

# 不定矩阵的拓扑计算\*

胡宗煊 蒋保臣  
(山东大学电子系)

## 提 要

本文引入线性系统分析中不定矩阵的拓展伴随有向图, 仅求出拓展伴随有向图的全部有向树, 便同时得到了不定矩阵的一阶和二阶代数余子式, 避免了通常求二阶代数余子式需找有向2树的运算, 使不定矩阵的拓扑计算更易于计算机程序化。

## 一、引 言

不定矩阵是具有“零和特性”的矩阵, 由于其一阶代数余子式都相等, 故又称为等余子式矩阵<sup>[1]</sup>。在线性电网络分析中的不定矩阵, 有不定导纳矩阵和不定阻抗矩阵<sup>[2]</sup>。生成符号网络函数的重要性使网络拓扑分析方法受到人们的特殊重视<sup>[3]</sup>。W. K. Chen 提出的有向图法<sup>[4]</sup>, 解决了线性非互易网络的拓扑分析问题, 而线性互易网络则为该方法的一个特例。有向图法的主要特点是把网络的不定导纳矩阵映射为伴随有向图, 从而推导出一套系统的拓扑分析公式。网络函数的生成归结为不定导纳矩阵的一阶和二阶代数余子式计算, 用有向图法则变换为在伴随有向图上找有向树和有向2树两种拓扑运算<sup>[1]</sup>。

本文将沿用文献[1]中关于不定矩阵、伴随有向图、有向树、有向2树等的定义。

为便于比较, 现把有向图法计算不定矩阵的一阶和二阶代数余子式的公式引录如下<sup>[1]</sup>:

(1) W. K. Chen 定理

$$S_{ij} = \sum_{T_R} f(T_R), \quad (1)$$

式中  $S_{ij}$  是不定矩阵  $S$  的  $(i, j)$  元素的一阶代数余子式,  $f(T_R)$  是伴随有向图  $G_d$  上以  $R$  为根的有向树  $T_R$  的树支权乘积, 求和是对全部有向树进行。

$$(2) S_{ij, st} = \sum_{T_{ii', st}} f(T_{ii', st}) - \sum_{T_{ii', si}} f(T_{ii', si}), \quad (2)$$

式中  $i \neq s, j \neq t, S_{ij, st}$  是不定矩阵  $S$  的  $(i, j)$  和  $(s, t)$  元素的二阶代数余子式,  $f(T_{ii', st})$  和  $f(T_{ii', si})$  分别是伴随有向图  $G_d$  的有向2树  $T_{ii', st}$  和  $T_{ii', si}$  的树支权乘积,  $i$  和  $s$  是有向2树两部分的根, 求和是对全部有向2树进行。

当  $i = j$  时,

\* 1983年7月7日收到, 1983年11月12日修改定稿。

$$S_{ii, st} = \sum_{T_{i, st}} f(T_{i, st}). \quad (3)$$

本文提出不定矩阵的拓展伴随有向图概念, 并证明求不定矩阵的一阶和二阶代数余子式只需找出拓展伴随有向图的有向树, 从而使计算公式归一化. 显然, 这对借助于计算机用有向图法生成符号网络函数是十分方便的.

需要说明的是, 式(1)–(3)不仅适用于不定导纳矩阵, 而且适用于其它形式的不定矩阵<sup>[5]</sup>, 本文所得的结果也具有这种普遍性.

## 二、拓展伴随有向图

**定义** 在不定矩阵  $\mathbf{S}$  的伴随有向图  $G_d$  上, 添加某些给定权的有向边所得的有向图  $\hat{G}_d$ , 称为  $\mathbf{S}$  的拓展伴随有向图, 并把此操作叫做伴随有向图的拓展.

若  $G_d = (V, E, f)$ ,  $V$  是顶点集,  $E$  为边集,  $f$  是权函数, 则  $\hat{G}_d = (V, \hat{E}, f)$ . 令  $i, j \in V$ , 添加的有向边为  $(i, j)_2$ , 且  $f((i, j)_2) = K$ , 则  $(i, j)_2 \in \hat{E}$ , 并有  $\hat{G}_d = G_d \cup (i, j)_2$ .

要注意在  $G_d$  上既可无也可无与  $(i, j)_2$  并行的边, 以下的讨论皆如此.

**定理 1** 设不定矩阵  $\mathbf{S}$  的伴随有向图  $G_d = (V, E, f)$ ,  $i, j, s, t \in V$ , 而  $(i, j)_2, (s, t)_2, (s, j)_2, (i, t)_2 \notin E$ ,  $\mathbf{S}$  的拓展伴随有向图  $\hat{G}_d = G_d \cup (i, j)_2 \cup (s, t)_2 \cup (s, j)_2 \cup (i, t)_2$ , 且  $f((i, j)_2) = f((s, t)_2) = -K$ ,  $f((s, j)_2) = f((i, t)_2) = K$ ,  $K$  是异于  $\mathbf{S}$  的各元素的符号, 则

$$S_{ii} + KS_{ii, st} = \sum_{\hat{T}_R} f(\hat{T}_R), \quad i, j \neq s, t, \quad (4)$$

其中  $S_{ii}$  是  $\mathbf{S}$  的  $(i, j)$  元素的一阶代数余子式,  $S_{ii, st}$  是  $\mathbf{S}$  的  $(i, j)$  和  $(s, t)$  元素的二阶代数余子式,  $f(\hat{T}_R)$  是  $\hat{G}_d$  上以  $R$  为根的有向树  $\hat{T}_R$  的树支权乘积, 求和是对全部有向树进行.

**证明** 设

$$\mathbf{u}_{pq} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} p \text{ 行} \\ \\ q \text{ 行} \end{matrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon}_p = \begin{bmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} p \text{ 行}, p \neq q, \end{matrix} \quad (5)$$

其中未标明的元素皆为 0. 由式(5)可直接得到

$$\mathbf{u}_{pq} - \mathbf{u}_{pm} = \mathbf{u}_{mq}, \quad (6a)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_p - \boldsymbol{\epsilon}_q = \mathbf{u}_{pq}. \quad (6b)$$

令  $\mathbf{u}_{pq}^+$  为将  $\mathbf{u}_{pq}$  的元素  $-1$  换为零, 而其余元素皆不变所得的列矢量, 显然

$$\mathbf{u}_{pq}^+ = \boldsymbol{\epsilon}_p. \quad (7)$$

设  $G_d$  的关联矩阵为  $\mathbf{A}_a$ ,  $\mathbf{A}_a^+$  是将  $\mathbf{A}_a$  中所有  $-1$  元素换为 0, 而其余元素保持不变



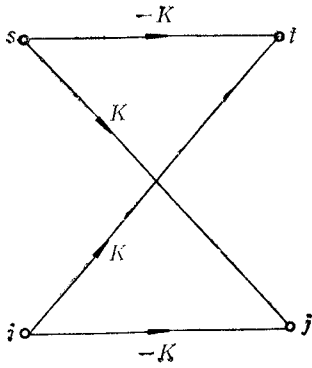


图1 求  $S_{ij}$  和  $S_{ij, st}$  的外加边

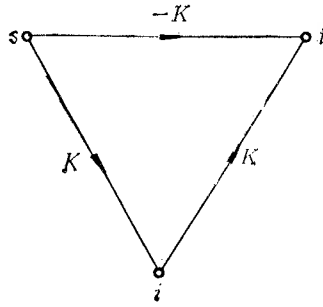


图2 求  $S_{ii}$  和  $S_{ii, st}$  的外加边

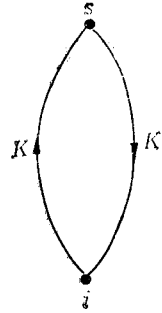


图3 求  $S_{ii}$  和  $S_{ii, ss}$  的外加边

**推论 1** 若  $i = j$ , 则

$$S_{ii} + KS_{ii, st} = \sum_{\hat{T}_R} f(\hat{T}_R), \quad i \neq s, t; \tag{11}$$

而  $\hat{G}_d = G_d \cup (s, t)_2 \cup (s, i)_2 \cup (i, t)_2$ , 且  $f((s, t)_2) = -K$  和  $f((s, i)_2) = f((i, t)_2) = K$ .

由于  $i = j$  时, 边  $(i, i)_2$  是自环, 按照不定矩阵与其伴随有向图的映射规则, 应将自环删去, 因而推论 1 便可由定理 1 直接得到. 此时的外加边示于图 2.

**推论 2** 若  $i = j$  和  $s = t$ , 则

$$S_{ii} + KS_{ii, ss} = \sum_{\hat{T}_R} f(\hat{T}_R), \quad i \neq s; \tag{12}$$

而  $\hat{G}_d = G_d \cup (s, i)_2 \cup (i, s)_2$ , 且  $f((s, i)_2) = f((i, s)_2) = K$ .

当  $i = j$  和  $s = t$  时, 图 1 中的边  $(i, j)_2$  和  $(s, t)_2$  皆成自环, 应删去. 此时的外加边示于图 3.

定理 1 及其推论给出了求不定矩阵各元素的一阶和二阶代数余子式的拓展伴随有向图法. 这就是, 把伴随有向图按照一定规则进行拓展, 再在拓展伴随有向图上找有向树. 下面我们根据拓扑图的特点把定理 1 及其推论给出的一般方法进一步简化.

### 三、拓扑简化定理

**定理 2** 若取  $R = s$ , 则

$$(1) S_{ij} + KS_{ij, st} = \sum_{\hat{T}_s} f(\hat{T}_s),$$

且  $\hat{G}_d = G_d \cup (i, j)_2 \cup (i, t)_2$ ,  $f((i, j)_2) = -K$  和  $f((i, t)_2) = K$ ;

$$(2) S_{ii} + KS_{ii, st} = \sum_{\hat{T}_s} f(\hat{T}_s),$$

且  $\hat{G}_d = G_d \cup (i, t)_2$  和  $f((i, t)_2) = K$ ;

$$(3) S_{ii} + KS_{ii,ss} = \sum_{\hat{T}_s} f(\hat{T}_s),$$

且  $\hat{G}_d = G_d \cup (i, s)_2$  和  $f((i, s)_2) = K$ .

**证明** W. K. Chen 定理中有向树的根  $R$  可为图中任一顶点, 在构成有向树时要求  $d^+(R) = 0$ ,  $d^+(R)$  是  $R$  的出度<sup>[1]</sup>. 若  $R = s$ , 则  $d^+(s) = 0$ , 因而顶点  $s$  的射出边  $(s, t)_2$  和  $(s, j)_2$  (见图 1),  $(s, t)_2$  和  $(s, i)_2$  (见图 2) 以及  $(s, i)_2$  (见图 3) 对构成有向树  $\hat{T}_s$  无贡献, 可预先去掉. 定理得证.

定理 2 所述三种情况的外加边示于图 4.

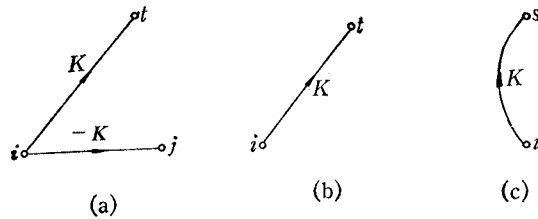


图 4 取  $s$  为根的外加边

对于图  $G_d = (V, E, f)$ , 若  $E_s \subset E$ , 则  $G_d(E_s) = G_d - E_s$ , 表示从  $G_d$  中移去构成  $E_s$  的边, 但保留各边端点所得的子图.  $\hat{T}_s(K)$  表示图  $\hat{G}_d$  中树支权含有  $K$  的有向树.

**推论** 若  $R = s$ , 则

$$(1) S_{ii,ss} = \frac{1}{K} \sum_{\hat{T}_s(K)} f(\hat{T}_s(K)),$$

且  $\hat{G}_d = G_d(E_s) \cup (i, j)_2 \cup (i, t)_2$ ,  $f((i, j)_2) = -K$  和  $f((i, t)_2) = K$ , 其中  $E_s = \{(i, j)_1, (i, t)_1\}$ ;

$$(2) S_{ii,ss} = \frac{1}{K} \sum_{\hat{T}_s(K)} f(\hat{T}_s(K)),$$

且  $\hat{G}_d = G_d(E_s) \cup (i, t)_2$  和  $f((i, t)_2) = K$ , 其中  $E_s = \{(i, t)_1\}$ ;

$$(3) S_{ii,ss} = \frac{1}{K} \sum_{\hat{T}_s(K)} f(\hat{T}_s(K)),$$

且  $\hat{G}_d = G_d(E_s) \cup (i, s)_2$  和  $f((i, s)_2) = K$ , 其中  $E_s = \{(i, s)_1\}$ .

**证明** 对于定理 2 所述的情况(2)和(3), 显然  $\hat{T}_s(K)$  有且仅有一条权含  $K$  的树支. 由于在构成有向树时, 对于非根顶点要求出度为 1<sup>[1]</sup>, 因此对定理 2 中所述情况(1)中的非根顶点  $i$  [见图 4(a)], 有  $d^+(i) = 1$ . 这时  $\hat{T}_s(K)$  也有且仅有一条权含  $K$  的树支, 再考虑到只有  $\hat{T}_s(K)$  才对计算二阶代数余子式有贡献, 推论便是定理 2 的直接结果. 证毕.

推论对于只需要计算二阶代数余子式或要求计算两个以上的二阶代数余子式的场合是十分重要的, 因为它避免了求或多次重复求一阶代数余子式. 由于不定矩阵的等余子式特性, 重复求一阶代数余子式是冗余的.

### 四、举 例

图 5 是晶体管反馈放大器的电路模型, 现求其不定导纳矩阵的  $Y_{12}$ ,  $Y_{12,43}$  和  $Y_{44,13}$ 。

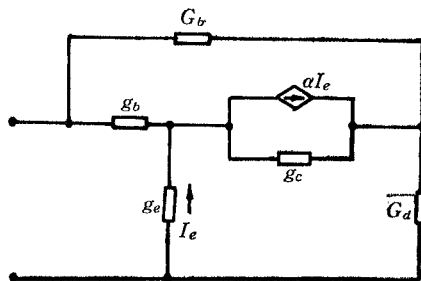


图 5 晶体管反馈放大器电路模型

用直接写入法<sup>[3]</sup>得到图 5 的不定导纳矩阵为

$$Y = \begin{bmatrix} G_b + g_b & -g_b & -G_b & 0 \\ -g_b & g_b + g_e + g_c + \alpha g_e & -g_c & -g_c + \alpha g_e \\ -G_b & -g_c + \alpha g_e & G_b + g_c + G_d & -G_d - \alpha g_e \\ 0 & -g_e & -G_d & G_b + g_c \end{bmatrix}$$

$Y$  的伴随有向图示于图 6。根据定理 2 得到的拓展伴随有向图, 如图 7 所示, 并以顶点 4 为根。图中已将并行边合并, 且用粗线标出。图 8 列出图 7 中以顶点 4 为根的全部有向

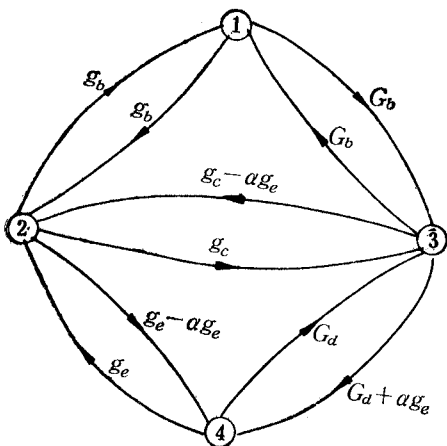


图 6 伴随有向图

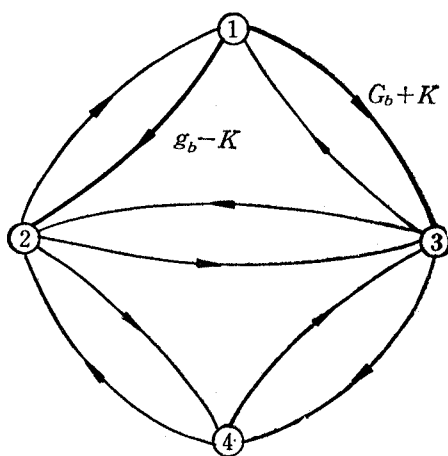


图 7 拓展伴随有向图

树。根据定理 2 有

$$\begin{aligned} Y_{12} + KY_{12,43} = & g_c(g_b - K)(G_d + \alpha g_e) + (g_b - K)(g_c - \alpha g_e)(G_d + \alpha g_e) \\ & + G_b(g_b - K)(g_c - \alpha g_e) + g_b(G_b + K)(G_d + \alpha g_e) \\ & + (G_b + K)(g_c - \alpha g_e)(G_d + \alpha g_e) + (G_b + K) \\ & \times (g_c - \alpha g_e)(g_e - \alpha g_e) + g_c(G_c + K)(G_d + \alpha g_e) \\ & + (g_b - K)(g_c - \alpha g_e)(g_e - \alpha g_e). \end{aligned}$$

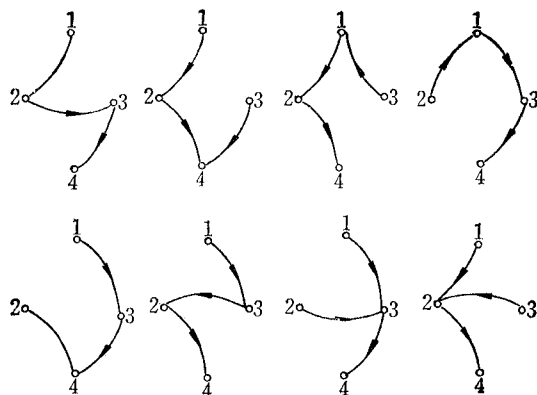


图 8 以 4 为根的有向树

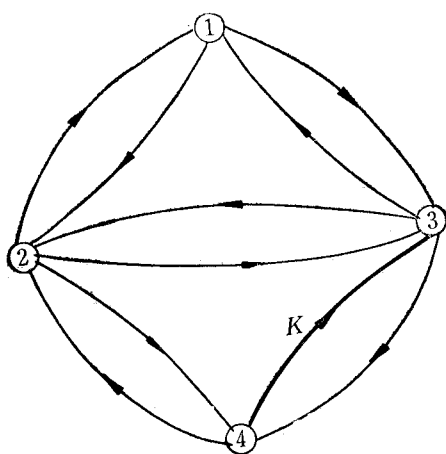


图 9 求  $Y_{44,13}$  的拓展伴随有向图

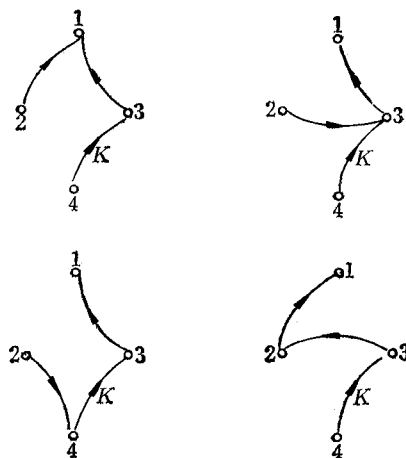


图 10 以 1 为根的有向树  $\hat{T}_s(K)$

化简并整理后得

$$Y_{12} = g_c g_b G_d + g_b (g_c - \alpha g_c) G_d + g_b g_c G_b + g_b G_b G_d + G_b G_d (g_c - \alpha g_c) + g_c g_c G_b + g_c G_b G_d + g_b g_c g_c$$

$$Y_{12,43} = g_b (G_d + \alpha g_c) - G_b (g_c - \alpha g_c).$$

现利用定理 2 的推论来计算  $Y_{44,13}$ 。这是属于推论中的情况 (2)。把伴随有向图(图 6)中的边 (4, 3) 的权换为  $K$  便得拓展伴随有向图,如图 9 所示。图中用粗线标示出这条边。有向树的根应取顶点 1。图 10 列出图 9 中全部以 1 为根,且有权含  $K$  树支的有向树。根据定理 2 的推论得

$$Y_{44,13} = g_b G_b + g_c G_b + (g_c - \alpha g_c) G_b + g_b (g_c - \alpha g_c) = (g_b + g_c + g_c - \alpha g_c) G_b + g_b (g_c - \alpha g_c).$$

### 五、结 论

本文把不定矩阵的伴随有向图拓展,提出了不定矩阵的拓展伴随有向图算法。应

用文中证明的拓扑简化定理，拓展时最多只需要添加两条边。该方法的主要优点在于把通常需要的两步运算简化为一步运算，这对编制计算机程序十分有利。从理论上来看，有了含义简明的拓展后，在讨论不定矩阵拓扑计算时，就不需要引入有向 2 树概念。由于本文所采用的方法是图形拓展，因而具有普遍意义。文献[3]所述的“网络拓展”——在网络上添加给定值元件——可看作是本文的定理 1 及其推论在节点分析中的一种物理解释。显然对于其它类型的不定矩阵还可以给出另外的物理解释。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] W. K. Chen, Applied Graph Theory, 2d rev. ed., Amsterdam, North-Holland, 1976, chap. 4.
- [ 2 ] N. Balabanian and T. A. Bickart, Electrical Network Theory, John Wiley and Sons, Inc., 1969, chap. 3.
- [ 3 ] L. O. Chua and P. M. Lin, Computer-Aided Analysis of Electronic Circuits: Algorithms and Computational Techniques, Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1975, Chap. 14.
- [ 4 ] W. K. Chen, *IEEE Trans. on CT*, CT-12(1965), 85.
- [ 5 ] W. K. Chen, *ibid.*, CT-13(1966), 440.
- [ 6 ] A. Talbot, *ibid.*, CT-13(1966), 111.

## TOPOLOGICAL COMPUTATION OF INDEFINITE MATRIX

Hu Zongxuan, Jiang Baochen

(Department of Electronics, Shandong University)

A diagraph associated with an indefinite matrix is augmented. Both first-order and second-order cofactors can be obtained by finding all the directed trees in the augmented diagraph, and then, the need of computing the directed 2-trees for the second-order cofactors is eliminated. The method proposed here is particularly applicable to computer-programming.