第 19 卷 第 2 期
1997 年 3 月
电子科学学刊
JOURNAL OF ELECTRONICS
Vol.19 No.2
March 1997

非最小相位 ARMA 模型的一种自适应辨识算法 [1]

宋 宇 张贤达 李衍达
(清华大学自动化系 北京 100084)

摘 要 本文提出了一种加性有色高斯噪声中因果非最小相位 ARMA 模型的自适应辨识算法。模型输入假定为非高斯独立同分布随机过程。算法只利用了观测信号的高阶统计量。在每次迭代中，先估计 AR 参数，再估计 MA 参数，但不用计算残差序列。在参数递推中采用了随机梯度法。仿真实验证实了本文算法的有效性。

关键词 ARMA 模型，非最小相位系统，高阶累积量，自适应辨识，盲信号处理

中图号 TN911.7

1 引 言

非最小相位系统是现实世界中常见的系统。近年来非最小相位线性系统的自适应辨识问题日益受到重视。它的重要应用包括通信信道的估计和均衡以及地震勘探中子波的估计和反射系数序列的求取等。在这类应用中我们只知道系统的输出，需要根据它辨识系统并恢复输入信号。这就是所谓的盲信号处理问题。传统的辨识技术采用观测信号的二阶统计量，即相关函数。这种技术在输入未知的情况下不可能辨识非最小相位系统 [1] 。高阶累积量由于保持相位信息和抑制高斯噪声等特点而成为非最小相位系统辨识的合适工具。文献 [2,3] 给出了高阶累积量的定义和性质，并总结了一些基于高阶累积量的 ARMA 模型的批处理辨识算法。文献 [4] 提出了一种基于自相关函数高阶累积量的 ARMA 模型的自适应辨识算法，分别采用 RLS 算法和超定递推辅助变量 (ORIV) 算法估计 AR 和 MA 参数。由于使用了二阶统计量，这种算法对有色噪声比较敏感。它通过计算 AR 滤波后的残差序列来估计 MA 参数。残差时间序列的计算是非递推的，每到达一个数据都需要重新计算整个序列，使计算量陡然增大并需要耗费大量的存储器保存整个观测信号。为克服这些缺点，本文设计了一种基于高阶累积量的 ARMA 模型的自适应辨识算法。它不用直接计算残差序列。

2 自适应辨识算法

2·1 基于高阶累积量的辨识方程组

考虑一个因果非最小相位 ARMA 模型 (图 1)

$$\sum_{k=0}^{p} a(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{q} b(k)w(n-k), \tag{1}$$

[1] 1994-12-05 收到， 1995-07-04 定稿
国家自然科学基金资助课题

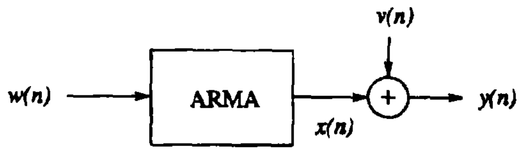

图 1 系统模型

其中输入信号 $w(n)$ 是零均值、非高斯、独立同分布随机过程。观测信号 $y(n)$ 是模型输出 $x(n)$ 加上有色高斯噪声 $v(n)$, 即

$$y(n) = x(n) + v(n). \tag{2}$$

不失一般性，设参数 $a(0) = b(0) = 1$ ，并设 ARMA 模型不存在零、极点对消的情况。因果非最小相位的条件意味着极点全在单位圆内而零点可处于任意位置。我们需要在 $w(n)$ 和 $v(n)$ 均未知的条件下随着观测信号 $y(n)$ 的到来自适应地估计参数 $a(k)$ 和 $b(k)$ 。 Giannakis[5] 证明了以下高阶修正 Yule-Walker 方程组具有列满秩的系数方程组：

$$\begin{bmatrix} C_{ky}(q+1-p, q-p) & \cdots & C_{ky}(q, q-p) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{ky}(q+1-p, q) & \cdots & C_{ky}(q, q) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{ky}(q, q-p) & \cdots & C_{ky}(q+p-1, q-p) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{ky}(q, q) & \cdots & C_{ky}(q+p-1, q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(p) \\ a(p-1) \\ \vdots \\ a(1) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} C_{ky}(q+1, q-p) \\ \vdots \\ C_{ky}(q+1, q) \\ \vdots \\ C_{ky}(q+p, q-p) \\ \vdots \\ C_{ky}(q+p, q) \end{bmatrix}, \tag{3}$$

其中

$$C_{ky}(\tau_1, \tau_2) = C_{ky}(\tau_1, \tau_2, 0, \cdots, 0), \qquad k \geq 3. \tag{4}$$

通过求解 (3) 式可以唯一地确定 ARMA 模型 (1) 式的 AR 参数。

另一方面，令残差序列

$$\tilde{y}(n) = \sum_{k=0}^{p} \hat{a}(k) y(n-k), \tag{5}$$

并把 (1),(2) 式代入 (5) 式，得

$$\tilde{y}(n) = \sum_{k=0}^{q} b(k) w(n-k) + \sum_{k=0}^{p} a(k) v(n-k) + \sum_{k=0}^{p} [\hat{a}(k) - a(k)] y(n-k). \tag{6}$$

实际应用中我们须用观测数据估计累积量，再代入 (3) 式求解 AR 参数。如果模型 (1) 式稳定，输入信号 $w(n)$ 平稳，并且它的前八阶累积量绝对可加，则累积量估计是一致的 [2,6] 。根据 (3) 式， AR 参数估计是累积量估计的连续函数，而一致估计的连续函数仍然是一致的 [7] ，所以 AR 参数估计是一致的，即数据趋于无穷多时， $\hat{a}(k)$ 依概率收敛于 $a(k)$, 从而 (6) 式右边最后一项收敛于 0 。高斯随机过程的线性组合仍为高斯过程，因此 (6) 式右边第二项可看作一有色高斯噪声。由 $\tilde{y}(n)$ 估计 $b(k)$ 的问题即为加性有色高斯噪声中非最小相位 MA 模型的盲辨识问题。

张贤达等人[8]提出了以下基于高阶累积量的 MA 模型的线性辨识方程组：

$$\begin{bmatrix} C_{k\tilde{y}}^{k-1}(q,q) & & & 0 \\ C_{k\tilde{y}}^{k-1}(q,q-1) & C_{k\tilde{y}}^{k-1}(q,q) & & \\ \vdots & \vdots & & \\ C_{k\tilde{y}}^{k-1}(q,0) & C_{k\tilde{y}}^{k-1}(q,1) & \cdots & C_{ky}^{k-1}(q,q) \\ & C_{k\tilde{y}}^{k-1}(q,0) & \cdots & C_{ky}^{k-1}(q,q-1) \\ & & & \vdots \\ 0 & & & C_{k\tilde{y}}(q,0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(0) \\ b(1) \\ \vdots \\ b(q) \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} C_{k\tilde{y}}(-q,0) \\ C_{k\tilde{y}}(1-q,0) \\ \vdots \\ C_{k\tilde{y}}(0,0) \\ C_{k\tilde{y}}(1,0) \\ \vdots \\ C_{k\tilde{y}}(q,0) \end{bmatrix}, \tag{7}$$

其中

$$s = C_{k\tilde{y}}^{k-3}(q,0)C_{k\tilde{y}}(q,q), \tag{8}$$

$$C_{k\tilde{y}}(\tau_1,\tau_2) = C_{k\tilde{y}}(\tau_1,\tau_2,0,\cdots,0), \qquad k \geq 3. \tag{9}$$

方程组 (7) 式可以唯一地确定 MA 参数[8]。

2.2 累积量的更新

为了实现参数的自适应辨识我们需要按时间递推的累积量估计值。(3) 式中所需的累积量可直接从观测信号按下列形式递推估计：

$$C^{(i)} = \lambda_i C^{(i-1)} + \Delta^{(i)}, \tag{10}$$

其中 λ_i 为遗忘因子 $(0 < \lambda_i < 1)$，$\Delta^{(i)}$ 是新信息。以平稳信号的三阶累积量为例：

$$\hat{C}_{3y}^{(i)}(\tau_1,\tau_2) = \frac{i-1}{i}\hat{C}_{3y}^{(i-1)}(\tau_1,\tau_2) + \frac{1}{i}y(i-j)y(i-j+\tau_1)y(i-j+\tau_2), \quad j = \max(0,\tau_1,\tau_2). \tag{11}$$

为了得到 (7) 式中所需的残差序列累积量的更新，可以利用累积量的以下两条性质[2]：

性质 1　如果 $\lambda_i, i=1,\cdots,k$ 是常数，而 $x_i, i=1,\cdots,k$ 是随机变量，则

$$\mathrm{cum}(\lambda_1 x_1,\cdots,\lambda_k x_k) = \left(\prod_{i=1}^{k}\right)\mathrm{cum}(x_1,\cdots,x_k). \tag{12}$$

性质 2　随机变量和的累积量等于它们累积量的和，即

$$\mathrm{cum}(x_0+y_0,z_1,\cdots,z_k) = \mathrm{cum}(x_0,z_1,\cdots,z_k) + \mathrm{cum}(y_0,z_1,\cdots,z_k). \tag{13}$$

由随机过程累积量的定义[2]，残差序列的定义 (5) 式和以上两条性质的重复使用，得

$$\begin{aligned} C_{k\tilde{y}}(\tau_1,\cdots,\tau_{k-1}) &= \mathrm{cum}[\tilde{y}(n),\tilde{y}(n+\tau_1),\cdots,\tilde{y}(n+\tau_{k-1})] \\ &= \mathrm{cum}[\sum_{i_1=0}^{p}\hat{a}(i_1)y(n-i_1),\sum_{i_2=0}^{p}\hat{a}(i_2)y(n-i_2+\tau_1),\cdots,\sum_{i_k}^{p}\hat{a}(i_k)y(n-i_k+\tau_{k-1})] \\ &= \sum_{i_1,\cdots,i_k=0}^{p}\hat{a}(i_1)\cdots\hat{a}(i_k)\mathrm{cum}[y(n-i_1),y(n+\tau_1-i_2),\cdots,y(n+\tau_{k-1}-i_k)] \\ &= \sum_{i_1,\cdots,i_k=0}^{p}\hat{a}(i_1)\cdots\hat{a}(i_k)C_{ky}(\tau_1+i_1-i_2,\cdots,\tau_{k-1}+i_1-i_k). \end{aligned} \tag{14}$$

即可按下式由观测信号累积量的估计值和 AR 参数的估计值估计残差序列的累积量：

$$\hat{C}_{k\tilde{y}}(\tau_1,\cdots,\tau_{k-1})=\sum_{i_1,\cdots,i_k=0}^{p}\hat{a}(i_1)\cdots\hat{a}(i_k)\hat{C}_{ky}(\tau_1+i_1-i_2,\cdots,\tau_{k-1}+i_1-i_k). \tag{15}$$

按上式的累积量更新避免了残差序列的直接计算，减小了计算量并且不用存储整个观测信号，适合于设计适应算法。

2.3 自适应算法

把累积量的时间递推估计代入 (3) 和 (7) 式，可得时变辨识方程组，记为

$$\hat{A}_i\hat{\theta}_i=\hat{c}_i. \tag{16}$$

令误差向量为

$$e_i=\hat{c}_i-\hat{A}_i\hat{\theta}_i, \tag{17}$$

准则函数为

$$\xi_i(\hat{\theta}_i)=\frac{1}{2}\|e_i\|^2, \tag{18}$$

则准则函数的负梯度为

$$g_i=-\partial\xi_i(\hat{\theta}_i)/\partial\hat{\theta}_i=\hat{A}_i^Te_i. \tag{19}$$

根据梯度法，参数估计的递推公式为

$$\hat{\theta}_{i+1}=\hat{\theta}_i+\mu_ig_i. \tag{20}$$

与优化技术中的最速下降法 [9] 类似，我们在 (20) 式中选取最佳可变步长：

$$\mu_i=g_i^Tg_i/(h_i^Th_i), \tag{21}$$

其中

$$h_i=\hat{A}_ig_i. \tag{22}$$

这种步长具有最快的收敛速度。

3 仿真实验结果

此处提供一个典型的仿真例子。数据长度为 5000，信噪比为 20dB，非最小相位 ARMA(2,2) 模型为

$$x(n)-1.2x(n-1)+0.36x(n-2)=w(n)+w(n-2).$$

它具有双重极点 0.6，而零点为 $\pm j$。输入信号 $w(n)$ 是一个指数分布随机过程 $(\gamma_1=0,\gamma_2=1,\gamma_3=2)$。加性噪声 $v(n)$ 是一高斯 AR(2) 过程：

$$v(n)-0.49v(n-2)=e(n),$$

其中 $e(n)$ 是高斯白噪声。设模型阶数已知。采用三阶累积量辨识此系统。图 2 给出了 50 次 Monte Carlo 试验的辨识结果。可见 AR 参数的估计结果很好；MA 参数估计有初始振荡，因为它依赖于 AR 参数的估计，而 AR 参数估计一开始不是十分准确。大约 1300 点后 MA 参数趋于收敛。

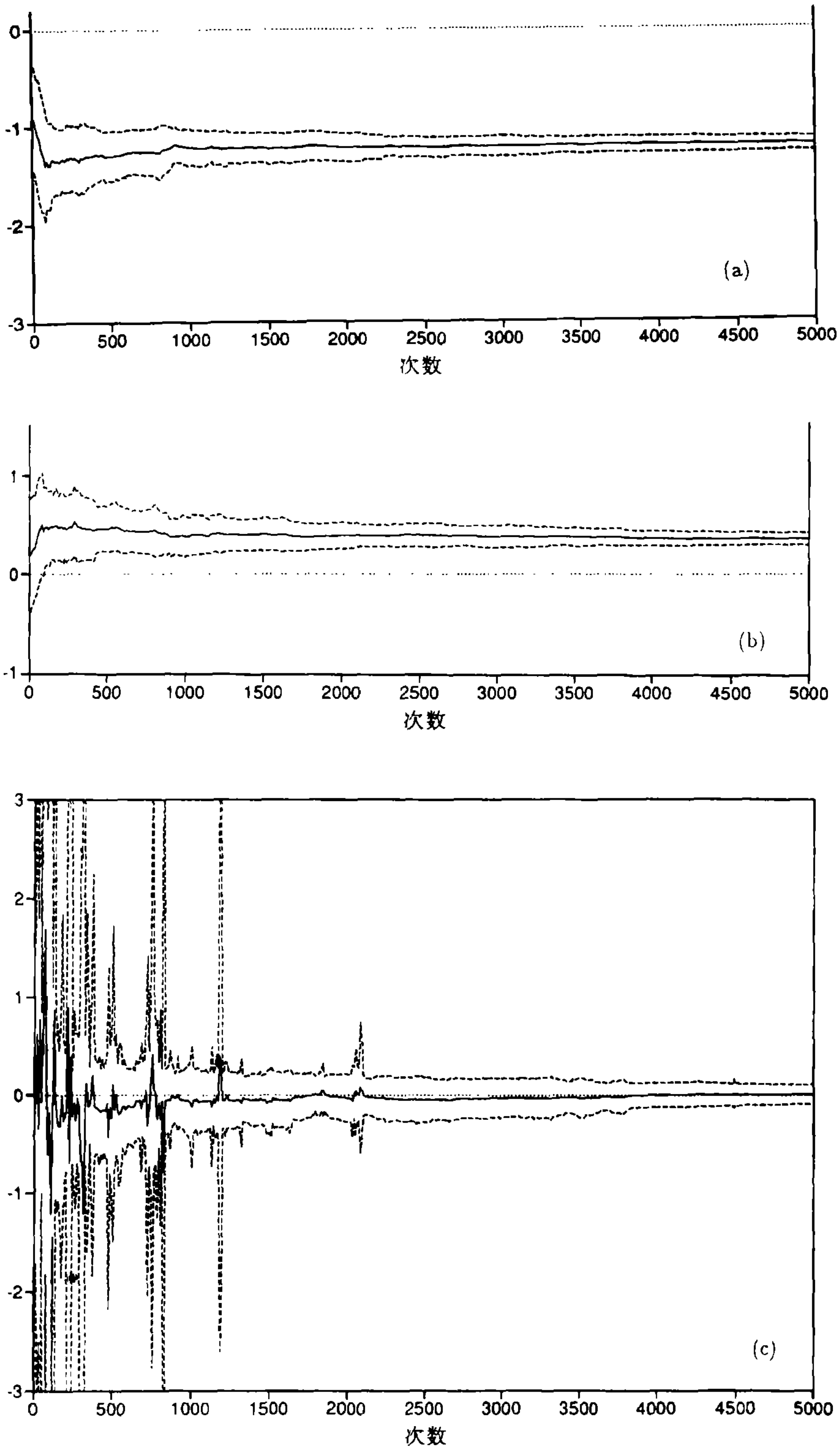

图 2　ARMA(2,2) 模型参数的自适应辨识结果 (均值 ± 标准差)

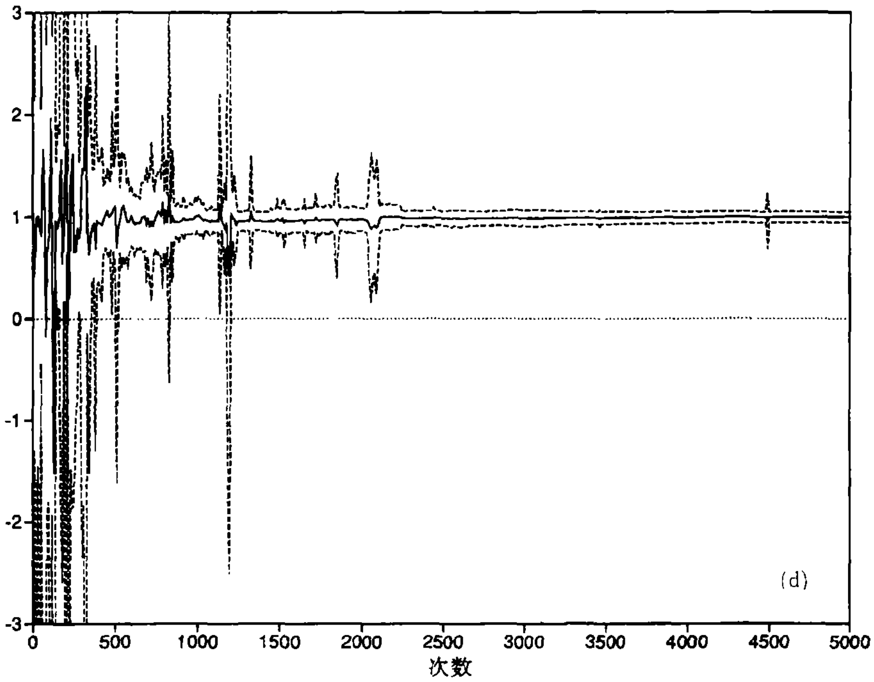

图 2 ARMA(2,2) 模型参数的自适应辨识结果 (均值 ± 标准差)

经过 5000 点后的参数估计值为 $\hat{a}(1)=-1.19968\pm0.07238$(图 2(a)), $\hat{a}(2)=0.36288\pm0.06267$(图 2(b)); $\hat{b}(1)=0.01154\pm0.10162$(图 2(c)), $\hat{b}(2)=0.99892\pm0.05334$(图 2(d)) 。

4 结 论

本文设计了一种基于高阶累积量的 ARMA 模型的自适应辨识算法。高阶累积量的采用保证了高斯有色噪声的抑制和模型相位信息的提取。算法在每次迭代中先估计 AR 参数，再估计 MA 参数，但不用计算残差序列，从而减小了计算量和存储量。由选用的线性方程组保证了参数的唯一可辨识性。仿真实验结果验证了算法的有效性。

参 考 文 献

[1] Nikias C L, Mendel J M. Signal processing with higher-order spectra. IEEE Signal Processing Magazine, 1993, 10(3): 10–37.

[2] Mendel J M. Tutorial on higher-order statistics (spectra) in signal processing and system theory: Theoretical results and some applications. Proc.IEEE, 1991, 79(3): 278–305.

[3] 张贤达. 现代信号处理，北京：清华大学出版社， 1995.

[4] Friedlander B, Porat B. Adaptive IIR algorithms based on higher-order statistics. IEEE Trans. on ASSP, 1989, ASSP-37(4): 485–495.

[5] Giannakis G B. On the identifiability of non-Gaussian ARMA models using cumulants. IEEE Trans. on AC, 1990, AC-35(1): 18–35.

[6] Rosenblatt M, Van Ness J N. Estination of the bispectrum. Ann. Math. Stat., 1965, 36: 1120–1136.

[7] Arnold S F. Mathematical Statistics. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1990, Sec. 7.2.2.

[8] Zhang X D, Zhang Y S. FIR system identification using higher-order statistics alone. IEEE Trans. on SP, 1994, SP-42(10): 2854–2858.

[9] Luenberger D G. Linear and Nonlinear Programming. 2nd ed., Reading, MA: Addison-Wesley, 1984, Sec. 7.6.

AN ADAPTIVE IDENTIFICATION ALGORITHM FOR NONMINIMUM PHASE ARMA MODELS

Song Yu Zhang Xianda Li Yanda

(*Department of Automation, Tsinghua University, Beijing* 100084)

Abstract This paper proposes an adaptive identification algorithm for nonminimum phase ARMA models in additive colored Gaussian noise. The model input is assumed to be an i. i. d., non-Gaussian random process. The algorithm utilizes higher-order statistics of the observed signal alone. It estimates the AR and MA parameters successively in each iteration without computing the residual time series. The stochastic gradient method is used in parameter updating. Simulation resutls show the effectiveness of the algorithm.

Key words ARMA model, Nonminimum phase system, Higher-order cumulant, Adaptive identification, Blind signal processing

宋 宇： 男，1970 年生，博士生，研究方向为盲信号处理.
张贤达： 男，1946 年生，博士，教授，博士生导师，研究方向为现代信号处理和智能信号处理.
李衍达： 男，1936 年生，教授，博士生导师，中科院院士，主要研究方向为智能信息处理.