二进制序列的群相关特性 [1]

杨光正　　杨翔宇 *　　徐丽娟

(中国西南电子技术研究所 成都 610036)
*(清华大学 北京 100084)

摘　要　本文研究了二进制序列的群相关特性，证明了不仅二进制序列的群相关函数是理想的，而且当码长 N 是偶数位时，它的某些子集的群相关函数也是理想的。文中还导出了二进制集 $\boldsymbol{C}$ 的群相关函数的一般形式。

关键词　脉压码，群相关函数，二进制序列

中图号　TN953, TN911.7

1 引　言

众所周知，脉冲压缩技术只能解决探测距离和距离分辨力之间的矛盾，不能改善信噪比，为改善信噪比还需采用弱信号处理技术。

脉压技术中的一个关键问题是旁瓣遮盖效应，在大多数雷达应用中，要求峰值旁瓣比是 $\rho=-35\text{dB}$ — -45dB 。当今已知的任何一种脉压体制都满足不了这一要求，因而不得不采用加权技术，然而加权后又会导致信噪比损失和降低距离分辨力。

有一种非常自然的想法：可否将脉压技术和信号积累过程结合起来，使其在信号积累过程中将旁瓣抵消掉？或者换句话说，能不能找到一群码，它们的群相关函数是理想的？这就是本文将探讨的问题。

2 定义和约定

记域： $F=(1,-1)$, 　$f=(0,1)$ ；设

$$\boldsymbol{C}=\{C_i, i\forall(1,2,\cdots,2^N): C_i<C_{i+1}\}, \qquad M=[C_i]_{1\times 2^N}$$

分别表示码集和其对应的行矩阵，其中

$$C_i=(c_{i1}c_{i2}\cdots c_{ik}\cdots c_{iN}), \quad C_i\in\boldsymbol{C}; \quad c_{ik}\in f\text{或}F.$$

为便于分析，有时文中将集 $\boldsymbol{C}$ 表成

$$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{C}_{\text{sub}}, \overline{\boldsymbol{C}}_{\text{sub}}),$$

其中 $\boldsymbol{C}_{\text{sub}}=\{C_t, 1\le t\le 2^{N-1}: C_t<C_{t+1}\}$, $\overline{\boldsymbol{C}}_{\text{sub}}=\{C_t, 2^{N-1}+1\le t\le 2^N: \overline{C}_{2^N-t+1}=C_t\}$. 有时将码字表成

$$C_l=(C_{hl}C_{tl}), \quad \text{当}N\text{为偶数时},$$

[1] 1995-04-04 收到， 1995-10-17 定稿

其中 $C_{hl}=(c_{l1}c_{l2}\cdots c_{l(N/2)})$， $C_{tl}=(c_{l(N/2+1)}c_{l(N/2+2)}\cdots c_{lN})$；

$$C_p=(C_{hp}c_{p(N+1)/2}C_{tp}),\quad \text{当}N\text{为奇数时},$$

其中 $C_{hp}=(c_{p1}c_{p2}\cdots c_{p(N-1)/2})$， $C_{tp}=(c_{p(N+3)/2}c_{p(N+5)/2}\cdots c_{pN})$。 $c_{p(N+1)/2}\in f$ 或 F 。

定义 满足关系 $C_l=C_l^*(\in C)$ 或 $\overline{C}_p=C_p^*(\in C)$ 的码分别称为对称码或反对称码。

对称码集和反对称码集分别记为 $\boldsymbol{C_L}(\subset \boldsymbol{C})$ 和 $\boldsymbol{C_P}(\subset \boldsymbol{C})$，其对应的行矩阵分别记为 M_L 和 M_P 。

记 $\boldsymbol{C_L}\cup\boldsymbol{C_P}=\boldsymbol{C_S}$，其对应的行矩阵记为 M_S 。集 $\boldsymbol{C}$ 的基数记为 $n(\boldsymbol{C})$ 。群 $\boldsymbol{G}$ 的阶数记为 $n(\boldsymbol{G})$ 。

作映射 μ ： $\mu(C_i)\to R_i=C_i\cdot C_i^*$， $\mu^{-1}(R_i)\to C_i$， $i=1,2,\cdots,n(\boldsymbol{C})$； $\mu(\boldsymbol{C})\to\boldsymbol{R}$， $\mu^{-1}(\boldsymbol{R})\to\boldsymbol{C}$， $C_i\in\boldsymbol{C}$， $R_i\in\boldsymbol{R}$ 。称 $\boldsymbol{R}$ 为 $\boldsymbol{C}$ 的同构自相关函数集。

定义 $\mathcal{F}=M\cdot M^T$ 为集 $\boldsymbol{C}$ 的同构群相关函数。显然

$$\mathcal{F}=M\cdot M^T=\sum_{i=1}^{n(\boldsymbol{C})}R_i.$$

作映射 θ ： $\theta(\boldsymbol{C})\to\Re$，其中 $\theta(C_i)=\theta(\overline{C}_i)=\theta(C_i^*)=\theta(\overline{C}_i^*)\to r_i=C_i\cdot C_i^*$， $C_i\in\boldsymbol{C}$， $r_i\in\Re$， $i\forall(1,2,\cdots,n(\Re))$ 。称 $\Re$ 为 $\boldsymbol{C}$ 的同态相关函数集。

$\boldsymbol{C}$ 的同态群相关函数 $\mathring{\mathcal{F}}$ 定义为

$$\mathring{\mathcal{F}}=\sum_{i=1}^{n(\Re)}r_i,\quad r_i\in\Re.$$

为强调码长 N，有时将 $\boldsymbol{C}$ 写成 $\boldsymbol{C}(N)$ 。

约定 相关函数以紧邻主峰的旁瓣为第一旁瓣，从左往右数，以 $\rho(j)$ 表示第 j 个旁瓣。$j=0$ 时便是主峰。

本文只研究二进制序列的非周期性自相关函数，文中简称相关函数。称旁瓣为零 [6] 的相关函数为理想的。称群相关函数是理想的二进制集合为理想集。

3 二进制序列的群相关函数

引理 1 $C_i(\in\boldsymbol{C})$ 是对称码的充要条件是 $C_{hi}=C_{ti}^*$ 。

证 先讨论 N 为偶数的情况，这时

$$\begin{aligned}C_i&=(C_{hi}C_{ti}),\\ C_i^*&=(C_{hi}C_{ti})^*=(C_{ti}^*C_{hi}^*).\end{aligned}\tag{1}$$

令 $C_i=C_i^*$ 于是有 $(C_{hi}C_{ti})=(C_{ti}^*C_{hi}^*)$ 。仅当 $C_{hi}=C_{ti}^*$ 时上式才成立，条件也是充分的。事实上将 $C_{hi}=C_{ti}^*$ 代入 (1) 式，得到

$$\begin{aligned}C_i&=(C_{hi}C_{ti})=(C_{ti}^*C_{ti})=(C_{ti}^*(C_{ti}^*)^*)\\ &=(C_{ti}^*C_{hi}^*)=(C_{hi}C_{ti})^*=C_i^*.\end{aligned}$$

当 N 为奇数时，证法类同 (从略)。

引理 2 当 N 为偶数时，$C_i(\in \boldsymbol{C})$ 是反对称码的充要条件是 $\overline{C}_{hi} = C_{ti}^*$。当 N 为奇数时，$\boldsymbol{C}$ 中无反对称码。

证 命题的前半段证法与引理 1 同 (从略)。因而只需证后半段，由于 $C_i = (C_{hi}c_{(N+1)/2}C_{ti})$，$c_{(N+1)/2} \in f$；所以 $\overline{C}_i = (\overline{C}_{hi}\overline{c}_{(N+1)/2}\overline{C}_{ti})$，$C_i \in \boldsymbol{C}$；$C_i^* = (C_{ti}^*c_{(N+1)/2}^*C_{hi}^*)$。

码元 $c_{(N+1)/2}$ 位于码字的中间位置，故而求共轭码时，其位置不变，亦即 $c_{(N+1)/2} = c_{(N+1)/2}^*$，所以 $C_i^* = (C_{ti}^*c_{(N+1)/2}C_{hi}^*)$。因 $c_{(N+1)/2} \neq \overline{c}_{(N+1)/2}$，故而 $\overline{C}_i \neq C_i^*$。命题成立。

引理 3 $\boldsymbol{C}$ 的同态相关函数集 $\Re$ 的基数

$$n(\Re) = \begin{cases} 2^{N-2} + 2^{(N-2)/2}, & \text{当}N\text{为偶数时；} \\ 2^{N-2} + 2^{(N-3)/2}, & \text{当}N\text{为奇数时.} \end{cases}$$

证 众所周知，$\boldsymbol{C}$ 对“异或”运算 $\bigoplus$ 构成 Abel 群 (记为 $\boldsymbol{G}$)，$\boldsymbol{G}$ 的阶数 $n(\boldsymbol{G}) = n(\boldsymbol{C}) = 2^N$ 是偶数，由 Lagrange 定理 [1] 可知，$\boldsymbol{G}$ 中必存在真子群，且子群的阶数必是 $n(\boldsymbol{G})$ 的因数。

又因 $\boldsymbol{C}$ 是二元所有 N 排列的集合，故知其中必包含对称码和反对称码 (N 为偶数时)，又由对称性定义可知，我们仅需考虑子码 C_h 即可。

子码 C_h 的位数是 $N/2$(当 N 为偶数时) 或 $(N-1)/2$(当 N 为奇数时)，其可能的排列数分别是 $2^{N/2}$ 或 $2^{(N-1)/2}$。由此可知，当 N 为偶数时，$\boldsymbol{C}$ 中存在对称码的个数是 $2^{N/2}$，反对称码的个数也是 $2^{N/2}$；当 N 为奇数时，$\boldsymbol{C}$ 中不存在反对称码，只存在对称码。当码元是 $c_{(N+1)/2}$ 时，有 $2^{(N-1)/2}$ 个对称码；当中央码元是 $\overline{c}_{(N+1)/2}$ 时也有 $2^{(N-1)/2}$ 个对称码。所以

$$n(\boldsymbol{C}_S) = n(\boldsymbol{C}_L) + n(\boldsymbol{C}_P) = \begin{cases} 2^{(N+2)/2}, & N\text{为偶数；} \qquad (2) \\ 2^{(N+1)/2}, & N\text{为奇数.} \qquad (3) \end{cases}$$

集 $\boldsymbol{C}_s$ 对 $\bigoplus$ 也是 Abel 群 (记为 H)，且 H 是 G 的子群，这一点不难证明：由对称性可知 $\boldsymbol{C}_S$ 中必包含码字 0，它是 H 的单位元。逆元就是码字自身，而 $\bigoplus$ 运算满足交换律。剩下来仅需证明 H 的封闭性即可。

现考虑码长为偶数的对称码集 $\boldsymbol{C}_S$。

记 $C_1 \bigoplus C_2 = C_3$，$C_1, C_2 \forall \boldsymbol{C}_S$，于是有 $C_3 = (C_{h3}C_{t3}) = (C_{h1}C_{t1}) \bigoplus (C_{h2}C_{t2})$，式中 $C_{h3} = C_{h1} \bigoplus C_{h2}$；$C_{t3} = C_{t1} \bigoplus C_{t2}$。此外 $C_{h3}^* = (C_{h1} \bigoplus C_{h2})^* = C_{h1}^* \bigoplus C_{h2}^*$。将对称条件 $C_{hi}^* = C_{ti}$ 代入上式后，即得 $C_{h3}^* = (C_{t1} \bigoplus C_{t2}) = C_{t3}$。这就是说 $C_3 \in \boldsymbol{C}_S$，可见 H 确系 Abel 群。

对于码长是奇数的情况以及码长是偶数的反对称码集的证法相似 (从略)。

记差集 $\boldsymbol{C} \backslash \boldsymbol{C}_S = \boldsymbol{C}_D$，于是

$$\begin{aligned} n(\boldsymbol{C}_D) &= n(\boldsymbol{C}) - n(\boldsymbol{C} \bigcap \boldsymbol{C}_S) \\ &= n(\boldsymbol{C}) - n(\boldsymbol{C}_S) = \begin{cases} 2^N - 2^{(N+2)/2}, & N\text{为偶;} \\ 2^N - 2^{(N+1)/2}, & N\text{为奇.} \end{cases} \end{aligned}$$

同理

$$n(\Re) = n(\Re_D) + n(\Re_S).$$

在集 $\boldsymbol{C}_D$ 中有 θ ： $\theta(C_i) = \theta(C_i^*) = \theta(\overline{C}_i) = \theta(\overline{C}_i^*) \to r_i$ ，而在 $\boldsymbol{C}_S$ 中，因 C_i 的共轭 C_i^* 就是自身，故而只有

$$\theta : \theta(C_i) = \theta(\overline{C}_i) \to r_i \tag{4}$$

所以

$$n(\Re_D) = n(\boldsymbol{C}_D)/4, \tag{5}$$

$$n(\Re_S) = n(\boldsymbol{C}_S)/2. \tag{6}$$

最后得到

$$n(\Re) = \begin{cases} 2^{N-2} + 2^{(N-2)/2}, & N\text{为偶数}; \quad (7) \\ 2^{N-2} + 2^{(N-3)/2}, & N\text{为奇数}; \quad (8) \end{cases}$$

证毕

推论 1　当 N 为偶数时恒有 $n(\boldsymbol{C}_S(N)) = n(\boldsymbol{C}_S(N+1))$. 只需将 $N = 2K$ 和 $N = 2K+1$ 分别代入 (2) 和 (3) 式即得。同理有 $n(\Re_S(N)) = n(\Re_S(N+1))$.

顺便指出，$\boldsymbol{C}_D$ 中不包含单位元，故而不能构成群，然而我们仍采用群相关函数的符号，这纯粹是为了统一符号，在概念上切勿产生误解。

定理 1　集 $\boldsymbol{C}$ 在域 F 上的

$$\mathcal{F} = \sum_{i=1}^{n(\boldsymbol{C})} R_i = \sum_{i=1}^{n(\boldsymbol{C})} \rho_i(j) = \begin{cases} N \cdot n(\boldsymbol{C}), & j = 0; \\ 0 & j \neq 0. \end{cases}$$

证　因为 $\mathcal{F} = M \cdot M^T = \sum_{i=1}^{n(\boldsymbol{C})} R_i = \sum_{i=1}^{n(\boldsymbol{C})} \rho_i(j)$ ， $\rho_i(j) = \sum_{k=1}^{N-j} c_{ik} \cdot c_{i(k+j)}$, 所以

$$\mathcal{F} = \sum_{i=1}^{n(\boldsymbol{C})} \sum_{k=1}^{N-j} c_{ik} \cdot c_{i(k+j)}$$

$$= \sum_{k=1}^{N-j} \Big(\sum_{i=1}^{n(\boldsymbol{C})} c_{ik} \cdot c_{i(k+j)} \Big).$$

将码字 $C_i = (c_{i1} c_{i2} \cdots c_{ik} \cdots c_{iN})$ ， $C_i \in \boldsymbol{C}$ ， $c_{ik} \in F$ ，由小到大依次排成列

$$\begin{matrix} c_{11}c_{12} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21}c_{22} & \cdots & c_{2k} & \cdots & c_{2N} \\ & & \vdots & & \\ c_{i1}c_{i2} & \cdots & c_{ik} & \cdots & c_{iN} \\ & & \vdots & & \\ c_{n1}c_{n2} & \cdots & c_{nk} & \cdots & c_{nN} \end{matrix} \qquad n = n(\boldsymbol{C}).$$

将阵列中每个列向量看成一个码字，将第 k 列的码字记为 $C_k^{\perp}$: $C_k^{\perp} = (c_{1k} c_{2k} \cdots c_{ik} \cdots c_{nk})$, $k = 1, 2, \cdots, N$. 由 $C_k^{\perp}$ 构成的集合记为 $\boldsymbol{C}^{\perp}$ 。

由于上述阵列是按码字大小顺序排列的，故可清楚地看出 $C^{\perp}$ 中的码字两两正交。换言之， $C^{\perp}$ 中任意两个码字间的 Hamming 距离恒等于 2^{N-1} ，因此在域 F 上恒有

$$\sum_{i=1}^{n(C)} c_{ik}\cdot c_{i(k+j)}=\begin{cases} n(C), & j=0; \qquad (9)\\ 0 & j\neq 0. \qquad (10)\end{cases}$$

所以最后得到

$$\mathcal{F}=\sum_{k=1}^{N-j}\left(\sum_{i=1}^{n(C)} c_{ik}\cdot c_{i(k+j)}\right)=\begin{cases} N\cdot n(C), & j=0;\\ 0 & j\neq 0.\end{cases}$$ 证毕

推论 2 子集 $C_{\rm sub}(\subset C)$ 和 $\overline{C}_{\rm sub}(\subset C)$ 的

$$\mathcal{F}_{\rm sub}=\mathcal{F}_{\overline{\rm sub}}=\begin{cases} N\cdot n(C)/2, & j=0;\\ 0, & j\neq 0.\end{cases}$$

证 定理 1 对码长未作限制，故对码长为 $N-1$ 的码集 C' 也成立。

若在集 C' 中，在每个码字的最高位前面添加一个相同的码元，由此生成长度为 N 的 $C_{\rm sub}$ 或 $\overline{C}_{\rm sub}$ ，则相当于在其对应的集 $C'^{\perp}$ 中添加一个单游程的码字。这样处理后，不会破坏 $C^{\perp}$ 的正交性，故而 (9) 式、 (10) 式仍成立，不同的仅是 $n(C_{\rm sub})=n(\overline{C}_{\rm sub})=n(C)/2$ 。由此可知，推论成立。

定理 2 当 N 为偶数时，在域 F 上，集 $C_S(\subset C)$ 的

$$\mathring{\mathcal{F}}_S=\begin{cases} N\cdot 2^{N/2}, & j=0;\\ 0, & j\neq 0.\end{cases}$$

证 考察 $C_l(\in C_L)$ 的 R_l ， R_l 可写成

$$C_l\cdot C_l^*=(C_{hl}C_{tl})\cdot(C_{hl}C_{tl})^*=(C_{hl}C_{tl})\cdot(C_{tl}^*C_{hl}^*)=(C_{hl}C_{hl}^*)\cdot(C_{hl}C_{hl}^*)=C_{hl}\cdot C_{hl}+2C_{hl}\cdot C_{hl}^*+C_{hl}^*\cdot C_{hl}^*.$$

同理 $C_p(\in C_P)$ 的 R_p 可写成

$$C_p\cdot C_p^*=(C_{hp}C_{tp})\cdot(C_{hp}C_{tp})^*=C_{hp}\cdot\overline{C}_{hp}+2C_{hp}\cdot C_{hp}^*+C_{hp}^*\cdot\overline{C}_{hp}^*.$$

在集 C_L 中任意指定一个 C_l ，总可在集 C_P 中找到一个 C_p 满足条件： $C_{hl}=C_{hp}$ 。于是在域 F 上，下式成立： $C_{hl}\cdot C_{hl}+C_{hp}\cdot\overline{C}_{hp}=0,\ C_{hl}^*\cdot C_{hl}^*+C_{hp}^*\cdot\overline{C}_{hp}^*=0.$

所以在求集 C_S 的同构群相关函数时，仅剩下 $C_{hl}\cdot C_{hl}^*$ 和 $C_{hp}\cdot C_{hp}^*$ 要考虑，事实上由于行矩阵 $M_L=[C_l]_{1\times 2^{N/2}}$ ， $M_P=[C_p]_{1\times 2^{N/2}}$ ， $l,p=1,2,\cdots,2^{N/2}$ ； $M_S=[M_LM_P]$ ，所以

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_S&=M_S\cdot M_S^T=M_L\cdot M_L^T+M_P\cdot M_P^T=\sum_{l=1}^{2^{N/2}}R_l+\sum_{p=1}^{2^{N/2}}R_p\\ &=\sum_{l=1}^{2^{N/2}}(C_{hl}\cdot C_{hl}+2C_{hl}C_{hl}^*+C_{hl}^*\cdot C_{hl}^*)+\sum_{p=1}^{2^{N/2}}(C_{hp}\cdot\overline{C}_{hp}+2C_{hp}\cdot C_{hp}^*+C_{hp}^*\cdot\overline{C}_{hp}^*)\\ &=2\left[\sum_{l=1}^{2^{N/2}}C_{hl}\cdot C_{hl}^*+\sum_{p=1}^{2^{N/2}}C_{hp}\cdot C_{hp}^*\right].\end{aligned}$$

考虑

$$\rho_{hl}(j)=C_{hl}\cdot C_{hl}^{*}=\sum_{k=1}^{N/2-j}c_{lk}\cdot c_{l(k+j)},\qquad \rho_{hp}(j)=C_{hp}\cdot C_{hp}^{*}=\sum_{k=1}^{N/2-j}c_{pk}\cdot c_{p(k+j)},$$

$$j\forall(1,2,\cdots,N/2-1),\qquad c_{lk},c_{pk}\in F$$

于是

$$\mathcal{F}_S=2\left[\sum_{k=1}^{N/2-j}\Big(\sum_{l=1}^{2^{N/2}}c_{lk}\cdot c_{l(k+j)}+\sum_{p=1}^{2^{N/2}}c_{pk}\cdot c_{p(k+j)}\Big)\right]=\begin{cases}N\cdot 2^{N/2+1}, & j=0;\\ 0, & j\neq 0.\end{cases}$$

因 $\mathring{\mathcal{F}}_S$ 是 C_S 的同态映射的群相关函数，考虑 (4) 式后，立即得到

$$\mathring{\mathcal{F}}_S=\mathcal{F}_S/\in=\begin{cases}N\cdot 2^{N/2}, & j=0;\\ 0, & j\neq 0.\end{cases}$$

证毕

推论 3 当 $2|N$ 时在域 F 上，集 $\boldsymbol{C}$ 的

$$\mathring{\mathcal{F}}_S=\begin{cases}N\cdot(2^{N-2}+2^{N/2-1}), & j=0;\\ 0, & j\neq 0.\end{cases}$$

证法与上同 (从略)。

推论 4 当 $2|N$，在 F 上，$\boldsymbol{C}_D(\subset \boldsymbol{C})$ 的

$$\mathring{\mathcal{F}}_D=\begin{cases}N\cdot(2^{N-2}-2^{N/2-1}), & j=0;\\ 0, & j\neq 0.\end{cases}$$

证法与前同 (从略)。

推论 5 由不同长度的理想集构成的码集也是理想集。

4 数值计算实例

受篇幅限制，只能以较短的码集为例，现以 N=6,7 为例，表 1 为 N=6 时的码集。

表 1

实例	理论计算
$\boldsymbol{C}_L=\{000000,001100,010010,011110,\ 111111,110011,101101,100001\}$ $\boldsymbol{C}_P=\{000111,001011,010101,011001,\ 111000,110100,101010,100110\}$	$n(\boldsymbol{C}_L)=n(\boldsymbol{C}_P)=2^{N/2}=8$
$\boldsymbol{C}_S=\boldsymbol{C}_L\cup\boldsymbol{C}_P$	$n(\boldsymbol{C}_S(6))=2^{(N+2)/2}=16$
$\boldsymbol{C}_D=\{000001,000010,000011,000100,000101,000110,\ 100000,010000,110000,001000,101000,011000,\ 111110,111101,111100,111011,111010,111001,\ 011111,101111,001111,110111,010111,100111,\ 001001,001010,001101,001110,010001,010110\ 100100,010100,101100,011100,100010,011010\ 110110,110101,110010,110001,101110,101001\ 011011,101011,010011,100011,011101,100101\}$	$n(\boldsymbol{C}_D)=2^N-2^{(N+2)/2}=48$

以上各集中均包含了同质异型码 (allomophic forms)，集中同一列的码字有相同的自相关函数 (ACF)，求同态 ACF 时，仅考虑其中之一，约定考虑第一行，又因 $\rho(\tau)=\rho(-\tau)$，故只需写出 ACF 的单侧旁瓣即可 (示于表 2 和表 3)。

表 2

C_S	$\mathring{r}_S$									
000000	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
001100	1	2	−1	−4	1	6	1	−4	−1	2	1
010010	1	−2	3	0	−3	6	3	0	3	−2	1
011110	1	−2	−1	0	1	6	1	0	−1	−2	1
000111	−1	−2	−3	0	3	6	3	0	−3	−2	−1
001011	−1	−2	1	0	−1	6	−1	0	1	−2	−1
010101	−1	2	−3	4	−5	6	−5	4	−3	2	−1
011001	−1	2	1	−4	−1	6	−1	−4	1	2	−1
$\mathring{\mathcal{F}}_S=$	(0	0	0	0	0	48	0	0	0	0	0)

表 3

C_D	$\mathring{r}_D$									
000001	−1	0	1	2	3	6	3	2	1	0	−1
000010	1	0	1	2	1	6	1	2	1	0	1
000011	−1	−2	−1	0	3	6	3	0	−1	−2	−1
000100	1	2	1	0	1	6	1	0	1	2	1
000101	−1	0	−1	2	−1	6	−1	2	−1	0	−1
000110	1	0	−1	−2	1	6	1	−2	−1	0	1
001001	−1	0	3	−2	−1	6	−1	−2	3	0	−1
001010	1	0	−1	2	−3	6	−3	2	−1	0	1
001101	−1	0	1	−2	−1	6	−1	−2	1	0	−1
001110	1	0	−3	−2	1	6	1	−2	−3	0	1
010001	−1	2	−1	0	−1	6	−1	0	−1	2	−1
010110	1	-2	1	0	−3	6	−3	0	1	−2	1
$\mathring{\mathcal{F}}_D=$	(0	0	0	0	0	72	0	0	0	0	0)

理论计算值为

$$\mathring{\mathcal{F}}_S=\begin{cases} N\cdot 2^{N/2}=48, & j=0;\\ 0, & j\neq 0\end{cases}$$

$$\mathring{\mathcal{F}}_D=\begin{cases} N\cdot(2^{N-2}-2^{N/2-1})=72, & j=0;\\ 0, & j\neq 0\end{cases}$$

由推论 1 可知，当 N=7 时不存在反对称码，且 $n(\boldsymbol{C}_S(7))=n(\boldsymbol{C}_S(6))$，实际得到的

$$C_S(7)=\left\{\begin{matrix} 0000000, 0001000, 0010100, 0011100, 0100010, 0101010, 0110110, 0111110\\ 1111111, 1110111, 1101011, 1100011, 1011101, 1010101, 1001001, 1000001\end{matrix}\right\}=C_L.$$

与理论计算值 $n(C_S(7))=2^{(N+1)/2}=16$ 完全吻合。

5 结束语

从应用的角度来说，希望得到理想码，然而已证明在复域中根本不存在无旁瓣的理想码[2]，所以只有退而求最佳码。令人失望的是二进制序集中也不存在 $N > 13$ 的最佳码[3]，于是 Frank[4]， Lewis[5] 等把目光转向多相码。多相码尽管有众多的优点，遗憾的是它实现起来非常困难，这妨碍了它的广泛应用。

尽管二进制序列的个体特性不太令人满意，然而本文已证明其群体特性却十分理想。若用本文提出的群码进行累积接收，便可在提高信噪比的同时消除旁瓣，这一点十分诱人。

参 考 文 献

[1] Miller W Jr. Symmetry Groups and Their Application. New York: Academic Press, 1992, Chapter 1.

[2] 杨光正. 脉压码时间旁瓣特性的研究. 电子科学学刊， 1994, 16(1): 40–47.

[3] 杨光正. Barker 码的一些结论和二元码的优选问题. 电子科学学刊， 1995, 17(1): 35–41.

[4] Frank R L. Polyphase codes with good nonperodic correlation properties. IEEE Trans. on IT, 1963, IT-9(1): 43–46.

[5] Lewis B L, Kretshmer F F. Linear frequency modulation derived polyphase pulse compression codes. IEEE trans, on AES, 1982, AES-18(5): 637–641.

[6] Golay M J E. Complementary series. IRE Trans., on IT, 1961, IT-7(4): 82–87.

THE GROUP CORRELATION PROPERTIES OF BINARY SEQUENCES

Yang Guangzheng Yang Xiangyu* Xu Lijuan

(*Southwest China Research Institute of Electronic Technology, Chengdu* 610036)

*(*Tsinghua University, Beijing* 100084)

Abstract The group correlation properties of binary sequences is studied. And a conclusion is drawn that not only the group correlation function of a binary sequence itself is ideal, but also that of some of its subsets, when code length N is even, is ideal. Finally a general formula of the group correlation function of a binary sequence set is derived.

Key words Group correlation function, Binary sequence, Pulse compression code

杨光正： 男， 1937 年生，高级工程师，从事雷达专业，主要研究信号处理、通信理论和智能理论.