bar{R} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M R_k = A\bar{R}_s A^H + \sigma_n^2 I \quad (7)$$

式中, $\bar{R}_s = \sum_{k=1}^M D^{(k-L)}R_s D^{H(k-L)}/M$ 为正

向空间平滑的等效信号源相关矩阵, $1 \leq M \leq L - p + 1$ 为参加空间平滑的子阵列数目.

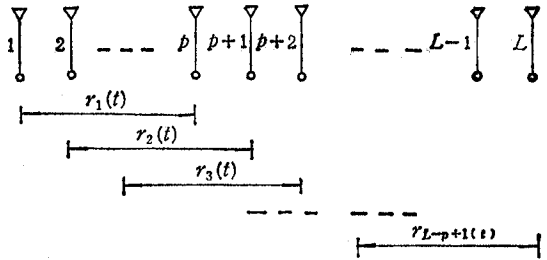


图2 正向空间平滑过程

文献[5]中证明了即便有相干源存在, 只要 $M \geq q$, 正向空间平滑的 \bar{R}_s 就是满秩矩阵. 在此基础上, 我们提出了双向空间平滑技术. 图3是双向空间平滑的示意图, 它实质上是正向空间平滑与反向空间平滑的联合过程.

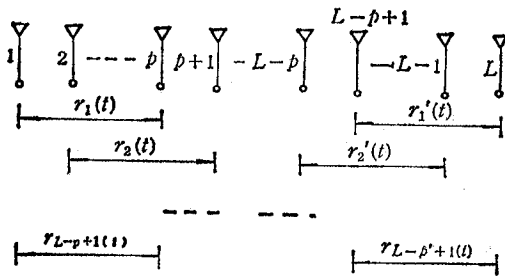


图3 双向空间平滑过程

先看一下反向空间平滑过程. 从右起第 1 个子阵列接收的信号列矢量为:

$$\mathbf{r}_1(t) = A^* D^{(L-1)} \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}_1(t) \quad (8)$$

式中,

$$\mathbf{r}_1'(t) = [r_L(t) r_{L-1}(t) \cdots r_{L-p+1}(t)]^T$$

$$\mathbf{n}_1(t) = [n_L(t) n_{L-1}(t) \cdots n_{L-p+1}(t)]^T.$$

从右起第 k 个子阵列接收的信号为:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_k(t) &= A^* D^{(L-1)} D^{-(k-L)} \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}'_k(t) \\ &= A^* D^{(L-k)} \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}'_k(t) \quad (9) \end{aligned}$$

第 k 个子阵列的空间相关矩阵定义为:

$$\begin{aligned} R'_k &= E[\mathbf{r}'_k(t) \mathbf{r}'_k^H(t)] \\ &= AD^{(k-L)}R_s^* D^{H(k-L)}A^H + \sigma_n^2 I \quad (10) \end{aligned}$$

反向空间平滑矩阵为 $\bar{R}' = \sum_{k=1}^M R'_k / M$, 将(10)式代入上式, 得

$$\bar{R}' = A\bar{R}'_s A^H + \sigma_n^2 I \quad (11)$$

式中

$$\bar{R}'_s = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M D^{(k-L)}R_s^* D^{H(k-L)} \quad (12)$$

我们定义双向空间平滑的空间相关矩阵为: $\bar{R} = (\bar{R} + \bar{R}')/2$ 于是有

$$\bar{R} = A\bar{R}_s A^H + \sigma_n^2 I \quad (13)$$

其中, $\bar{R}_i = \frac{1}{2M} \left(\sum_{k=1}^M D^{(k-D)} R_i D^{H(k-D)} + \sum_{k=1}^M D^{(k-L)} R_i^* D^{H(k-L)} \right)$ 为双向空间平滑后等效的信号源相关矩阵。

四、性能分析

本节将分析双向空间平滑技术的去相关性、孔径的有效利用率及孔径尺寸一定时,最多可分辨的相干源数目。

在考虑去相关性时,为了能得到明显的表达式,我们分析两信号源情况。此时,

$$\mathbf{s}(t) = [s_1(t)s_2(t)]^T$$

$$R_i = E[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho^* & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中 $\rho = E[s_1(t)s_2^*(t)]/\sigma_1\sigma_2$ 为两信号源的相关系数。两源相干(即 $s_1(t) = as_2(t)$, a 为一常数)时, $\rho = 1$ 。

将(14)式代入 \bar{R}_i 的表达式,有

$$\bar{R}_i = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M e^{-j\omega_0 T_1} \\ \sigma_1\sigma_2\rho^* \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M e^{j\omega_0 T_1} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

式中, $T_1 = (k-1)(\tau_2 - \tau_1)$ 。于是可得正向空间平滑等效信号源的相关系数:

$$\bar{\rho} = \rho \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M e^{-j\omega_0 T_1} = \rho \frac{1}{M} e^{-jT_2(M-1)} \frac{\sin(T_2 M)}{\sin T_2} \quad (16)$$

式中, $T_2 = \omega_0(\tau_2 - \tau_1)/2$ 。

将(14)式代入 \bar{R}'_i 的表达式,有

$$\bar{R}'_i = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho^* \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M e^{-j\omega_0 T_L} \\ \sigma_1\sigma_2\rho \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M e^{j\omega_0 T_L} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

式中, $T_L = (k-L)(\tau_2 - \tau_1)$ 。反向空间平滑等效信号源的相关系数为:

$$\bar{\rho}' = \frac{1}{M} \rho^* \sum_{k=1}^M e^{-j\omega_0 T_L} = \rho^* \frac{1}{M} e^{j\omega_0(\tau_2 - \tau_1)(L-1-(M-1)/2)} \frac{\sin(T_2 M)}{\sin T_2} \quad (18)$$

双向空间平滑等效信号源的相关系数:

$$\bar{\rho} = (\bar{\rho} + \bar{\rho}')/2 \quad (19)$$

将(16)式和(18)式代入(19)式,化简后得:

$$\bar{\rho} = \frac{1}{M} \rho e^{-i\tau_1(M-1)} e^{i\alpha} \frac{\sin(T_2 M)}{\sin T_2} \cos \alpha \quad (20)$$

式中, $\alpha = [\omega_0(\tau_2 - \tau_1)(L - 1) - 2\phi]/2$, $\rho = |\rho| e^{i\phi}$.

比值

$$|\bar{\rho}|/|\rho| = |\cos \alpha| \leq 1 \quad (21)$$

它表明双向空间平滑的去相关效果比正向空间平滑的去相关效果好。

我们在附录中证明了,对于双向空间平滑,子阵列个数 $M \geq q/2$ 时,等效的信号源相关矩阵 \bar{R}_s 就可满秩。在一般情况下(子阵列数 $p = q + 1$),当空中有 q 个相干点源需要分辨时,正向空间平滑至少要 $L = 2q$ 个阵元,而双向空间平滑只须要 $L' = [1.5q] + \frac{1 - (-1)^q}{2}$ 个阵元即可。由此可见,前者的孔径有效利用率只有 1/2,后者的却可达

2/3。再者,当阵元数目 L 一定时,正向空间平滑最多可分辨 $[L/2]$ 个相干源($[]$ 为取整符号),而双向空间平滑最多可分辨 $[2L/3]$ 个相干源。

最后,看一下计算量问题。考虑参加正向、双向空间平滑的子空间数目 M 分别满足 $M \geq q$ 及 $M \geq q/2$ 时,方可达到去相关的效果,在最小计算量情况下(即取正向空间平滑的 $M = q$,双向空间平滑的 $M = [q/2] + \frac{1 - (-1)^q}{2}$,当 q 为偶数时,正向、双向空间平滑的计算量相同,在求等效的空间相关矩阵时,均需做 $q \times (q + 1)^2$ 次复乘(子孔径尺寸取为 $p = q + 1$);当 q 为奇数时,在求等效的空间相关矩阵时,双向空间平滑比正向空间平滑多做 $(q + 1)^2$ 次复乘。若要达到最好的去相关效果(即取 $M = L - q + 1$),双向空间平滑的计算量比正向空间平滑的计算量多一倍。

五、计算机仿真结果及结论

下面给出计算机仿真结果,并对采用正向、双向空间平滑及无空间平滑(称为一般方法)预处理的特征矢量谱进行比较。

在模拟过程中,假设空间有两个窄带平面波点源,它们的功率为 σ_1^2 、 σ_2^2 ,相关系数为 ρ ,信号源与噪声独立,噪声为阵元白噪声,其功率 σ_n^2 取为 1。线性阵由 L 个阵元组成,阵元间距 $\lambda/2$ 。为了避免假峰的出现,子孔径尺寸取为 $p = 3$ 。

图 4 是 $L = 3$ 的情况,此时正向空间平滑即为一般方法。一定快拍数(在同一瞬间对所有阵元采样,称为一次快拍)后,双向空间平滑可将两相干源($\rho = 1$)分开(图 4(b)),而一般方法无论多少快拍后均无法将两相干源分开(图 4(a))。图 5 示出了四阵元分辨两等强度相干源时,快拍数对谱的影响。快拍数增多,谱峰变得尖锐、准确;在同样快拍下,双向空间平滑后产生的谱比正向空间平滑后产生的谱效果好。图 6 是不等强度信号源对谱的影响。我们发现,当两源功率都比较大时(如 20dB 和 10dB),产生的谱很快就出现两个尖锐而准确的峰(图 6(a)),但只要两源中有一个源的功率较小时(如 5dB 和 20dB),大量快拍后,在小功率信号源处出现的谱峰仍很平坦且易产生角度偏差(图 6(b))。

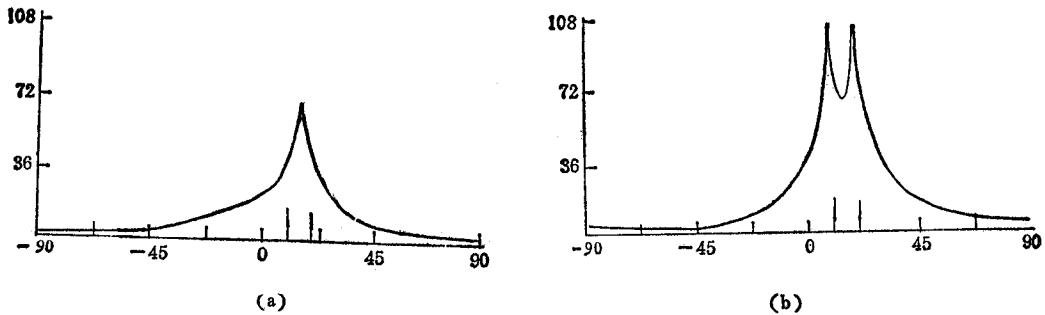


图4 一般方法产生的谱 (a) 和双向空间平滑后产生的谱 (b) $L=3$, 两等功率源 $SNR=20dB$, $\theta_1=10^\circ, \theta_2=20^\circ, \rho=1$, 151 快拍

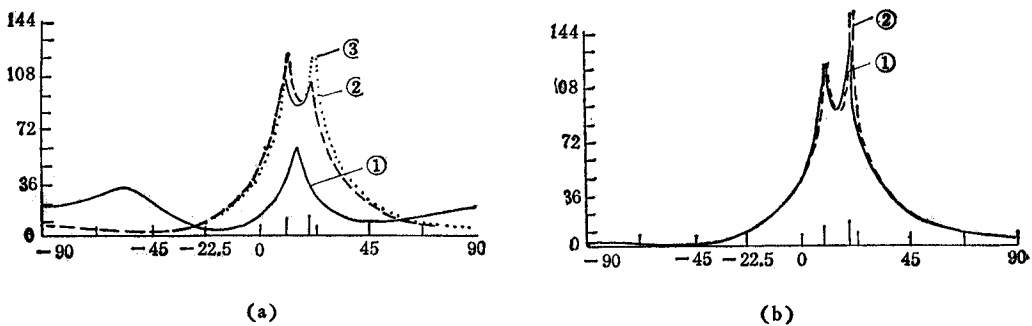


图5 快拍对谱的影响

$L=4, p=3$, 两等功率源 $SNR=20dB, \theta_1=10^\circ, \theta_2=20^\circ, \rho=1$
 (a) 正向空间平滑后产生的谱 (1) 51 快拍 (2) 251 快拍 (3) 500 快拍
 (b) 双向空间平滑后产生的谱 (1) 51 快拍 (2) 500 快拍

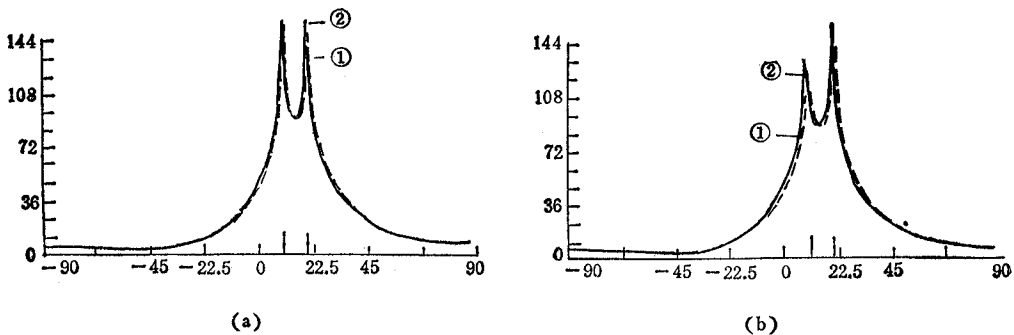


图6 信噪比 SNR 对谱的影响

$L=8, p=3, \theta_1=10^\circ, \theta_2=20^\circ, \rho=1$, 500 快拍
 (a) $SNR_1=20dB, SNR_2=10dB$ ① 正向空间平滑 ② 双向空间平滑
 (b) $SNR_1=5dB, SNR_2=20dB$ ① 正向空间平滑 ② 双向空间平滑

附录 \bar{R}_s 为满秩的证明

双向空间平滑等效信号源相关矩阵为:

$$\bar{R}_s = \frac{1}{2M} \left\{ \sum_{i=1}^M [D^{(k-1)} R_s D^{H(k-1)} + D^{(k-L)} R_s^* D^{H(k-L)}] \right\}$$

$$= [ID \cdots D^{(M-1)} D^{(1-L)} \cdots D^{(M-L)}] \begin{bmatrix} \frac{1}{2M} R_s & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & \frac{1}{2M} R_s & & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & & \\ & & & & \frac{1}{2M} R_s^* & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & \frac{1}{2M} R_s^* & & & & \\ & & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & \frac{1}{2M} R_s^* & & \\ & & & & & & & & & \frac{1}{2M} R_s^* & \\ & & & & & & & & & & \frac{1}{2M} R_s^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ D^{-1} \\ \vdots \\ D^{-(M-1)} \\ D^{-(1-L)} \\ \vdots \\ D^{-(M-L)} \end{bmatrix}$$

$$\triangleq UU^H \quad (A-1)$$

U 为 $q \times 2qM$ 矩阵:

$$U = [Q_1 D Q_1 \cdots D^{(M-1)} Q_1 D^{(1-L)} Q_2 \cdots D^{(M-L)} Q_2] \quad (A-2a)$$

式中

$$Q_1 Q_1^H = \frac{1}{2M} R_s \quad (A-2b)$$

$$Q_2 Q_2^H = \frac{1}{2M} R_s^* \quad (A-2c)$$

于是有 $Q_2 = Q_1^*$, 它们均为 $q \times q$ 矩阵, 设

$$Q_1 = \begin{bmatrix} a_{11} + jb_{11} & \cdots & a_{1q} + jb_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1} + jb_{q1} & \cdots & a_{qq} + jb_{qq} \end{bmatrix} \quad (A-3a)$$

则

$$Q_2 = \begin{bmatrix} a_{11} - jb_{11} & \cdots & a_{1q} - jb_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1} - jb_{q1} & \cdots & a_{qq} - jb_{qq} \end{bmatrix} \quad (A-3b)$$

由(A-1)式知, $\text{rank}(\bar{R}_s) = \text{rank}(U)$

根据矩阵知识, 重新排列矩阵的行和列, 不改变矩阵的秩. 于是, 考虑(A-2a)式, 有下式成立:

$$\text{rank}(U) = \text{rank} \begin{bmatrix} a_{11} b_1 + jb_{11} b'_1 & \cdots & a_{1q} b_1 + jb_{1q} b'_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1} b_q + jb_{q1} b'_q & \cdots & a_{qq} b_q + jb_{qq} b'_q \end{bmatrix} \quad (A-4a)$$

其中

$$b_i = [1 e^{j\omega_0 \tau_i} \cdots e^{j\omega_0(M-1)\tau_i} e^{j\omega_0(1-L)\tau_i} \cdots e^{j\omega_0(M-L)\tau_i}] \quad (A-4b)$$

$$b'_i = [1 e^{j\omega_0 \tau_i} \cdots e^{j\omega_0(M-1)\tau_i} - e^{j\omega_0(1-L)\tau_i} \cdots - e^{j\omega_0(M-L)\tau_i}] \quad (A-4c)$$

$$i = 1, 2, \dots, q.$$

要想证明 \bar{R}_s 满秩(即证明 U 满秩), 只须证明下面两点成立即可.

(1) Q_1 、 Q_2 矩阵的同一行中至少有一个元素不为零;

(2) 矢量组 $\{b_1, \dots, b_q\}$ 、 $\{b'_1, \dots, b'_q\}$ 以及它们之间的各个矢量线性不相关.

先证(1). 用反证法: 假设 Q_1 、 Q_2 两矩阵中的第 m 行元素全为零, 由(A-2b)、(A-2c)式, 必得第 m 个信号源功率为零的结论, 这与空中存在 q 个源矛盾. 故命题(1)得

证。

再证(2)。由线性代数知识可知,当 $2M \geq q$, 即 $M \geq \frac{q}{2}$ 时, 矢量 $\{b_1, \dots, b_q\}$ 、 $\{b_1, \dots, b'_q\}$ 中的各个矢量线性不相关, (A-4b) 和 (A-4c) 式又保证这两组矢量之间线性不相关。

到此, 我们证明了, 当 $M \geq \frac{q}{2}$ 时, \bar{R} 满秩。

参 考 文 献

- [1] W. Gabriel, *Proc. IEEE* 68(1980), 654—656.
- [2] R. Schmid: *Proc. RADC, Spectrum Estimation Workshop, Rome, N Y., Oct., 1979.*
- [3] T. S. Durrani, K. C. Sharman, *IEE Proc. F and H.* 130(1983) 1, 22—28.
- [4] T. J. Evans, J. R. Johnson, D. F. Sun, *Proc. 1st ASSP Workshop Spectral Estimation, Hamilton, Ont., Canada, 1981.*
- [5] T. J. Shan, M. Wax T. Kailath, *IEEE Trans. On ASSP, ASSP-33* (1985) 4, 806—811.

ON TWO-DIRECTION SPATIAL SMOOTHING FOR ESTIMATING ANGLE-OF-DIRECTION OF COHERENT SIGNALS

Zhao Binsheng Lu Zhongliang

(National University of Defense Technology, Beijing)

Abstract Based on Evans' spatial smoothing preprocessing scheme, a new approach called two-direction spatial smoothing preprocessing method is presented. It is proved that the decorrelation, the effective aperture and the maximum number of distinguishable coherent signals (when array size is given) of the new method are better than those of the Evans' method. Simulation results give a comparison between the eigenvector spectrums produced by the two methods.

Key words Array antenna; Coherent signal; Two-direction spatial smoothing method