第2卷 第4期 电子学通讯 Vol. 2, No. 4
1980 年 10 月 JOURNAL OF ELECTRONICS Oct., 1980

螺旋线行波管速度再同步的理论和计算(一)*

宋文淼 周文表

提 要

本文论述了用速度再同步的方法改进螺旋线行波管的效率的有关理论、计算方法及结果. 在第一部分中,从理论上重新推导了相速渐变行波管的工作方程组,发现 Rowe 所给的工作方程组中关于阻抗的修正项有误,本文作了修正. 对于相速跃变的情况,把相速跃变段看作均匀螺线行波管,并进行归一化的转换,亦证明本文公式的正确性. 在第二部分中将给出程序设计和计算方法,并与实验结果作了比较.

用速度再同步的方法来提高行波管的效率,已经得到了广泛的应用. Meeker 和 Rowe[1] 首先给出了相速变化时的大信号工作方程组,后来 Rowe[2] 又作了修正. 我们的工作在于应用他们的模型对工作方程进行重新推导, 应用更合理的方法处理随着相速渐变所引起的阻抗变化的影响,从而修正了原工作方程组中某些不合理的地方.

一、相速渐变大信号工作方程组的推导

在相速渐变或跃变的大信号工作方程组的推导中出现的主要问题是由于相速渐变所引起相应的阻抗改变,而阻抗改变则引起能流和电场的关系以及归一化参量等的改变.因此与文献[2]一致的部分不再重复. 从该书第 XIII 章 (1) 式得到对于变参量的传输线等效电路的差分方程:

$$\frac{\partial^2 V(z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{v_0^2(z)}\frac{\partial^2 V(z,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z}\ln\left(\frac{Z_0(z)}{v_0(z)}\right)\frac{\partial V(z,t)}{\partial z}$$
$$-\frac{2\omega C_0}{v_0^2(z)}\frac{\partial V(z,t)}{\partial t} = -\frac{Z_0(z)}{v_0(z)}\left[\frac{\partial^2 \rho(z,t)}{\partial t^2} + 2\omega C_0 d(z)\frac{\partial \rho(z,t)}{\partial t}\right] \qquad (1)$$

把电压 $V(z,t)$ 的幅度和相位分离. 即令

$$V(z,t) = V(z)\cos\left[-\varphi(z,t)\right]$$

代入 (1) 式得:

$$\left[\frac{d^2V(z)}{dz^2} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 V(z)\right]\cos(-\varphi) + \left[2\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{dV(z)}{dz} + V(z)\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right]\sin(-\varphi)$$

---

* 1979 年 5 月 19 日收到.

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\omega^2}{v_0^2(z)} V(z)\cos(-\varphi)-\frac{d}{dz}\left[\ln\frac{Z_0(z)}{v_0(z)}\right] V(z)\frac{\partial\varphi}{\partial z}\sin(-\varphi)\\
&-\frac{d}{dz}\left[\ln\frac{Z_0(z)}{v_0(z)}\right]\frac{dV(z)}{dz}\cos(-\varphi)+\frac{2\omega C_0 d(z)}{v_0^2(z)}\omega\cdot V(z)\sin(-\varphi) \qquad (2)\\
&=-\frac{Z_0(z)}{v_0(z)}\frac{\partial^2\rho_1(z,t)}{\partial t^2}-2\omega C_0 d(z)\frac{Z_0(z)}{v_0(z)}\frac{\partial\rho_1(z,t)}{\partial t}
\end{aligned}
$$

下面进行归一化处理．由于行波管的相速不再是常数，所以 b 和增益参量 C 也应随距离而改变．但是整个系统必须对一个固定的常数进行归一化，我们对未渐变时的增益参量 C_0 进行归一化．这样，我们把 C_0 只看作一个归一化常数而不是增益参量，只有在未渐变段，这个归一化常数才等于增益参量，而在渐变段就只有归一化常数的意义．和一般的行波管大信号理论一样：

$$y=\frac{C_0\omega}{u_0}z \tag{3}$$

$$-\varphi(z,t)=\omega t-\left[\frac{\omega}{u_0}z-\theta(y)\right]=\omega t-[y/C_0-\theta(y)] \tag{4}$$

$$\frac{dz}{dt}=u_0[1+2C_0u(y,\varphi_0)] \tag{5}$$

非同步参量 b 也对 C_0 来定义：

$$b(y)=\frac{1}{C_0}\left(\frac{u_0}{v_0(y)}-1\right) \tag{6}$$

注意：这里的非同步参量 b 在相速和增益参量 C 都改变的区域已不是一般定义的非同步参量，因为它不是对真实的增益参量而是对 C_0 归一化．

归一化电压的定义是一个需要认真讨论的问题．因为随着相速的变化，阻抗也随之变化；阻抗变化，功率流和电压的关系式也要随之变化．这样，当相速改变时，电压和功率流就不可能同时连续．显然，我们只能让功率流连续（这相当于假定在相速渐变时波的传输是理想匹配的，没有功率反射）．我们把 $A(y)$ 定义为：

$$P(y)=2C_0I_0V_0A^2(y) \tag{7}$$

即

$$A(y)=\sqrt{\frac{P(y)}{2C_0I_0V_0}} \tag{8}$$

这样，$A(y)$ 在相速渐变的情况下，不再有归一化电压的意义，而只表示和功率流的开方有关的一个归一化量．它和电路实际阻抗的变化无关．在计算过程中只要 $A(y)$ 连续，就保证了功率流的连续．

下面寻找电压 $V(y)$ 和 $A(y)$ 的关系．从电压对功率流的关系

$$P(y)=\frac{1}{2}V^2(y)/Z_0(y) \tag{9}$$

来确定 $A(y)$ 和 $V(y)$ 的关系

$$A^2(y)=\frac{P(y)}{2C_0I_0V_0}=\frac{V^2(y)}{4C_0I_0V_0Z_0(y)}=V^2(y)\left(\frac{Z_0}{Z_0(y)}\right)\frac{C_0^2}{4C_0^3I_0V_0Z_0}$$

$$= V^2(y)\left(\frac{Z_0}{Z_0(y)}\right)\frac{C_0^2}{I_0^2 Z_0^2}$$

即

$$V(y) = \frac{I_0 Z_0}{C_0}\left(\frac{Z_0(y)}{Z_0}\right)^{1/2} A(y) \tag{10}$$

把(3)(4)(5)(6)(10)式代入(2)式，并使 $\cos(-\varphi)$ 和 $\sin(-\varphi)$ 项分别等起来，就得到二个电路方程：

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2A(y)}{dy^2} - A(y)\left[\left(\frac{d\theta(y)}{dy} - \frac{1}{C_0}\right)^2 - \left(\frac{1 + C_0 b(y)}{C_0}\right)^2\right] \\
&\quad - \frac{dA(y)}{dy}\left[\frac{d}{dy}\ln\left(\frac{Z_0(y)}{Z_0}\right) + \frac{C_0}{1 + C_0 b(y)}\frac{db(y)}{dy}\right] \\
&= -\left(\frac{1 + C_0 b(y)}{\pi C_0}\right)\left(\frac{Z_0(y)}{Z_0}\right)^{1/2}\left[\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi(y,\varphi_0')d\varphi_0'}{1 + 2C_0 u(y,\varphi_0')}\right. \\
&\quad \left. + 2C_0 d(y)\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi(y,\varphi_0')d\varphi_0'}{1 + 2C_0 u(y,\varphi_0')}\right]
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
&A(y)\left[\frac{d^2\theta(y)}{dy^2} - \left(\frac{d\theta(y)}{dy} - \frac{1}{C_0}\right)\left(\frac{d}{dy}\ln\frac{Z_0(y)}{Z_0} + \frac{C_0}{1 + C_0 b(y)}\frac{db(y)}{dy}\right)\right. \\
&\quad \left. - \frac{2d(y)}{C_0}(1 + C_0 b(y))^2\right] + 2\left(\frac{d\theta(y)}{dy} - \frac{1}{C_0}\right)\frac{dA(y)}{dy} \\
&= -\left(\frac{1 + C_0 b(y)}{\pi C_0}\right)\left(\frac{Z_0(y)}{Z_0}\right)^{1/2}\left[\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi(y,\varphi_0')d\varphi_0'}{1 + 2C_0 u(y,\varphi_0')}\right. \\
&\quad \left. - 2C_0 d(y)\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi(y,\varphi_0')d\varphi_0'}{1 + 2C_0 u(y,\varphi_0')}\right]
\end{aligned} \tag{12}$$

运动方程和相位关系方程可用同样方法求得：

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u(y,\varphi_0)}{\partial y}[1 + 2C_0 u(y,\varphi_0)] = \left(\frac{Z_0(y)}{Z_0}\right)^{1/2}\left[-A(y)\left(1 - C_0\frac{d\theta(y)}{dy}\right)\right. \\
&\quad \left. \cdot \sin\varphi(y,\varphi_0) + C_0\frac{dA(y)}{dy}\cos\varphi(y,\varphi_0)\right] \\
&\quad + \frac{1}{4}\left(\frac{\omega_p}{\omega_C}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1.25}{\nu b'}|\varphi - \varphi'|[1 + 2C_0 u(y,\varphi_0')]\right\}d\varphi' \\
&\quad \cdot \operatorname{sgn}(\varphi - \varphi')
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\frac{d\theta(y)}{dy} + \frac{\partial\varphi(y,\varphi_0)}{\partial y} = \frac{2u(y,\varphi_0)}{1 + 2C_0 u(y,\varphi_0)} \tag{14}$$

(11)—(14)式就是相速渐变下的大信号工作方程组．在推导上面公式时忽略了 $Z_0(y)$ 对 y 的导数，即认为：

$$\frac{dV(y)}{dy} = \frac{I_0 Z_0}{C_0}\left(\frac{Z_0(y)}{Z_0}\right)^{1/2}\frac{dA(y)}{dy}.$$

二、与 Meeker 及 Rowe 结果的比较

为了和 Meeker 及 Rowe 的结果相比较，把(10)式变为：

$$V(y) = \frac{I_0 Z_0}{C_0} \zeta(y) A(y) \tag{15}$$

在我们的公式中

$$\zeta(y) = \left(\frac{Z_0(y)}{Z_0}\right)^{1/2} \tag{16}$$

而 Meeker 的工作方程组相当于令 $\zeta(y) = 1$ 的情况. 也就是认为在渐变过程中保持电压连续. 这显然和基本的物理概念不符. 因为在相速渐变行波管中, 相速总是向小的方向变,阻抗也向小的方向变. 在阻抗变小的同时保持电压不变, 功率流就会增大, 如果阻抗从 Z_0 突变到 Z_1, 功率流就要突然变大 Z_0/Z_1 倍,这当然是不合理的.

在文献[2]中,修正了文献[1]的结果,引入了修正因子 $\zeta(y)$. 与本文的(16)式一致. 但是其电路方程的表达式仍然有误. 把(15)式代入(11)式,可得:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2A(y)}{dy^2} - A(y)\left[\left(\frac{d\theta(y)}{dy} - \frac{1}{C_0}\right)^2 - \left(\frac{1 + C_0 b(y)}{C_0}\right)^2\right] \\
&\quad - \frac{dA(y)}{dy}\left[\frac{d}{dy}\ln\left(\frac{Z_0(y)}{Z_0}\right) + \frac{C_0}{1 + C_0 b(y)}\frac{db(y)}{dy}\right] \\
&= -\left(\frac{1 + C_0 b(y)}{\pi C_0}\right)\left(\frac{Z_0(y)}{Z_0}\right)\zeta(y)^{-1}\left[\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi(y, \varphi_0')d\varphi_0'}{1 + 2C_0 u(y, \varphi_0')}\right. \\
&\quad \left. + 2C_0 d(y)\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi(y, \varphi_0')d\varphi_0'}{1 + 2C_0 u(y, \varphi_0')}\right]
\end{aligned} \tag{17}$$

将(17)式和文献[2]中对应的公式比较,文献[2]中用 $\zeta(y)$ 代替了这里的 $\zeta(y)^{-1}$.

对于(12)式亦有类似的情况,同样把 $\zeta(y)^{-1}$ 项,误为 $\zeta(y)$.

三、相速跃变情况的讨论

在实际上相速跃变比相速渐变得到了更广泛的应用. 对相速跃变的情况, 电路方程中的 $Z_0(y)$ 和 $b(y)$, 只是在跃变段由原来的 Z_0、b_0 变为 Z 和 b, 工作方程中相应的微分项消失,方程简化为:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2A(y)}{dy^2} - A(y)\left[\left(\frac{d\theta(y)}{dy} - \frac{1}{C_0}\right)^2 - \left(\frac{1 + C_0 b}{C_0}\right)^2\right] \\
&= -\left(\frac{1 + C_0 b}{\pi C_0}\right)\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^{1/2}\left[\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi(y, \varphi_0')d\varphi_0'}{1 + 2C_0 u(y, \varphi_0')}\right. \\
&\quad \left. + 2C_0 d\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi(y, \varphi_0')d\varphi_\theta'}{1 + 2C_0 u(y, \varphi_0')}\right]
\end{aligned} \tag{18}$$

和

$$\begin{aligned}
&A(y)\left[\frac{d^2\theta(y)}{dy^2} - \frac{2d}{C_0}(1 + C_0 b)^2\right] + 2\left(\frac{d\theta(y)}{dy} - \frac{1}{C_0}\right)\frac{dA(y)}{dy} \\
&= -\left(\frac{1 + C_0 b}{\pi C_0}\right)\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^{1/2}\left[\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi(y, \varphi_0')d\varphi_0'}{1 + 2C_0 u(y, \varphi_0')}\right. \\
&\quad \left. - 2C_0 d\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi(y, \varphi_0')d\varphi_0'}{1 + 2C_0 u(y, \varphi_0')}\right]
\end{aligned} \tag{19}$$

在这两个方程中，对跃变段所用的归一化仍对 C_0. 我们也可以把相速跃变段处理为一个独立的行波管，对自己的增益参量 C_1 归一化，然后把第一段的出口和第二段的入口匹配起来. 把用这种方法得到的结果和前面的结果加以比较，以鉴别工作方程的正确性.

第一段都保持原来的符号. 第二段的增益参量 C_1，当其它各参量都以 C_1 来归一化时以带有下角标 1 的符号表示. 因而由普通的行波管电路方程可得[3]：

$$\frac{d^2A_1(y_1)}{dy_1^2} - A_1(y_1)\left[\left(\frac{d\theta_1(y_1)}{dy_1} - \frac{1}{C_1}\right)^2 - \left(\frac{1 + C_1b_1}{C_1}\right)^2\right]$$
$$= -\frac{1 + b_1C_1}{\pi C_1}\left[\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi_1(y_1, \varphi_0')d\varphi_0'}{1 + 2C_1u_1(y_1, \varphi_0')}\right.$$
$$\left. + 2C_1d_1\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi_1(y_1, \varphi_0')d\varphi_0'}{1 + 2C_1u_1(y_1, \varphi_0')}\right] \tag{20}$$

用这种方法计算时需注意边界匹配时 A 是不连续的. 但也可用第一段的 C_0 对跃变段作归一化，相应的参量用原来的符号表示. 这两组参量之间只差一个归一化参量，所以很容易找出相互之间的关系.

$$y_1 = \frac{C_1}{C_0}y \tag{21}$$

$$1 + 2C_1u_1(y_1, \varphi_0) = 1 + 2C_0u(y, \varphi_0) = \frac{1}{u_0}\frac{dz}{dt} \tag{22}$$

$$1 + C_1b_1 = 1 + C_0b = \frac{u_0}{v_0} \tag{23}$$

显然 φ 和 θ 依然保持不变. 对 $A_1(y)$ 来说

$$P(y) = 2I_0V_0\,C_1A_1^2(y)$$

而对 $A(y)$ 来说，还是对 C_0 归一化，即

$$P(y) = 2I_0V_0\,C_0A^2(y)$$

则有：

$$A_1(y_1) = \left(\frac{C_0}{C_1}\right)^{1/2}A(y) \tag{24}$$

大信号理论中对 d 的定义为：

$$C_0d = C_1d_1 = R(z)/2\omega L(z) \tag{25}$$

把(21)—(25)式代入(20)式则得用 C_0 归一化表示的跃变段的电路方程：

$$\left(\frac{C_0}{C_1}\right)^{1/2}\frac{d^2A(y)}{dy^2}\left(\frac{C_0}{C_1}\right)^2 - \left(\frac{C_0}{C_1}\right)^{1/2}A(y)\left(\frac{C_0}{C_1}\right)^2\left[\left(\frac{d\theta(y)}{dy} - \frac{1}{C_0}\right)^2\right.$$
$$\left. - \left(\frac{1 + C_0b}{C_0}\right)^2\right] = -\frac{1 + bC_0}{\pi C_0}\left(\frac{C_0}{C_1}\right)\left[\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi(y, \varphi_0')d\varphi_0'}{1 + 2C_0u(y, \varphi_0')}\right.$$
$$\left. + 2C_0d\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi(y, \varphi_0')d\varphi_0'}{1 + 2C_0u(y, \varphi_0')}\right]$$

简化后，代入 $\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^{1/2} = \left(\frac{C_1}{C_0}\right)^{3/2}$，得：

$$\frac{d^2A(y)}{dy^2}-A(y)\left[\left(\frac{d\theta(y)}{dy}-\frac{1}{C_0}\right)^2-\left(\frac{1+C_0b}{C_0}\right)^2\right]$$
$$=-\frac{1+bC_0}{\pi C_0}\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^{1/2}\left[\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi(y,\varphi_0')d\varphi_0'}{1+2Cu(y,\varphi_0')}\right.$$
$$\left.+2C_0d\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi(y,\varphi_0')d\varphi_0'}{1+2Cu(y,\varphi_0')}\right] \tag{26}$$

(26)式显然和(18)式是一致的,而不同于文献[2]的结果. 同样可得:

$$A(y)\left[\frac{d^2\theta(y)}{dy^2}-2\frac{d}{C_0}(1+C_0b)^2\right]+2\left(\frac{d\theta(y)}{dy}-\frac{1}{C_0}\right)\frac{dA(y)}{dy}$$
$$=-\left(\frac{1+C_0b}{\pi C_0}\right)\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^{1/2}\left[\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi(y,\varphi_0')d\varphi_0'}{1+2C_0u(y,\varphi_0')}\right.$$
$$\left.-2C_0d\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi(y,\varphi_0')d\varphi_0'}{1+2C_0u(y,\varphi_0')}\right] \tag{27}$$

该式与(19)式也是一致的. 充分证明文献[2]的结果是错误的.

四、小 结

我们用两种不同的方法推导相速跃变下的工作方程组的结果都证明了文献[2]的工作方程组是错误的. (26) (27) (13) (14) 四式就是我们进行相速跃变计算的出发点. 由于这和一般大信号工作方程组的差别仅在二个参量 b 和 Z/Z_0, 因而我们可以直接应用普通行波管大信号计算程序中的绝大部分结果[3,4], 而只需在相速跃变后代入相应的 b 和 $(Z/Z_0)^{1/2}$ 两个值就行了. 在计算中的一个重要问题是确定螺距改变后引起的相应的相速和阻抗的改变,这里采用文献[5]所提供的方法. 程序设计、计算结果及其与实验的比较将在本文的第二部分中论述.

参 考 文 献

[1] J. G. Meeker and J. E. Rowe, *IRE Trans. on Electron Devices*, *ED-9* (1962), 257.
[2] J. E. Rowe "Nonlinear Electron-wave interaction phenomena" Academic Press, New York (1965).
[3] 宋文淼等,行波管非线性相互作用理论和计算,微波管设计参考资料之五,内部资料,(1976).
[4] 中小功率行波管设计手册,内部资料,(1976).
[5] 周文表,电子学通讯, 1975 年,第 1 期,第 1 页;电子学通讯 1980 年,第 2 期,第 72 页.