

静电离心聚焦系统中相对论性电子注的理论分析*

张世昌
(成都电讯工程学院)

提 要

本文对静电离心聚焦系统中相对论性电子注与波换能过程进行了原理性研究,给出了动力学线性理论分析.对有关工程问题进行了讨论,提出了电子注斜注入的设想.

一、引言

人们曾对离心静电聚焦系统(CEF)中非相对论性电子注进行过详细研究,制造出旋束管(Heliton)及静电电子注耦合器(Electrostatic Electron Beam Coupler)^[1-4]. CEF系统具有电调及低噪声等优点.近年来,强流相对论电子注的出现,重新唤起了人们对CEF系统的兴趣,期望用CEF系统代换静磁聚焦系统,以摆脱普通回旋管在工程上遇到的困难^[5-8]. 亚力克塞夫(I. Alexeff)等人曾在实验室利用CEF系统设计了他们称之为回旋—奥毕管(gyro-orbitron)的装置,获得了波长为3 cm, 8 mm, 5.5 mm的微波辐射^[5]. 最近,他们的工作取得了引人注目的进展,获得了波长为1/3 mm的辐射,特别是波长为8 mm时效率达到5%^[6]. 回旋—奥毕管的特点是:电子由内导体发射,具有较为复杂的初状态.文献[7]提出电子注纵向注入(象回旋管中那样),将静磁聚焦系统改成CEF系统,构成静电聚焦大回旋半径回旋管. 本文将对CEF系统中的相对论性电子注与波的换能过程进行非自治原理性分析,给出动力学线性理论描述,并对有关工程问题进行讨论,提出电子注采取斜注入的设想.

二、负质量效应分析

静电聚焦系统采用同轴波导高频结构:外导体接地,内导体加静电电压 $U_0(>0)$,内外导体半径分别设为 R_{in} , R_{out} . 内有一同轴大回旋半径相对论性电子注,其半径为 R_0 ,横向及纵向速度分别为 v_{\perp} , v_{\parallel} ,相对论因子为 γ_0 . 适当选择初条件,使电子在径向静电场力作用下做圆运动:

$$|e|U_0 = \gamma_0 m_0 R_0^2 \left(\frac{d\varphi_0}{dt} \right)^2 \ln \frac{R_{out}}{R_{in}}, \quad (1)$$

式中 $|e|$, m_0 , $\frac{d\varphi_0}{dt}$ 分别为电子电量,静质量及回旋频率. 容易求得电子的静电势能 ϕ_p 为:

* 1986年1月28日收到,1986年5月20日修改定稿.

$$\mathcal{E}_p = \frac{|e|U_0}{\ln \frac{R_{out}}{R_{in}}} \ln \frac{R}{R_{out}}. \quad (2)$$

电子总能量 \mathcal{E} 为动能及静电势能之和,

$$\mathcal{E} = \gamma m_0 c^2 + \mathcal{E}_p, \quad (3)$$

式中 c 为真空中光速. 利用(1)式, 由(3)式可近似得电子能量变化率为

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = m_0 \left(c^2 \frac{d\gamma}{dt} + \gamma v_{\perp} \frac{d\varphi_0}{dt} \frac{dR}{dt} \right). \quad (4)$$

(4)式第一项代表了相对论因子的变化引起的能量得失; 第二项代表了电子径向位置改变引起的静电势能的变化(原则上是非相对论性的). 我们知道: 当电子 v_{\perp} 增加时, 一方面导致 γ 增加, 另一方面导致惯性离心力大于向心力, 从而 R 也增加; 反之亦然. 可见, (4)式表示的两种效应是相互迭加而不是削弱 ($\frac{d\gamma}{dt}$ 与 $\frac{dR}{dt}$ 同号). 基于这一事实, 我们忽略

静电势能变化(非相对论效应), 对电子负质量效应(即(4)式中第一项)进行原理性讨论.

采用微扰迭代法^[9], 设扰动场为横电波模式 $|\mathbf{E}_{\perp}| = E_{\perp 0} \cos \omega t$, 其旋向与电子回旋运动方向相同. 于是电子与波的换能简化为

$$\frac{d\gamma m_0 c^2}{dt} = |e| E_{\perp 0} v_{\perp} \cos \omega t \sin \varphi, \quad (5)$$

或者

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{|e| E_{\perp 0} v_{\perp}}{2 m_0 c^2} [\sin(\omega t + \varphi) - \sin(\omega t - \varphi)]. \quad (6)$$

电子角速度

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega_{c0}}{\sqrt{\gamma}}, \quad \omega_{c0} = \left[\frac{|e| U_0}{R_0^2 m_0 \ln \frac{R_{out}}{R_{in}}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (7)$$

首先, 我们来分析零阶扰动情况(无高频场). 此时, $\gamma = \gamma_0$, 由(7)式得

$$\varphi = \frac{\omega_{c0}}{\sqrt{\gamma_0}} t + \varphi_{00}, \quad (8)$$

φ_{00} 为电子初始角向位置. 显然, 此时 $\frac{d\gamma m_0 c^2}{dt} = 0$, 即电子在平衡态没有能量得失现象.

我们再来分析一阶扰动情况. 将 φ 的零阶扰动解(8)式代入(6)式, 考虑到

$$\omega + \frac{\omega_{c0}}{\sqrt{\gamma_0}} \gg \omega - \frac{\omega_{c0}}{\sqrt{\gamma_0}},$$

略去快变化项, 可得

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{|e| E_{\perp 0} v_{\perp} \sin \varphi_{00}}{2 m_0 c^2} t, \quad (9)$$

式中第二项代表 γ 的一阶扰动量. 将(9)式代入(7)式, 可得

$$\varphi = \left(\frac{\omega_{c0}}{\sqrt{\gamma_0}} t + \varphi_{00} \right) - \frac{\omega_{c0} |e| E_{\perp 0} v_{\perp} \sin \varphi_{00}}{8 m_0 c^2 \gamma_0^{3/2}} t^2, \quad (10)$$

式中最后一项代表 φ 的一阶扰动量. 由(9)式可知: 对于单个电子, $\frac{d\gamma m_0 c^2}{dt} \neq 0$, 这表明单个电子与波之间已经有能量的交换. 但对于整个电子注, 我们对所有不同初始位置的电子进行平均计算, 可发现

$$\left\langle \frac{d\gamma m_0 c^2}{dt} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\gamma m_0 c^2}{dt} d\varphi_{00} = 0,$$

即整个电子注的能量得失相当, 电子注与波之间没有净余能量的交换. 因此, 有必要进一步考察 γ 的二阶扰动量.

将 φ 的一阶扰动量(10)式代入(5)式可得

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma m_0 c^2}{dt} &= \frac{\omega_{c0} e^2 E_{10}^2 v_{\perp 1}^2 t^2}{16 m_0 c^2 \gamma_0^{3/2}} \cos \omega t \sin \left(2\varphi_{00} + \frac{\omega_{c0}}{\sqrt{\gamma_0}} t \right) \\ &+ \frac{\omega_{c0} e^2 E_{10}^2 v_{\perp 1}^2}{16 m_0 c^2 \gamma_0^{3/2}} \cos \omega t \sin \frac{\omega_{c0}}{\sqrt{\gamma_0}} t. \end{aligned} \quad (11)$$

由此可得整个电子注的能量变化率为

$$\left\langle \frac{d\gamma m_0 c^2}{dt} \right\rangle = \frac{\omega_{c0} e^2 E_{10}^2 v_{\perp 1}^2}{32 m_0 c^2 \gamma_0^{3/2}} \sin \left(\frac{\omega_{c0}}{\sqrt{\gamma_0}} - \omega \right) t, \quad (12)$$

从(12)式可得出如下结论: 当 $\frac{\omega_{c0}}{\sqrt{\gamma_0}} > \omega$ 时, $\left\langle \frac{d\gamma m_0 c^2}{dt} \right\rangle > 0$, 电子注产生回旋谐振吸收; 当 $\frac{\omega_{c0}}{\sqrt{\gamma_0}} < \omega$ 时, $\left\langle \frac{d\gamma m_0 c^2}{dt} \right\rangle < 0$, 电子产生回旋谐振辐射.

三、动力学线性理论

本节给出动力学线性理论描述, 位形空间选取 R, φ, z , 动量空间选取 $p_{\perp}, p_{\parallel}, \phi$. 不难发现, 平衡态电子的运动常数为 $R, p_{\perp}, p_{\parallel}$. 于是, 平衡分布函数 f_0 可记作

$$f_0 = f_0(R, p_{\perp}, p_{\parallel}). \quad (13)$$

我们分析电子注与同轴波导中 TE_{mn} 模的相互作用. 此时, 扰动场可记作

$$E_R = \sum_m \omega \mu_0 \frac{m}{R} Z_m(k_c R) e^{im\varphi + i(k_{\parallel} z - \omega t)}, \quad (14)$$

$$E_{\varphi} = \sum_m j \omega \mu_0 k_c Z'_m(k_c R) e^{im\varphi + i(k_{\parallel} z - \omega t)}, \quad (15)$$

$$H_R = \sum_m -j k_{\parallel} k_c Z'_m(k_c R) e^{im\varphi + i(k_{\parallel} z - \omega t)}, \quad (16)$$

$$H_{\varphi} = \sum_m k_{\parallel} \frac{m}{R} Z_m(k_c R) e^{im\varphi + i(k_{\parallel} z - \omega t)}, \quad (17)$$

$$H_z = \sum_m -k_c^2 Z_m(k_c R) e^{im\varphi + i(k_{\parallel} z - \omega t)}, \quad (18)$$

式中

$$Z_m(k_c R) = J_m(k_c R) - N_m(k_c R) \frac{J'_m(k_c R_{out})}{N'_m(k_c R_{out})}, \quad (19)$$

上式中, J_m, J'_m, N_m, N'_m 分别表示 m 阶第一、二类贝塞尔 (Bessel) 函数及其对宗量的导数, $k_{||}, k_c$ 为波的纵向及截止波数, \sum_m 表示对波导中可能存在的模式求和. 如只考虑与电子回旋同步作用的模式, 求和号可去掉.

由沿未扰轨道积分法可求得扰动分布函数

$$f_1 = \frac{-jeE_{\varphi}}{\Omega} \left[\left(1 - \frac{k_{||}v_{||}}{\omega} \right) \frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}} + \frac{k_{||}v_{\perp}}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial p_{||}} \right], \quad (20)$$

式中

$$\Omega = \omega - k_{||}v_{||} - m\omega_{c0}. \quad (21)$$

对于冷电子注, 选取

$$f_0 = \frac{N_c}{4\pi^2 R p_{\perp}} \delta(p_{\perp} - p_{\perp 0}) \delta(p_{||} - p_{|| 0}) \delta(R - R_0), \quad (22)$$

此处 N_c 为纵向单位长度上的电子数. (22) 式的含义是: 平衡态电子注中每个电子的纵向及纵向动量均为 $p_{\perp 0}$ 及 $p_{|| 0}$, 且均处在 $R = R_0$ 的圆柱面上, 具有轴对称性 (分布与 φ 无关). 由上可得扰动电流密度

$$J_{\varphi} = \frac{je^2 N_c E_{\varphi} \delta(R - R_0)}{2\pi\omega\gamma m_0 R} \left\{ \frac{\omega - k_{||}v_{||}}{\Omega} - \frac{[m\omega_{c0}(\omega - k_{||}v_{||}) - k_{||}^2 v_{\perp}^2] + \beta_{\perp}^2 [\omega^2 - (\omega - k_{||}v_{||})(m\omega_{c0} + k_{||}v_{||})]}{(\omega - k_{||}v_{||} - m\omega_{c0})^2} \right\}. \quad (23)$$

从而可求得色散方程

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k_{||}^2 - k_c^2 = W_{mn} \left\{ \frac{(\omega - k_{||}v_{||})}{\omega - k_{||}v_{||} - m\omega_{c0}} - \frac{[m\omega_{c0}(\omega - k_{||}v_{||}) - k_{||}^2 v_{\perp}^2] + \beta_{\perp}^2 [\omega^2 - (\omega - k_{||}v_{||})(m\omega_{c0} + k_{||}v_{||})]}{(\omega - k_{||}v_{||} - m\omega_{c0})^2} \right\}, \quad (24)$$

$$W_{mn} = \frac{N_c k_c^2 e^2 \omega^2 \mu_0^3 Z_m'^2(k_c R_0)}{2\pi R_0 \gamma_0 m_0 N_{mn}},$$

$$N_{mn} = \pi \omega^2 \mu_0^2 [(k_c^2 R_{out}^2 - m^2) Z_m^2(k_c R_{out}) - (k_c^2 R_{in}^2 - m^2) Z_m^2(k_c R_{in})]. \quad (25)$$

当满足条件

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 - k_{||}^2 c^2 - k_c^2 c^2 &= 0, \\ \omega - k_{||}v_{||} - m\omega_{c0} &\geq 0, \\ D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2 &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

时, 可得波的最大增长率及多普勒频移为

$$I_m(\Delta\omega) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\left(\frac{q}{2} + \sqrt{D} \right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{q}{2} - \sqrt{D} \right)^{\frac{2}{3}} \right], \quad (28)$$

$$R_c(\Delta\omega) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{q}{2} + \sqrt{D} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{q}{2} - \sqrt{D} \right)^{\frac{1}{3}} \right], \quad (29)$$

这里

$$p = -\frac{c^2 W_{mn}(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel})}{2\omega}, \quad (30)$$

$$q = \frac{c^2 W_{mn}}{2\omega} \{ [m\omega_{e0}(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}) - k_{\parallel}^2 v_{\perp}^2] + \beta_{\perp}^2 [\omega^2 - (\omega - k_{\parallel} v_{\parallel})(m\omega_{e0} + k_{\parallel} v_{\parallel})] \}. \quad (31)$$

由(24)式中不稳定项可知：相对论效应((24)式中 $\beta_{\perp}^2(\dots)$ 项)的确可以产生脉塞效应；另一方面，在非相对论情况下($\beta_{\perp} = 0$)，也有波的增长或激发((24)式中第二项的分子中的第一项)。而且，上述两种效应是相互迭加的。可见，用动力学方法得到的结论，与本文第二节的定性分析一致($\frac{d\gamma}{dt}$ 与 $\frac{dR}{dt}$ 同号)。

四、讨论

(1) 获得平衡态电子圆轨道的条件是：(a)电子初始径向速度为零；(b)初始参量满足关系式 $|e|U_0 = \gamma_0 m_0 v_{\perp 0}^2 \ln(R_{out}/R_{in})$ (当电子初始径向速度不为零时，轨道较复杂，但当 $v_{R0} \ll v_{\omega 0}$ 时，仍可近似成圆轨道进行理论分析)。为此，本文提出如图 1 所示的设想：电子注斜注入，适当选取 ψ ，以获得所需的 v_{\perp} 、 v_{\parallel} 分配比。

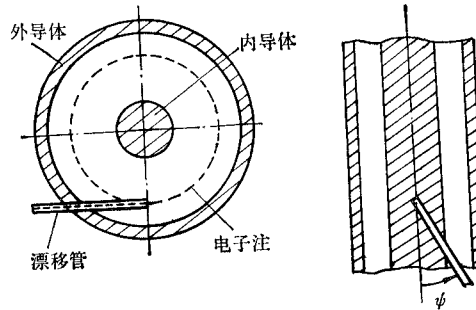


图 1 斜注入式静电聚焦大回旋半径回旋放大器

(2) 从工程的观点看，聚焦电压不宜过高。解决的办法是：采用小尺寸 R_{in} ，从而由(1)式知 R_0 可取较小值，将使 U_0 大幅度降低；而且， R_0 较小，所需的 v_{\perp} 也减小。亚力克塞夫^[6]等人的工作表明，小尺寸 R_{in} 在工艺上的困难是可以克服的。

(3) 由于 $v_{\perp 0} = [|e|U_0/\gamma_0 m_0 \ln(R_{out}/R_{in})]^{1/2}$ ，因此，一经选定 R_0, U_0 ，要求横向速度零散比较小。如采用图 1 所示斜注入式，可能会有好处(这种注入式束流较小，只宜用于中小功率)，且不需压缩磁场。

(4) 采用适当纵向静磁场复合聚焦，对系统的性能会有好处，这一点已为进一步的计算证实。

作者在完成本文过程中得到刘盛纲教授的指教，在此表示衷心感谢。

参 考 文 献

[1] D. A. Waktis and G. Wade, *Proc. IRE*, 46(1958), 1700.

- [2] 刘盛纲, 物理学报, **15**(1959), 575.
- [3] R. H. Pantell, *IRE Trans. on ED*, **ED-7**(1960), 22.
- [4] R. H. Pantell, *ibid.*, **ED-8**(1961), 39.
- [5] I. Alexeff and F. Dyer, *Phys. Rev. Lett.*, **45**(1980), 351.
- [6] I. Alexeff, F. Dyer and W. Nakonieczny, *Int. J. IR/MM Waves*, **6**(1985), 481.
- [7] Liu Shenggang, 10th Int. Conf. on IR/MM Waves, Dec. 1985.
- [8] 刘盛纲、张世昌、杨中海、陈晓东、欧阳征标, *J. Appl. Phys.* **11**(1986), 3621.
- [9] K. R. Chu, 成都电讯工程学院讲学报告, 1981, 成都.

THEORETICAL ANALYSIS OF THE RELATIVISTIC E-BEAM IN A CENTRIFUGAL ELECTROSTATIC FOCUSING SYSTEM

Zhang Shichang

(Chengdu Institute of Radio Engineering)

The process of the energy exchange between the E-beam and wave in a cetrifugal electrostatic focusing system is analyzed theoretically in this paper. A kinetic description and discussion related to the project are given. A new method to inject the E-beam obliquely is proposed.