

用算子理论求解和计算异形波导的截止频率¹

徐 诚 张 晓 娟 宋 文 森

(中国科学院电子学研究所 北京 100080)

摘 要 该文用矢量偏微分算子理论通过虚拟边界的电场和磁场的匹配求解特殊结构的异形波导的截止频率。这一方法可以精确而方便地求出几乎所有模式的截止频率。本方法也可以计算带脊波导和其它矩形金属加载的异形波导的传播特性。

关键词 矢量偏微分算子, 并矢格林函数, 异形波导, 截止频率

中图分类号 TN814

1 引 言

我们曾提出过用矢量偏微分算子理论来求解电磁场本征函数的方法^[1,2]。这种方法不仅可以用于解析方法也可以用于数值方法, 并指出这一方法可以解决经典理论中无法去除的无旋场的干扰问题, 防止由此引起的“非物理模”的影响。在文献 [1] 中已经给出了求解复合系统本征问题的基本方法。图 1 表示了由两个规则系统耦合在一起的复合系统。其中 S_d 表示金属边界, 而 S_{II} 表示耦合边界, 它只是一种实际上并不存在虚拟边界, 在图 1 中用虚线来表示这一虚拟边界, 它把系统分为两个完整的规则边界系统。我们通过并矢格林函数的方法把虚拟边界上的电场和磁场耦合起来, 得到

$$\sum_v A_v \left\{ \sum_\mu \frac{1}{\mu^2 - k^2} \int_{S_{II}} F_{II}(\mu, R) \cdot F_{II}(\chi, R) ds \int_{S_{II}} F_{II}(\mu, R') \cdot F_{II}(v, R') ds' + \sum_\lambda \frac{1}{\lambda^2 - k^2} \int_{S_I} F_I(\lambda, R) \cdot F_{II}(\chi, R) ds \int_{S_I} F_I(\lambda, R') \cdot F_{II}(v, R') ds' \right\} = 0$$
$$v = 1, 2, \dots, N, \quad \chi = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

这里, F_I 和 F_{II} 分别表示 I 和 II 区的旋量场的本征函数。其几何空间的宗量 R 和 R' 分别表示场空间和源空间。本征矢量宗量分成了 μ, v, λ 和 χ 四个, 它们分别表示 I 区和 II 区的展开函数与权函数。 k 为待求的复合系统的本征值。从这里可以看到矢量偏微分算子理论把电磁场的并矢格林函数问题归结为旋量场子空间内泛函分析中的最佳逼近原理^[2-4]。由于并矢格林函数中的展开函数和权函数都是本征函数, 只要能够证明所取的本征函数序列是完备的, 它的计算精度就可以无限地接近精确解, 通常也就把它称为解析解。

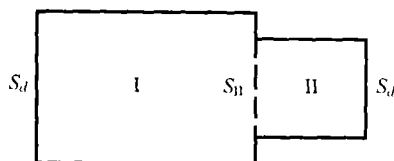


图 1 复合系统示意图

¹ 1999-11-30 收到, 2000-03-29 定稿

国家自然科学基金 (No.69871028) 资助课题

2 异形波导截止频率的数学推导

限于篇幅本文中只讨论如图 2 所示的异形腔结构. 这一结构中由于对于 y 方向来说是均匀的, 所以可以把 y 方向的本征值和本征函数分离出来, 只要求出对应与 xz 面上二维结构的解, 就可以求出异形腔的本征函数系或异形波导的传播常数. 下面我们写出这一具体结构二维问题的本征方程. 一个完备的本征函数系应包含 M 和 N 两类矢量波函数. 对于规则系统, 这两类矢量波函数都是独立的. 为了方便起见把图 2 画成 xz 截面上的平面图 (如图 3), 并给出与下面运算相一致的坐标系. 在本文中我们只考虑 M 类函数, 由于 y 方向的可分离性, 我们先认为本征函数与 y 方向无关的情况. M 类磁矢量波函数可以表示为

$$\mathbf{M}_k = (1/k)\nabla \times \nabla \times \psi_{m,k}(x, z)y \quad (2)$$

其中 $\psi_{m,k}$ 应满足

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \psi_m + k^2 \psi_m &= 0, & \text{在域 } v \text{ 内} \\ \partial \psi_m / \partial n &= 0, & \text{在边界上} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

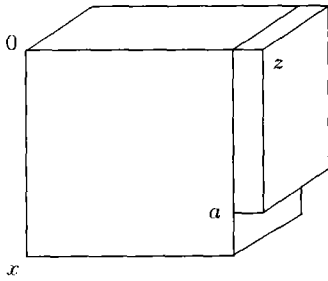


图 2 在正方体中去掉一块长方体的谐振腔结构

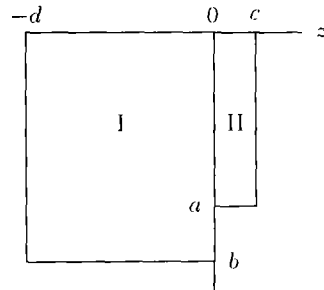


图 3 图 1 结构的 xz 截面及其坐标系

(3) 式对于 I 区和 II 区都适用, 特别需要说明的是其边界条件对于耦合边界同样适用. 当本征值不同时, k 可以用不同的本征值来代替. 下面我们把 (1) 式中的积分形式加以简化, 我们取其中任意一个积分为例:

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \mathbf{F}_I(\lambda, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{F}_{II}(\chi, \mathbf{R}) ds &= \int_{S_1} \frac{1}{\lambda} \nabla \times \nabla \times \psi_{m,\lambda}^I \hat{y} \cdot \frac{1}{\chi} \nabla \times \nabla \times \psi_{m,\chi}^{II} y ds \\ &= \int_{S_1} \frac{1}{\lambda \chi} [\nabla \times \psi_{m,\lambda}^I \hat{y}] \cdot [\nabla \times \nabla \times \nabla \times \psi_{m,\chi}^{II} y] ds \\ &\quad + \oint_I \frac{1}{\lambda \chi} [\nabla \times \psi_{m,\lambda}^I \hat{y}] \cdot [\nabla \times \nabla \times \psi_{\chi}^{II} y] \cdot t dl \\ &= \int_{S_1} \frac{1}{\lambda \chi} [\nabla \times \psi_{m,\lambda}^I \hat{y}] \cdot [\nabla \times \nabla \times \nabla \times \psi_{m,\chi}^{II} y] ds \\ &= \int_{S_1} \frac{\lambda}{\chi} [\nabla \times \psi_{m,\lambda}^I \hat{y}] \cdot [\nabla \times \psi_{m,\chi}^{II} y] ds \\ &= \int_{S_1} \psi_{m,\lambda}^I \psi_{m,\chi}^{II} ds \end{aligned} \quad (4)$$

其中第一和第二个等号后的变换可以称为面矢量格林定理, 最后一个等号后的变换是重复上面的过程。这样, 矢量场的问题变换为标量波函数的问题了。对于其它 3 个面积分也有完全相同的变换。下面写出标量波函数的表达式, 在 y 方向不变的情况下有, 其中三角函数前的分式为归一化常数:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{m\lambda}^I &= \frac{(2 - \delta_l^0)(2 - \delta_j^0)}{bd} \cos \frac{l\pi}{b} x \cos \frac{j\pi}{d} z \\ \psi_{m\lambda}^{II} &= \frac{(2 - \delta_{l'}^0)(2 - \delta_{j'}^0)}{ac} \cos \frac{l'\pi}{a} x \cos \frac{j'\pi}{c} z \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

由于 y 方向本征值为 0, 本征矢量 λ 被两个标量本征值 l 和 j 代替, 本征值 χ 被 l' 和 j' 代替。(1) 式是对于系数 A_v 的齐次代数方程组, 为了求出其非零解要求其系数行列式等于零, 即

$$\Delta(W(k)) = 0 \quad (6)$$

现在我们已经能够很容易求出 (1) 式中的 4 个积分项, 因而可以计算出本征值 k 。从本征值 k 再从 (1) 式求出系数 A_v , 由 A_v 可以求出耦合边界上的切向电场:

$$\hat{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{R}') = \sum_v A_v \mathbf{F}_{II}(v, \mathbf{R}') \quad (7)$$

最后由切向电场求出整个复合系统内的磁场或电场:

$$\mathbf{H}(\mathbf{R}) = i\omega\mu_0 \int_{S_1} \{ \mathbf{G}_H \cdot [\hat{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{R}')] \} ds' \quad (8)$$

或

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = i\omega\epsilon_0 \int_{S_1} \{ \mathbf{G} \cdot [\hat{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{R}')] \} ds' \quad (9)$$

这里所求出的只是横电模的横向本征值和横向的场分布, 加上 y 方向上的本征值和场变化就可得到全部横电模的本征值和场型。当然, 这里说的全部本征值只是理论上的概念, 因为本征值的数目是无限的, 但是只要我们对于规则的本征函数系取足够多的项, 从理论上我们就可以求出所需要的任意数目的复合系统的本征值和本征函数。

对于横磁模也可以用同样方法进行, 只是其对应的规则边界的标量波函数的边界条件用第一类齐次边界条件, 即 (6) 式中的函数由余弦函数变为正弦函数。上面的分析过程及以下的数值方法就不再重复。

3 计算方法及结果

现在我们把 (1) 式写成代数方程的标准形式, 系数用 $W_{v\lambda}$ 表示, 得

$$\sum_{v=1}^M A_v W_{v\lambda} = 0, \quad \chi = 1, 2, \dots, N \quad (10)$$

其中

$$W_{v\lambda} = W_{v\lambda 1} + w_{v\lambda 2} \quad (11)$$

由于不考虑 y 方向的场变化, 从 (6) 式有

$$\mu^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 \text{ 和 } \lambda^2 = \left(\frac{l\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{j\pi}{d}\right)^2 \quad (12)$$

下面我们来计算 $W_{v\chi_1}$ 和 $W_{v\chi_2}$. 把 (5) 和 (11) 式代入 (12) 式, 注意现在矢量本征值 μ 和 λ 已分别由正整数 m, n 和 l, j 所代替, 同样用 m', n' 和 l', j' 来代替 ν 和 χ , 可得

$$\begin{aligned} W_{v\chi_1} &= \sum_{m=0}^{N'} \sum_{n=0}^{N'} \frac{(2 - \delta_m^0)(2 - \delta_n^0)}{ac} \frac{1}{(m\pi/a)^2 + (n\pi/c)^2 - k^2} \\ &\times \int_0^a \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{c} z \cos \frac{l'\pi}{a} x \cos \frac{j'\pi}{c} z dx \\ &\times \int_0^a \cos \frac{m'\pi}{a} x' \cos \frac{n'\pi}{c} z' \cos \frac{m'\pi}{a} x' \cos \frac{n'\pi}{c} z' dx' \end{aligned} \quad (13)$$

和

$$\begin{aligned} W_{v\chi_2} &= \sum_{l=0}^{N'} \sum_{j=0}^{N'} \frac{(2 - \delta_l^0)(2 - \delta_j^0)}{bd} \frac{1}{(l\pi/b)^2 + (j\pi/d)^2 - k^2} \\ &\times \int_0^b \cos \frac{l\pi}{b} x \cos \frac{j\pi}{d} z \cos \frac{l'\pi}{b} x \cos \frac{j'\pi}{d} z dx \\ &\times \int_0^a \cos \frac{l\pi}{b} x' \cos \frac{j\pi}{d} z' \cos \frac{m'\pi}{a} x' \cos \frac{n'\pi}{c} z' dx' \end{aligned} \quad (14)$$

(13) 和 (14) 式的和式是一种“病态”的形式, 不容易收敛, 为了节省计算时间和保证计算精度, 我们先求出它的原函数. 这一原函数实际上就是并矢格林函数的直接求解形式^[1]. 把和式与积分的次序变换一下, 先求和式, 以 (14) 式为例:

$$\begin{aligned} W_{v\chi_2} &= \frac{2 - \delta_l^0}{b} \sum_{l=0}^{N'} \int_0^a dx' \int_0^b dx \left\{ \left[\frac{1}{d} \sum_{j=0}^{N'} \frac{2 - \delta_j^0}{(j\pi/d)^2 - k_{g2}^2} \cos \frac{j\pi}{d} z \cos \frac{j\pi}{d} z' \right] \right. \\ &\times \left. \cos \frac{l\pi}{b} x \cos \frac{l'\pi}{b} x \right\} \cos \frac{l\pi}{b} x' \cos \frac{m'\pi}{a} x' \\ &= \frac{2 - \delta_l^0}{b} \sum_{l=0}^{N'} \int_0^a \cos \frac{l\pi}{b} x' \cos \frac{m'\pi}{a} x' dx' \int_0^b \cos \frac{l\pi}{b} x \cos \frac{l'\pi}{b} x dx \\ &\times \begin{cases} -\frac{1}{k_{g2}} \frac{\cos k_{g2}(d - z') \cos k_{g2}z}{\sin kd}, & 0 > z > z' \\ -\frac{1}{k_{g2}} \frac{\cos k_{g2}(d - z) \cos k_{g2}z'}{\sin kd}, & z' \leq z < d \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

对现在这个简单问题来说, 矩阵元素中实际上只有 x 方向的积分, 但是 z 方向的函数与求和式有关, 先必须保留, 在求出源函数后, 就可以代入 z 和 z' 的值. 由于 z 和 z' 都为 0, (15) 式中的格林函数就变得很简单. 其中

$$k_{g2} = \sqrt{k^2 - (l\pi/b)^2} \quad (16)$$

当 $l\pi/b > k$ 时, (16) 式中的正弦和余弦函数都变换成虚宗量的函数, 实际上只是一个双曲正切函数. 先把 (15) 式中的两个积分求出来

$$\int_0^a \cos \frac{l\pi}{b} x' \cos \frac{m'\pi}{a} x' dx' = (-1)^{m'} (2 - \delta_{m'}^0) \frac{\sin[(l\pi a)/b]}{(l\pi/b)} \left\{ 1 - \left(\frac{m'b}{la} \right)^2 \right\}^{-1} \quad (17)$$

把 (17) 式及另一个类似的积分代入 (15) 式, 并用 m', l' 代替 v, χ 得

$$W_{m'l'2} = (-1)^{m'+l'} (2 - \delta_{m'}^0)(2 - \delta_{l'}^0) \sum_{l=0}^{N'} \left[\frac{\sin(l\pi a/b)}{(l\pi/b)} \right]^2 \times \frac{-\cot k_{g2} d}{k_{g2} b \{1 - [m'b/(la)]^2\} \{1 - [l'b/(la)]^2\}} \quad (18)$$

式中当 $l=0$ 而 m' 或 l' 不等于零时是奇点, 这时 $W_{m'l'2} = 0$. 当 m' 和 l' 都等于零时, 和式的第一项, 按极限运算法则应为 1.

$W_{m'l'1}$ 的结果更简单, 因为积分

$$\int_0^a \cos \frac{m\pi}{a} x' \cos \frac{m'\pi}{a} x' dx' = \frac{a}{(2 - \delta_m^0)} \delta_{mm'} \quad (19)$$

这里, $\delta_{mm'}$ 为一般的 Kronecker δ 函数, δ_m^0 表示 $m=0$ 时, 函数值取 1, 不等于 0 时取 0. 格林函数的形式与 II 区类似, 只是用 c 代替 d 用 k_{g1} 代替 k_{g2} . 由此可得

$$W_{m'l'1} = \sum_{m=0}^{N'} (2 - \delta_m^0)^2 \delta_{mm'} \delta_{m'l'} \frac{-\cot k_{g1} c}{k_{g1} a} = (2 - \delta_{m'}^0)^2 \delta_{m'l'} \frac{-\cot k_{g1} c}{k_{g1} a} \quad (20)$$

$W_{m'l'1}$ 是一个对角矩阵.

方程 (6) 式是无限维的, 作为近似解可将其截断为有限维方程. 这里和式的项数 $n = 1, 2, \dots, N'$, 矩阵的阶数为 $m', l' = 0, 1, 2, \dots, N$, 一般来说和式的项数与矩阵的阶数都是可以独立地任意选的. 矩阵的阶数相当于展开函数的阶数, 它取决于所求解的本征值和本征模式的阶数, 当然应该比希望得到的本征值的个数大得多, 这样才能保证所得的最高阶的本征值的精确性, 而 N' 的取值大于展开函数的阶数时并不能增加计算精度, 所以我们选择 N 和 N' 相等, 这样表示系数行列式等于零的 (10) 式是一个 $(N+1)$ 维的线性代数方程组. 为了计算所对应的 k 值, 即为截面形状为图 3 的波导的截止频率. 对于给定的结构参数, 只要选择足够大的 N 值, 原则上可以求出任意高次的 TE 模式. 这些模式的本征值就是异形波导的对应模式的截止频率; 只要在波导上加两个导体短路板构成谐振腔, 加上纵向的本征值, 即可求出不同模式的谐振频率. 作为一个典型的例子, 我们对某一波导进行了详细的计算. 波导的截面尺寸为 $a = 2.0\text{cm}$, $b = 2.5\text{cm}$, $c = 0.5\text{cm}$, $d = 2.0\text{cm}$. 波导的尺寸单位定为厘米, 实际上并没有关系, 只要让求得的本征值与结构尺寸的单位一致就可以了. 当只计算最低次本征值时 (相当于 $\text{TE}_{10}/\text{TE}_{01}$ 模) 取五阶行列式得到的精度已达到 1% 以上, 见表 1 及图 4. 我们希望看一看直到 TE_{22} 模的 5 个模式 (包括简并模实际上有 8 个模式), 所以取 $N = N' = 20$, 表 2 和图 5 给出了八个模式的截止频率的计算结果.

表 1 TE₀₁/TE₁₀ 模的计算结果

N	k
1	1.19596
2	1.23113
3	1.23476
4	1.23652
5	1.23702
6	1.23707
7	1.23712
8	1.23719
9	1.23725
10	1.23728

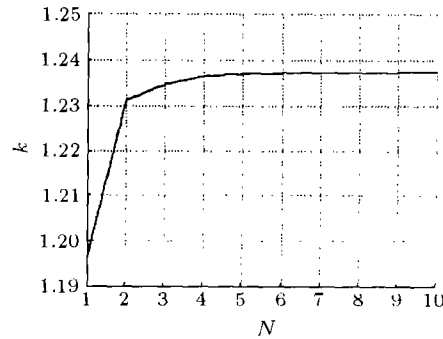
图 4 TE₀₁/TE₁₀ 模的 k 值随 N 增大的收敛情况

表 2 各模式的本征值

模式	k	k_0
TE ₁₀ /TE ₀₁	1.2373/1.3299	1.25664
TE ₁₁	1.8879	1.77715
TE ₂₀ /TE ₀₂	2.2845/2.5783	2.51327
TE ₂₁ /TE ₁₂	2.7361/3.1069	2.80993
TE ₂₂	3.5306	3.55431

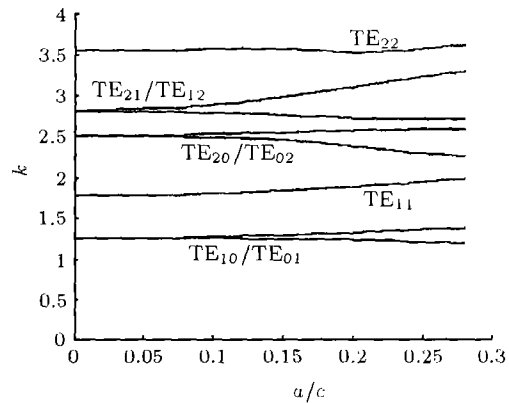


图 5 波导的 TE 模式特性图

4 讨论和小结

计算时先对某一范围的 k 值, 以一定的步长进行行列式值的计算, 可以画出大致的行列式值的图形和零点分布, 可以看出: (1) 函数分布与 k 的初始取值有关, 初值不同其图形的大小和走向都不同. (2) 行列式的值除了有零点为系统的本征值外, 还有很多“极点”, 这与文献 [1] 中指出的规则系统的格林函数是亚纯函数的特性相关, 由于这里是应用格林函数来进行场匹配的, 当某一 k 值下其中某一个区域的格林函数趋于无限大时, 行列式中的某些元素也会趋于无限大, 造成奇点. 有时这种奇异性还能产生虚假的零点, 一般说来, 陡度极大的线上的零点并不是真正的本征值. 表 2 中的本征值是在行列式值分布图的基础上, 在每一个零点附近取一个很小的范围, 再用对分区间法精确求根后得到的, 表 2 中的 k_0 表示对应的正方体的本征值. 图 5 是当切角增大时, 各模式截止频率变化的情况, 可以看出, 耦合模式在有切角时截止频率会分裂, 而且随着切角增大截止频率分裂会增大. 只要在该段波导上加两个导体短路板构成波导谐振腔, 双模式相应的谐振频率也是不同的.

戴振铎教授的并矢格林函数理论在电磁场理论的发展上无疑有其重大的意义, 但是由于当时还没有关于矢量偏微分算子的严格理论, 他的只以 M 和 N 函数表示的并矢格林函数 [5] 一直被认为是不完备的, 而改进以后的并矢格林函数的形式又过于复杂 [6], 影响了这一重要的方法的实际应用. 在实际应用中基本上都只是用标量的格林函数, 用标量格林函数或直接用场匹配方法来求复合系统的本征问题的工作 [7-10], 一般都只对二维系统中的最低模式. 有了矢量

偏微分算子的理论, 并矢格林函数的形式大大简化了, 可以用两个标量函数来表示, 这样就为严格解决复合系统的本征问题创造了条件。本文中尽管还只是考虑二维系统, 但是已经可以得到“所有”某一次模式以前的本征值和本征模式。用这一方法不仅可以计算如脊波导等实用的异形波导的传播特性, 同样可以解决所有由垂直的金属块加载的三维的谐振腔和微波网络的问题。这一基于解析的方法有极高的精度, 而且收敛很快, 不会出现伪模。因而, 对于总体结构不规则, 但能分解成若干规则区域的谐振腔、波导和微波网络设计都有普遍的意义。

参 考 文 献

- [1] 宋文森, 并矢格林函数和电磁场的算子理论, 合肥, 中国科技大学出版社, 1991, 第三, 九章.
- [2] 宋文森, 矢量偏微分算子, 北京, 科学出版社, 1999, 第三章.
- [3] Ren Xiaoyu, Ma Jifu, Zhang liyang, Song Wenmiao, Operator theory for solving eigenvalue problem of electromagnetic field, 1997, Asia Pacific Microwave Conference, Hong Kong, 769-772.
- [4] 宋文森, 用函数空间理论求解标量波动方程和泊松方程的反演问题, 电子科学学刊, 1985, 7(5), 341-347.
- [5] C. T. Tai. Dyadic Green's Function in Electromagnetic Theory, Scratton, Pa. Intent Educational Publiers, 1971, Chapter 3.
- [6] 戴振铎, 鲁述, 电磁场理论中的并矢格林函数, 武汉, 武汉大学出版社, 1995, 第三章.
- [7] M. Jaworski, On the resonant frequency of a resonant cylindrical cavity, IEEE Trans. on MTT, 1987, MTT-26(4), 256-260.
- [8] A. G. Millamson, The resonant frequency and turning characteristics of a narrow-gap resonant cylindrical cavity, IEEE Trans. on MTT, 1976, MTT-24(4), 182-187.
- [9] 朱敏, 吴鸿适, 耦合腔结构特性研究, 电子学报, 1986, 14(1), 7-15.
- [10] 李镇淮, 宋文森, 双重入腔的计算, 电子科学学刊, 1987, 9(5), 441-450.

CALCULATING THE CUTOFF FREQUENCY OF HETEROMOPHIC WAVEGUIDE BY OPERATOR THEORY

Xu Cheng Zhang Xiaojuan Song Wenmiao

(*Institute of Eclertronics Chinese, Academy of Sciences, Beijing 100080, China*)

Abstract The cutoff frequency of heteromophic waveguide in special structure is solved with the matching of electric and magnetic field on the invented boundary by vector partial differential operator theory. The method may be used to solving the cutoff frequency of almost all of the modes precisely and expediently. The method may also be used to calculating the transmitting characteristics of ridged waveguide and other heteromophic waveguide loaded rectangular metal.

Key words Vector partial differential operator, Dyadic Green function, Heteromophic waveguide, Cutoff frequency

徐 诚: 男, 1972 年生, 博士生, 现从事电磁场理论的研究.
 张晓娟: 女, 1964 年生, 博士生, 现从事电磁场理论的研究.
 宋文森: 男, 1938 年生, 研究员, 博士生导师, 现主要从事电磁场理论的研究.