

## 多源观测逆问题的多尺度分布式分层求解算法

文成林<sup>①②</sup> 周福娜<sup>②</sup> 文传博<sup>②</sup>

<sup>①</sup>(杭州电子科技大学自动化学院 杭州 310018)

<sup>②</sup>(河南大学计算机与信息工程学院 开封 475001)

**摘要** 针对多源观测逆问题求解时所需的计算量过大这问题,该文给出了多源观测逆问题的一种多尺度分布式分层求解算法。其基本思想是:首先,对各传感器上采集到的观测数据分别进行多尺度分解;其次,基于每个传感器的观测信息,得到目标信号的小波变换系数的局部最优估计值;然后,基于相对误差协方差矩阵提供的信息,在每个尺度上将目标信号的小波系数或最粗尺度系数的局部估计值进行融合;最后,做小波逆变换,得到目标信号基于全局信息的融合估计值。采用该算法求解多源观测逆问题既能得到与采用集中式求解算法相当的估计效果,又能有效地降低求解所需的计算量,进一步增强算法的可实施性。

**关键词** 数据融合, 逆问题, 分布式分层融合, 相对误差协方差矩阵, 正则化

中图分类号: TP391

文献标识码: A

文章编号:1009-5896(2006)01-0066-06

## The Multi-scale Distributed Algorithm for Solving Inverse Problem with Multiple Observation Sources

Wen Cheng-lin<sup>①②</sup> Zhou Fu-na<sup>②</sup> Wen Chuan-bo<sup>②</sup>

<sup>①</sup>(School of Automatic, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China)

<sup>②</sup>(School of Computer & Information Engineering, Henan University, Kaifeng 475001, China)

**Abstract** In this paper, a multiscale distributed hierarchical algorithm is developed to solve the computational complexity in inverse problem with multiple observation sources. Firstly, algorithm implements wavelet transform respectively on the object signal data obtained from multiple observation processes. Secondly, the wavelet transform coefficients are estimated about object signal using the data from each sensor. Thirdly, all local estimates are efficiently fused based on the information provided by relative error covariance matrix, in order to get a global-information-based estimate of the wavelet transform coefficients with the object signal. Fourthly, the inverse wavelet transform is performed on the scaling coefficients at the coarsest scale and the wavelet coefficients at all scales to obtain the global-information-based estimator. Finally, the performance of the algorithm is evaluated with respect to the RECM-based criterion. It is concluded that the distributed hierarchical fusion algorithm can not only result in an estimator comparable to that of the method of using central fusion algorithm with relatively light computational load, but also enhance the practicability of new algorithm.

**Key words** Data fusion, Inverse problem, Distributed hierarchical fusion, Relative error covariance matrix, Regularization

### 1 引言

在遥感技术、核医疗技术、地球物理学、地下水文学、图像处理、非破坏性检测和肿瘤检测等领域的科学研究和工程实践中,经常需要根据观测到的数据来对目标真实信号进行估计,而所观测到的数据又往往是真实信号经模糊、失真和加噪等过程后的输出信号,因此,通常称上述问题为逆问题<sup>[1-5]</sup>。目标的真实信号  $x(t)$  与输出信号  $z(t)$  之间常常通过附加有噪声的线性积分方程相联系:

$$z(t) = \int C(t, t')x(t')dt' + v(t) \quad (1)$$

对式(1)进行离散化,可得相应的向量形式<sup>[1]</sup>:

$$z = Cx + v \quad (2)$$

称式(2)为线性逆问题的观测模型。其中,  $z$  为观测信号,  $x$  为目标真实信号,  $v$  是加性白噪声,  $C$  是系统的观测矩阵,它决定着观测过程采样的结构。

目前,逆问题研究中需要解决的关键问题有:(1)对逆问题中的病态现象,给出一种合理有效的正则化方法;(2)减少逆问题求解所需的计算量,以增强求解算法的可实施性。这是因为,一方面,由观测数据的不完全性等因素而导致的病态现象往往会给逆问题的求解带来很大困难;另一方面,

2005-01-18 收到, 2005-08-25 改回

国家自然科学基金重点项目(60434020), 教育部科学技术研究重点项目(205092), 河南省杰出青年科学基金(0312001900)和河南省国际合作项目(0446650006)资助课题

由于受观测设备自身性能和观测环境等因素的限制, 要想获得目标信号更高的估计精度往往需要用多个传感器对目标进行观测, 这必将给求解逆问题带来由于计算量过大而难以实现的困难<sup>[1-4, 6]</sup>。因此, 寻求一种合理的、计算有效的数据融合方式, 从而能更好地求解多源观测逆问题已成为本领域目前研究的热点问题之一<sup>[1-4, 7]</sup>。

在文献[1]中, 作者首先基于数据、算子和被重构函数的多尺度描述建立了求解线性逆问题的多尺度框架, 并利用在小波变换域内建立的  $1/f$  分形先验模型对问题进行有效正则化; 然后, 采用统计估计理论中的逆算法, 得到目标信号的估计值。但是, 文献[1]在利用多源观测数据求解逆问题时, 采用的是集中式数据融合方式, 即将各个传感器上的观测数据都被传送到中心处理器后再进行求解。当传感器个数较多、数据量较大时, 逆问题求解过程中将涉及到的大矩阵的求逆运算, 这是一般计算机所难以承受的。

为了减少求解过程所需的计算量, 本文将给出多源观测逆问题的多尺度分布式求解算法, 化集中式数据融合算法为分布式并行处理式融合算法, 从而避免大矩阵的求逆运算, 这也将有效地降低求解过程所需的计算量<sup>[4]</sup>。

本文结构如下: 第 2 节描述多源观测系统及系统的多尺度变换; 第 3 节给出在多尺度空间中的逆算法, 并将引入相对误差协方差矩阵的概念; 第 4 节详细介绍求解多源观测逆问题的多尺度分布式分层求解算法; 第 5 节和第 6 节分别给出算法的仿真结果和本文的结论。

## 2 问题描述

### 2.1 多源观测系统

一类多源观测系统为

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{C}_i \mathbf{x} + \mathbf{v}_i, \quad i = 1, 2, \dots, K \quad (3)$$

其中  $\mathbf{x}$  是待估计的目标信号

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}^T(1), \mathbf{x}^T(2), \dots, \mathbf{x}^T(n_x)]^T \quad (4)$$

$\mathbf{x}(k) \in \mathbf{R}^{n_x \times 1}$  ( $k = 1, 2, \dots, n_x$ ) 为各采样点处目标的状态向量,  $n_x$  是目标信号  $\mathbf{x}$  的长度, 上标 T 表示向量转置,  $K$  表示传感器的个数。

由传感器  $i$  获得的观测信号  $\mathbf{z}_i$  为

$$\mathbf{z}_i = [\mathbf{z}_i^T(1), \mathbf{z}_i^T(2), \dots, \mathbf{z}_i^T(n_i)]^T \quad (5)$$

这里,  $\mathbf{z}_i(k) \in \mathbf{R}^{m_i \times 1}$  ( $k = 1, 2, \dots, n_i, m_i \leq n$ ),  $n_i$  为传感器  $i$  采集到的观测信号的长度。

传感器  $i$  上的观测噪声向量  $\mathbf{v}_i$  为

$$\mathbf{v}_i = [\mathbf{v}_i^T(1), \mathbf{v}_i^T(2), \dots, \mathbf{v}_i^T(n_i)]^T \quad (6)$$

其中  $\mathbf{v}_i(k) \in \mathbf{R}^{m_i \times 1}$ , 且满足

$$E[\mathbf{v}_i] = 0 \quad (7)$$

$$E[\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T] = \bar{\mathbf{R}}_i \delta_{i,j} \quad (8)$$

$\bar{\mathbf{R}}_i \in \mathbf{R}^{m_i n_i \times m_i n_i}$  为观测噪声协方差矩阵,  $\mathbf{C}_i \in \mathbf{R}^{m_i n_i \times n_x}$  是系统观测矩阵。

以后各节中都假设  $n = 1, m_i = 1$ 。对于高维情况, 除书写形式较复杂外没有本质的区别。

### 2.2 信号 $\mathbf{x}$ 的多尺度分解

给定信号序列  $\{\mathbf{x}(k)\}_{k=1}^{n_x}$ , 假设它是在某一尺度  $N_x$  (称为最细尺度) 上对目标信号  $\mathbf{x}$  做离散化后的结果, 并记  $\mathbf{x}_V^{(N_x)} = \mathbf{x}$ 。若用  $\mathbf{H}_j$  和  $\mathbf{G}_j$  分别表示小波变换的尺度算子与小波算子, 则信号的多尺度变换的分解和重构形式分别为<sup>[1, 4, 6]</sup>

$$\mathbf{x}_V^{(j)} = \mathbf{H}_j \mathbf{x}_V^{(j+1)}, \quad L_x \leq j \leq N_x - 1 \quad (9)$$

$$\mathbf{x}_D^{(j)} = \mathbf{G}_j \mathbf{x}_V^{(j+1)}, \quad L_x \leq j \leq N_x - 1 \quad (10)$$

和

$$\mathbf{x}_V^{(j+1)} = \mathbf{H}_j^H \mathbf{x}_V^{(j)} + \mathbf{G}_j^H \mathbf{x}_D^{(j)}, \quad L_x \leq j \leq N_x - 1 \quad (11)$$

其中上标 H 表示矩阵的共轭转置, 下标 V 和 D 分别表示在较粗尺度上的平滑信号和细节信号,  $N_x$  和  $L_x$  分别为小波分解的最细和最粗尺度, 且满足

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_j \mathbf{H}_j^H & \mathbf{H}_j \mathbf{G}_j^H \\ \mathbf{G}_j \mathbf{H}_j^H & \mathbf{G}_j \mathbf{G}_j^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (12)$$

若记

$$\boldsymbol{\gamma} = [(\mathbf{x}_D^{(N_x-1)})^T, (\mathbf{x}_D^{(N_x-2)})^T, \dots, (\mathbf{x}_D^{(L_x)})^T, (\mathbf{x}_V^{(L_x)})^T]^T \quad (13)$$

则

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{W}_x \mathbf{x}^{(N_x)} \quad (14)$$

表示对信号  $\mathbf{x}$  做从最细尺度  $N_x$  到最粗尺度  $L_x$  的多尺度分解, 其中

$$\mathbf{W}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{N_x-1} \\ \mathbf{G}_{N_x-2} \mathbf{H}_{N_x-1} \\ \vdots \\ \mathbf{G}_{L_x} \mathbf{H}_{L_x+1} \mathbf{H}_{L_x+2} \cdots \mathbf{H}_{N_x-1} \\ \mathbf{H}_{L_x} \mathbf{H}_{L_x+1} \mathbf{H}_{L_x+2} \cdots \mathbf{H}_{N_x-1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

是小波变换算子矩阵, 且满足

$$\mathbf{W}_x^H \mathbf{W}_x = \mathbf{I} \quad (16)$$

这里  $\mathbf{I}$  表示相应的单位矩阵。

### 2.3 观测系统的多尺度变换

观测式(3)给出了观测向量  $\mathbf{z}_i$ , 噪声向量  $\mathbf{v}_i$  与目标向量  $\mathbf{x}$  之间在时域中的关系式。为了进行多尺度求解, 需要给出观测向量、噪声向量与目标向量在小波域中相应的关系式。

将观测式(3)做多尺度变换后得

$$\boldsymbol{\eta}_i = \boldsymbol{\Theta}_i \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{v}_i, \quad i = 1, 2, \dots, K \quad (17)$$

其中

$$\boldsymbol{\eta}_i = [(\mathbf{z}_{i,D}^{(N_x-1)})^T, (\mathbf{z}_{i,D}^{(N_x-2)})^T, \dots, (\mathbf{z}_{i,D}^{(L_x)})^T, (\mathbf{z}_{i,V}^{(L_x)})^T]^T \quad (18)$$

$$\boldsymbol{\Theta}_i = \mathbf{W}_i \mathbf{C}_i \mathbf{W}_x^H \quad (19)$$

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{W}_i \mathbf{v}_i \sim N(0, \mathbf{R}_i) \quad (20)$$

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{W}_i \bar{\mathbf{R}}_i \mathbf{W}_i^H \quad (21)$$

这里,  $\mathbf{W}_x$  和  $\mathbf{W}_i$  分别是作用于目标信号  $\mathbf{x}$  和观测信号  $\mathbf{z}_i$  的小波变换算子矩阵,  $N_i$  和  $L_i$  是对  $\mathbf{z}_i$  做小波变换的最细和最粗尺度。

为了融合来自  $K$  个观测源的信息, 文献[1]给出了一种集中式处理方法, 把式(3)所述的多源观测系统写成如下形式

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (22)$$

其中

$$\mathbf{z} = [\mathbf{z}_1^T, \mathbf{z}_2^T, \dots, \mathbf{z}_K^T]^T, \mathbf{C} = [\mathbf{C}_1^T, \mathbf{C}_2^T, \dots, \mathbf{C}_K^T]^T, \mathbf{v} = [\mathbf{v}_1^T, \mathbf{v}_2^T, \dots, \mathbf{v}_K^T]^T$$

且满足

$$E\{\mathbf{v}\} = 0, \quad E\{\mathbf{v}\mathbf{v}^T\} = \bar{\mathbf{R}}$$

这里,  $\bar{\mathbf{R}} = \text{blockdiag}[\bar{\mathbf{R}}_1, \bar{\mathbf{R}}_2, \dots, \bar{\mathbf{R}}_K]$ 。

将式(17)所示的多源观测系统按时域中的方式集中起来可得到小波域中的集中式观测系统:

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{v} \quad (23)$$

因此, 基于多源观测系统式(3)求解目标信号  $\mathbf{x}$  的问题就被转化为由式(23)求解  $\boldsymbol{\gamma}$  的问题。

### 3 多尺度随机逆算法

#### 3.1 最大后验随机逆算法

在先验模型为  $\boldsymbol{\gamma} \sim N(0, \mathbf{P}_0)$  且观测噪声满足  $\mathbf{v} \sim N(0, \mathbf{R})$  的条件下, 根据观测数据  $\boldsymbol{\eta}$  来确定  $\boldsymbol{\gamma}$  的最大后验估计<sup>[1,7]</sup>

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \arg \min_{\boldsymbol{\gamma}} \left[ \|\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\gamma}\|_{\mathbf{R}^{-1}}^2 + \|\mathbf{P}_0^{-1/2}\boldsymbol{\gamma}\|_I^2 \right] \quad (24)$$

从而得到  $\boldsymbol{\gamma}$  的估计值为

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = [\boldsymbol{\Theta}^T \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\Theta} + (\mathbf{P}_0^{-1/2})^T \mathbf{P}_0^{-1/2}]^{-1} \boldsymbol{\Theta}^T \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\eta} \quad (25)$$

式(24)和式(25)中的  $\mathbf{P}_0$  是目标信号的  $1/f$  类分形先验模型, 它起着正则化逆问题的作用<sup>[1]</sup>。

#### 3.2 相对误差协方差矩阵

在所给的先验条件下, 利用观测系统式(23), 可得误差协方差矩阵:

$$\mathbf{P} = E[(\boldsymbol{\gamma} - \hat{\boldsymbol{\gamma}})(\boldsymbol{\gamma} - \hat{\boldsymbol{\gamma}})]^T = (\boldsymbol{\Theta}^T \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\Theta} + \mathbf{P}_0^{-1})^{-1} \quad (26)$$

矩阵  $\mathbf{P}$  的对角线元素通常可作为评价估计精度的量化指标, 即  $\mathbf{P}$  的对角线元素值越大, 意味着  $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$  中相应估计值的不确定性越高; 反之,  $\mathbf{P}$  的对角线元素值越小, 表明  $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$  中的相应估计值越可靠<sup>[1,7]</sup>。

若  $a > 0$ , 则  $1-b/a$  表示两个实数  $a$  和  $b$  之间的相对差。受其启发, 定义相对误差协方差矩阵:

$$\Pi(A, B) = \mathbf{I} - (\mathbf{P}_A^{-1/2})^T \mathbf{P}_B \mathbf{P}_A^{-1/2} \quad (27)$$

这里,  $A \subset \{1, 2, \dots, K\}$  是由传感器的指标组成的集合,  $\hat{\boldsymbol{\gamma}}(A)$  表示基于集合  $A$  中的所有传感器提供的信息所得的估计值,

$\mathbf{P}_A$  是与估计值  $\hat{\boldsymbol{\gamma}}(A)$  相应的误差协方差矩阵;  $\mathbf{P}_B$  与  $\hat{\boldsymbol{\gamma}}(B)$  有类似的含义。在无观测信息情况下, 记其误差协方差矩阵为  $\mathbf{P}_\Phi$ , 将并视其为先验协方差矩阵  $\mathbf{P}_0$ <sup>[1,7]</sup>。

由式(27)所定义的  $\Pi(A, B)$  表示利用  $B$  中观测数据所得估计结果相对于利用  $A$  中观测数据所得估计结果不确定性的相对减少。因此,  $\Pi(A, B) = 0$  的充要条件是  $\mathbf{P}_A = \mathbf{P}_B$ , 即不确定性没有任何减少, 这表明相对于  $A$  中观测数据所提供的信息来说,  $B$  中的观测数据没有提供任何额外的或新的信息。当  $\mathbf{P}_A = \mathbf{P}_0$  时,  $\Pi(\{\Phi\}, B)$  代表  $B$  中的观测数据相对于先验模型所提供新信息的多少。在不致混淆的情况下, 把  $\Pi(\{\Phi\}, B)$  简记作  $\Pi(B)$ 。如果取集合  $B$  为单个传感器, 则  $\Pi(B)$  就表示这个传感器上的观测数据相对先验模型所提供新信息的多少。

### 4 多源观测逆问题的多尺度分布式分层求解算法

在求解多源观测逆问题时, 通常都采用集中式求解算法, 即在时域中利用式(22)估计目标信号  $\mathbf{x}$  或在多尺度空间中利用式(23)估计目标信号的小波变换系数  $\boldsymbol{\gamma}$ 。当数据量比较大时, 式(23)中的  $\boldsymbol{\Theta}$  和  $\mathbf{R}$  都是非常大的矩阵, 利用式(25)给出的多尺度逆算法来求解逆问题所需的计算量将非常大。为了有效地降低计算量, 本节将基于小波分解的多传感器数据融合技术与逆问题的正则化求解方法相结合, 给出一种求解多源观测逆问题的多尺度分布式分层求解算法<sup>[7-10]</sup>: (1)把各传感器作为一个局部处理器, 用式(24)给出的逆算法得到目标信号的小波系数基于各传感器观测数据的局部估计值; (2)将目标信号的小波系数和最粗尺度系数的局部估计值传送到所在尺度上的中心处理器; (3)在各尺度上将各局部估计值按所给的融合准则做加权融合, 得到目标信号的小波系数和最粗尺度系数基于全局信息的融合估计结果; (4)利用小波逆变换将目标信号的小波系数的融合估计值进行综合, 得到目标信号基于全局信息的估计值。

#### 4.1 基于各个传感器观测数据的目标信号的小波系数局部估计

由小波域中的观测方程式(17), 利用各传感器的观测数据  $\boldsymbol{\eta}_i$  ( $1 \leq i \leq K$ ) 和式(24)所给出的逆算法得到基于局部信息的目标信号的小波变换系数的估计值:

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_i = (\boldsymbol{\Theta}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \boldsymbol{\Theta}_i + (\mathbf{P}_0^{-1/2})^T \mathbf{P}_0^{-1/2})^{-1} \boldsymbol{\Theta}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \boldsymbol{\eta}_i, \quad 1 \leq i \leq K \quad (28)$$

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_i = [(\hat{\boldsymbol{x}}_{i,D}^{(N-1)})^T, (\hat{\boldsymbol{x}}_{i,D}^{(N-2)})^T, \dots, (\hat{\boldsymbol{x}}_{i,D}^{(L)})^T, (\hat{\boldsymbol{x}}_{i,V}^{(L)})^T]^T, \quad 1 \leq i \leq K \quad (29)$$

#### 4.2 基于全局信息的目标信号的小波变换系数分层融合估计

首先, 将每个尺度上小波系数和最粗尺度系数的局部估计值传送到该尺度上的中心处理器; 然后, 基于相对误差协方差阵信息将各局部估计值进行加权融合, 在此尺度上得到小波系数或最粗尺度系数基于全局观测信息的融合估计值

$\hat{\mathbf{x}}_{f,D}^{(j)}$  ( $L_x \leq j \leq N_x - 1$ ) 和  $\hat{\mathbf{x}}_{f,V}^{(L_x)}$ , 即

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_f = [\hat{\mathbf{x}}_{f,D}^{(N_x-1)\text{T}}, \hat{\mathbf{x}}_{f,D}^{(N_x-2)\text{T}}, \dots, \hat{\mathbf{x}}_{f,D}^{(L_x)\text{T}}, \hat{\mathbf{x}}_{f,V}^{(L_x)\text{T}}]^\text{T} \quad (30)$$

上式中, 下标  $f$  表示融合估计, 其融合过程如图 1 所示。

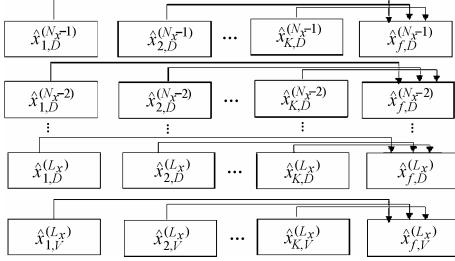


图 1 目标信号的小波系数和尺度系数的局部估计值的分层融合

Fig 1 Hierarchical fusion of the local estimate of the wavelet transform coefficients

本文采用一种基于小波分解和相对误差协方差矩阵的加权平均算子, 对目标信号的小波变换系数的局部估计值进行有效融合, 得到小波变换系数的融合估计值。

记基于传感器  $i$  上的观测数据所得估计的误差协方差矩阵为  $\mathbf{P}_i$ , 则所得估计结果相对于先验模型所包含信息量的相对误差协方差矩阵为

$$\boldsymbol{\Pi}_i = \mathbf{I} - (\mathbf{P}_0^{-1/2})^\text{T} \mathbf{P}_i (\mathbf{P}_0^{-1/2}) \quad (31)$$

对传感器  $i$ , 记  $\boldsymbol{\Pi}_{i,D}^{(j)}(\cdot)$  为尺度  $j$  ( $L_x \leq j \leq N_x - 1$ ) 上小波系数估计值的相对误差协方差,  $\boldsymbol{\Pi}_{i,V}^{(L_x)}(\cdot)$  为尺度  $L_x$  上尺度系数估计值的相对误差协方差,  $\boldsymbol{\Pi}^j$  为  $j$  尺度上相对误差协方差的平均值。

在尺度  $j$  上, 利用相对误差协方差矩阵信息给出  $K$  源观测逆问题的多尺度分层逐点融合算法:

$$\hat{\mathbf{x}}_{f,D}^{(j)}(k) = \sum_{i=1}^K \mathbf{c}_{i,D}^{(j)}(k) \hat{\mathbf{x}}_{i,D}^{(j)}(k), \quad 1 \leq k \leq 2^j, \quad L_x \leq j \leq N_x - 1 \quad (32)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{f,V}^{(L_x)}(k) = \sum_{i=1}^K \mathbf{c}_{i,V}^{(L_x)}(k) \hat{\mathbf{x}}_{i,V}^{(L_x)}(k), \quad 1 \leq k \leq 2^{L_x} \quad (33)$$

其中

$$\mathbf{c}_{i,D}^{(j)}(k) = \boldsymbol{\Pi}_{i,D}^{(j)}(k) / \sum_{s=1}^K \boldsymbol{\Pi}_{s,D}^{(j)}(k), \quad 1 \leq k \leq 2^j, \quad L_x \leq j \leq N_x - 1 \quad (34)$$

$$\mathbf{c}_{i,V}^{(L_x)}(k) = \boldsymbol{\Pi}_{i,V}^{(L_x)}(k) / \sum_{s=1}^K \boldsymbol{\Pi}_{s,V}^{(L_x)}(k), \quad 1 \leq k \leq 2^{L_x} \quad (35)$$

由式(33)可知, 对所有  $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_f$ , 在不同尺度上、不同平移处的估计值将对应不同的权重, 这样就实现了如图 1 所示的分层逐点融合思想。更详细的推导可参考文献[11]。

#### 4.3 基于全局信息的目标信号融合估计

利用小波逆变换, 将目标信号在最粗尺度上的尺度系数

和各尺度上的小波系数的融合估计值进行综合, 从而在最细尺度上得到目标信号基于全局信息的估计值  $\hat{\mathbf{x}}_f$ 。

$$\hat{\mathbf{x}}_f = \mathbf{W}_x^\text{H} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_f \quad (36)$$

其中

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_f = [(\hat{\mathbf{x}}_{f,D}^{(N_x-1)})^\text{T}, (\hat{\mathbf{x}}_{f,D}^{(N_x-2)})^\text{T}, \dots, (\hat{\mathbf{x}}_{f,D}^{(L_x)})^\text{T}, (\hat{\mathbf{x}}_{f,V}^{(L_x)})^\text{T}] \quad (37)$$

#### 4.4 融合效果分析

本节给出一种基于相对误差协方差矩阵的评价参量, 评价分布式分层融合算法在多源观测逆问题求解中的有效性。

首先, 计算出多尺度分布式分层融合估计对应的误差协方差矩阵  $\mathbf{P}_f$ 。由融合算子式(32)和式(33)的确定过程可得

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_f = \sum_{i=1}^K \mathbf{C}_i \hat{\boldsymbol{\gamma}}_i \quad (38)$$

其中  $\mathbf{C}_i$  是对角矩阵, 其对角线元素是由式(34)和式(35)确定的, 且满足  $\sum_{i=1}^K \mathbf{C}_i = \mathbf{I}$ 。所以, 在假设各观测过程统计独立(即假设各传感器独立工作)的条件下有

$$\mathbf{P}_f = E[(\boldsymbol{\gamma} - \hat{\boldsymbol{\gamma}}_f)(\boldsymbol{\gamma} - \hat{\boldsymbol{\gamma}}_f)^\text{T}] = \sum_{i=1}^K \mathbf{C}_i \mathbf{P}_i \mathbf{C}_i^\text{T} \quad (39)$$

然后, 计算出融合估计值相对于利用先验模型所得估计值的相对误差协方差矩阵:

$$\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{I} - (\mathbf{P}_0^{-1/2})^\text{T} \mathbf{P}_f (\mathbf{P}_0^{-1/2}) \quad (40)$$

上式表示, 融合后所得估计结果的不确定性相对先验模型所包含信息的不确定性的相对减少, 可用它来衡量多源观测逆问题求解的多尺度分布式分层融合算法的效果。

在对观测数据进行规则采样的情况下, 各尺度上相对误差协方差随平移的变化不明显, 因此, 仿真中考虑用各尺度上相对误差协方差的平均值来衡量融合算法的有效性。

#### 4.5 算法的计算量分析

为了更清楚地刻画多源观测逆问题的分布式分层求解算法在减轻计算负荷方面的优势, 本小节分别统计出采用集中式融合算法与采用本文建立的分布式分层融合算法求解多源观测逆问题所需的计算量。为了方便计算和比较, 这里只考虑各传感器上观测信号的长度都等于目标信号的长度(即  $n_i = n_x, i = 1, 2, \dots, K$ ) 情况下的计算量。其他情况下, 一般是假设各传感器上观测向量的长度为目标向量长度的一个函数, 可得到类似的结果。表 1 分别列出了使用这两种融合算法进行求解时所做的各种运算的次数。从表 1 中不难看出, 对多源观测逆问题的求解来说, 即  $K \geq 2$  时, 多尺度分布式分层求解算法所需的计算量明显少于集中式求解算法。

表1 两种不同融合算法的计算复杂度

Table 1 Computational complexity of two algorithms

	分布式分层融合	集中式融合
乘法	$\frac{11}{2}Kn_x^3 + 4Kn_x^2 - \frac{1}{2}Kn_x$	$\left(\frac{1}{2}K^3 + 2K^2 + 2K + 1\right)n_x^3 + (K^2 + K + 2)n_x^2 - \left(\frac{1}{2}K + 1\right)n_x$
加法	$\frac{11}{2}Kn_x^3 + 2Kn_x^2 - \left(\frac{3}{2}K + 1\right)n_x$	$\left(\frac{1}{2}K^3 + 2K^2 + 2K + 1\right)n_x^3 + (K^2 - 2K + 3)n_x^2 - \left(\frac{1}{2}K + 2\right)n_x$
除法	$\frac{9}{2}Kn_x^2 + \frac{3}{2}Kn_x$	$\left(\frac{3}{2}K^2 + 3\right)n_x^2 + \left(\frac{1}{2}K + 1\right)n_x$

## 5 仿真实验

下面基于两个传感器的观测系统对本文所给出的算法进行计算机仿真实验研究。仿真中采用基于 Haar 小波的多尺度分解,分解的最细尺度  $N=8$ ,最粗尺度  $L=3$ 。所给出的仿真都是 100 次 Monte Carlo 实验做均值的结果。

目标信号是一种  $1/f$  类分形过程,其采样过程如图 2 中的实线所示<sup>[17]</sup>。本节所涉及的信噪比是针对向量  $\eta_i = \Theta_i \gamma + v_i$  而言的,其定义如下:

$$\text{SNR}_i^2 = \frac{\text{tr}(\Theta_i \mathbf{P}_0 \Theta_i^T)}{n_x r_i^2}$$

其中  $v_i \sim N[0, r_i^2 \mathbf{I}]$ ,  $\gamma \sim N[0, \mathbf{P}_0]$ ,  $n_x$  是  $\gamma$  的长度,  $\text{tr}$  是求迹运算<sup>[1]</sup>。

仿真中用到的观测系统设计如下:  $\mathbf{C}_1$  是对角矩阵,意味着第 1 个传感器对目标进行的是细尺度上的点点观测;  $\mathbf{C}_2$  是四对角的,意味着第 2 个传感器上每个时刻的观测值是目标信号的相邻四点做加权平均的粗尺度观测。

在工程实践中的不同环境下,采用不同观测仪器所得到的观测数据可以归结为以下 4 类:完全数据等信噪比(两个传感器采集到的观测数据都是完整的,但信噪比不相等)、完全数据等信噪比、稀疏采样的不完全数据和仅对边界观测的不完全数据。通过对这 4 种情况下的仿真研究发现:用本文所述分布式分层融合算法求解多源观测逆问题总可以达到与集中式融合方法求解大致相当的估计效果,同时解决了多源观测逆问题求解过程中,集中式融合带来的计算量较大的困难。

下面以完全数据不等信噪比为例,给出多源逆问题的分布式分层融合方法的计算机仿真研究。

这种情况下,两个传感器的观测数据都是完整的,且信噪比分别为  $\text{SNR}_1=1$  和  $\text{SNR}_2=3$ 。图 2 分别给出了利用集

中式融合算法和本文所建立的多尺度分布式分层融合算法求解多源观测逆问题的计算机仿真结果,其中实线表示待估计的真实信号,点划线代表用集中式融合算法求解所得的估计结果,虚线代表用分布式分层融合算法求解所得的估计结果。图 3 给出的是采用这两种算法所得的估计误差曲线,其中实线代表用集中式融合算法所得估计的误差,虚线代表用分布式分层融合算法所得的估计误差。

从表 1 及图 2 和图 3 可以看出,采用本文提出的分布式分层求解算法既可以达到与集中式求解算法相当的效果,又可以有效减轻计算负荷。两种不同的求解算法所得估计的绝对误差均值也非常接近,分别为  $9.3583e-4$  和  $10e-4$ ,这与图 2 和图 3 所给出的结果是一致的。

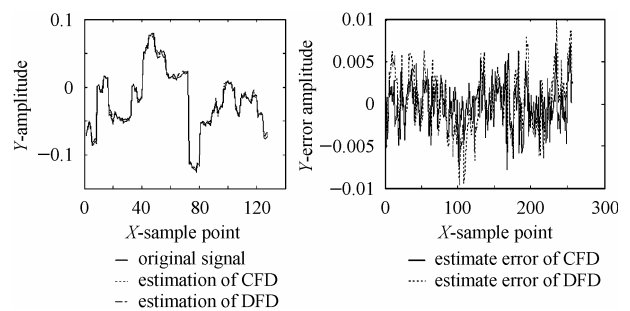


图2 不等 SNR 情况下的估计结果

图3 不等 SNR 情况下的估计误差

Fig 2 Estimation in unequal SNR case

Fig 3 Estimate error in unequal SNR case

表 2 分别列出了采用这两种求解算法所得估计结果的相对误差协方差在各尺度上的平均值图中的 CFD 表示集中式融合算法,DFD 表示分布式融合算法。表中第 1 列是基于传感器 1 的观测值所得估计的相对误差协方差在各尺度上的平均值;第 2 列是基于传感器 2 的观测值所得估计的相对误差协方差在各尺度上的平均值;第 3 列是基于传感器 1 和 2 用分布式分层求解算法所得估计的相对误差协方差在各尺度上的平均值;第 4 列是基于传感器 1 和 2 用集中式求解算法所得估计的相对误差协方差在各尺度上的平均值。第 2 至第 6 行代表 7 至 3 尺度上小波系数估计的相对误差协方差的平均值;最后一行代表对应于最粗尺度上尺度系数估计的相对误差协方差的平均值。

比较表 2 中的 1, 3 列和 2, 3 列后不难发现,在每个尺度上,两个传感器融合后所提供的信息量都高于各个传感器单独进行估计所提供的信息量。从表中易知以相对误差协方差为评价指标,本文给出的分布式分层融合算法是有效的。特别是在较细尺度上,两个传感器的观测数据做分布式分层融合后,所得估计效果远远高于单个传感器分别单独进行估计所得的估计效果。在较粗尺度上,多尺度分布式分层求解算法所得的估计结果与基于各单个传感器的局部估计结果相比,改进不是很大,这是因为在小波分解的较粗尺度上信号的噪声级别较低,从而各传感器单独进行估计也可以得到

表 2 不等 SNR 情况下相对误差协方差在各尺度上的平均值

Table 2 The mean value of relative error covariance at each scale

尺度 $j$	$\Pi^j$ 传感器 1 的估计	$\Pi^j$ 传感器 2 的估计	$\Pi^j$ 分层融合估计	$\Pi^j$ 集中式融合估计
7	0.0341	0.0952	0.4424	0.1232
6	0.1238	0.2962	0.5738	0.3599
5	0.3610	0.6274	0.7646	0.6922
4	0.6933	0.8707	0.8997	0.8999
3	0.9004	0.9642	0.9672	0.9729
2	0.9353	0.9773	0.9786	0.9829

较好的结果。从以上分析表明, 本文所述分布式分层求解算法是求解多源观测逆问题的一种有效方法, 特别是在较细尺度上, 这种融合效果更显著。

比较表 2 中的第 3 列和第 4 列, 在较细尺度上, 两个传感器的数据做多尺度分布式分层融合后所提供的信息量远远高于做集中式融合所提供的信息量; 而在较粗尺度上, 多尺度分布式分层融合则提供与集中式融合大致相当的信息量。综合表中细尺度与粗尺度上的信息可知, 用分布式分层融合求解多源观测逆问题可以达到与用集中式融合求解大致相当的估计效果。

## 6 结论与展望

针对在多源观测逆问题求解时所需计算量过大这一实际问题, 本文基于相对误差协方差矩阵信息, 给出一种合理有效的多尺度分布式分层求解算法。采用多尺度分布式分层算法求解多源观测逆问题既可以达到与集中式求解算法相当的估计效果, 又可以减少求解过程所需的计算量。

基于小波金字塔分解的数据融合算法还有很多<sup>[8, 9]</sup>, 采用更精细的融合算法求解多源观测逆问题将会得到更好的结果。此外, 本文所述算法是基于相对误差协方差矩阵信息的, 可以考虑采用其他更一般的数量指标, 如熵、交叉熵等来代替相对误差协方差矩阵。

## 参 考 文 献

- [1] Miller E, Willsky A S. A multiscale approach to sensor fusion and the solution of linear inverse problems [J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 1995, 2(1): 127 – 147.
- [2] Throne R D, Olson L G, Windle R. A new method for incorporating weighted temporal and spatial smoothing in the inverse problem of electrocardiography[J]. *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*, 2002, 49(9): 1054 – 1059.
- [3] Tang Y Y, Zhou Funa, Wen Chenglin, Zhang Yanfeng. The multiscale distributed hierarchical fusion algorithm for the solution of linear inverse problem. Proceeding of ICMLC2003, Xi'an, 2003: 2442 – 2447.
- [4] 文成林, 周福娜. 求解线性逆问题的多尺度降阶模型[J]. 电子

与信息学报, 2004, 26(12): 1888 – 1894.

- [5] Oraitara S, Karl W C, Castanon D A, Nguyen T Q. A method for choosing the regularization parameter in generalized Tikhonov regularized linear inverse problems[J]. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2000, 9(1): 93 – 96.
- [6] 文成林, 周东华. 多尺度估计理论及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002, 第 2, 6, 8 章.
- [7] 周福娜. 多传感器数据融合与线性逆问题的多尺度求解方法[D]. [硕士学位论文], 开封: 河南大学, 2004.6.
- [8] 杨烜, 杨万海, 裴继红. 基于小波分解的不同聚焦点图象融合算法[J]. 电子学报, 2001, 29(3): 846 – 848.
- [9] Zhang Zhong, Blum R S. A caterotiazion of multiscale-decomposition-based image fusion schemes with a performance study for a digital camera application[J]. *Proc IEEE*, 1999, 87(8): 1315 – 1325.
- [10] 赵巍, 潘泉, 戴冠中, 张洪才. 多尺度系统理论研究概况[J]. 电子与信息学报, 2001, 23(12): 1427 – 1433.
- [11] 周福娜, 周梅, 文成林. 多传感器数据融合效果分析. 河南大学学报[J], 2003, 33(2): 33 – 36.

文成林: 男, 1963 年生, 博士(后), 教授, 博士生导师, 现为杭州电子科技大学特聘教授、浙江省省属高校《控制科学与工程》创新基地主要学术带头人之一。研究方向为系统建模与多源信息融合、多尺度估计理论、多模态安全检测、监控与故障诊断技术, 已发表学术论文 80 余篇, 出版学术专著 1 部。主持国家自然科学基金重点项目(联合 1 项)、国家自然科学基金(2 项)、教育部科学技术研究项目(1 项)、河南省杰出青年科学基金(1 项)等课题 20 余项。

<http://www.hdsm.org/>

<http://smip.hziee.edu.cn/wencl/index.htm>

E-mail [wencl@hziee.edu.cn](mailto:wencl@hziee.edu.cn) [\[tsinghua.org.cn\]\(http://tsinghua.org.cn\)](mailto:wenchenglin@mail.</a></p>
</div>
<div data-bbox=)

周福娜: 女, 1978 年生, 硕士, 研究方向为多尺度逆问题、统计信号处理、数据融合。已发表论文 8 篇。

文传博: 男, 1981 年生, 硕士生, 研究方向为统计信号处理、数据融合、随机集理论及应用。