

各向异性磁介质的电感新公式

陈燦年 陈 浩

(华侨大学, 泉州) (冶金部建筑研究总院, 北京)

摘要 本文从求在具有对称张量 μ_{ik} 的各向异性磁介质中磁场基本方程组的解而得各向异性的磁矢势 \mathbf{A} 的积分公式, 并由此导出了标量形式和张量形式的自感系数和互感系数的特性公式以及这两种形式系数之间的变换关系。文中最后以实例对本文导出的新公式进行了验证。

关键词 磁介质; 各向异性磁介质电感; 磁矢势

一、引言

众所周知, 电感系数的诺埃曼 (F. E. Neumann) 公式

$$L_{l'l} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{l'} \oint_{l_l} \frac{dl_{l'} \cdot dl_l}{R_{l'l}}$$

是对磁介质为线性各向同性而言, 对于磁介质为线性各向异性的较普遍情形, 迄今未见有文献报道。近年由于非线性电子元件的出现和超大规模集成电路的研制, 尤其是非线性电容特性公式和非线性电阻特性公式被相继推导出来之后^[1-4], 我们推导具有对称张量 μ_{ik} 的各向异性的电感特性公式以便过渡到研究非线性电感特性公式就成为很必要。此外, 为了推导本文公式必须先得知在各向异性的线性磁介质中的矢势 \mathbf{A} 的积分公式, 这也是一个新的课题。

二、各向异性磁矢势 \mathbf{A} 的积分公式

当仅有磁场存在时, 在导体周围的各向异性均匀磁介质中, 磁场基本方程组为

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 e_{ijk} \frac{\partial H_k}{\partial x_j} = j_i, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial B_k}{\partial x_k} = 0 \quad (2)$$

$$B_k = \sum_{i=1}^3 \mu_{ki} H_i, \quad (k = 1, 2, 3) \quad (3)$$

式中 e_{ijk} 是 Levi-Civita 张量密度。

把(3)式代入(2)式, 得

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 \mu_{ki} \frac{\partial H_i}{\partial x_k} = 0 \quad (4)$$

由此引入一矢量 \mathbf{C} , 它由下面等式定义

$$H_k = \sum_{l=1}^3 \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 e_{kln} \mu_{lm} \frac{\partial C_n}{\partial x_m}, \quad (k=1,2,3) \quad (5)$$

不难证明(5)式恒能满足(4)式。

把(5)式代入(1)式, 并利用下面恒等式

$$e_{ikl} e_{kln} = \delta_{il} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{lj} \quad (6)$$

和对矢量 \mathbf{C} 的附加条件

$$\nabla \cdot \mathbf{C} = 0 \quad (7)$$

便可得到矢量 \mathbf{C} 所满足的微分方程

$$\sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \mu_{lm} \frac{\partial^2 C_i}{\partial x_l \partial x_m} = -j_i, \quad (i=1,2,3) \quad (8)$$

如果 μ_{lm} 是对称张量, 由文献[5]就可得它的解是

$$C_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi \sqrt{|\mu_{ik}|}} \int \frac{j_i(\mathbf{x}') dV'}{\left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \mu_{ik}^{(-1)} R_i R_k \right)^{1/2}}, \quad (i=1,2,3) \quad (9)$$

式中 $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$, 而且 $|\mu_{ik}|$ 和 $\mu_{ik}^{(-1)}$ 分别代表磁导率张量 μ_{ik} 的行列式和逆矩阵 $[\mu_{ik}]^{-1}$ 中的元素。

当张量 μ_{ik} 三个主轴分别是直角坐标系的 x_1, x_2, x_3 轴时, (9)式被简化成

$$C_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi \sqrt{\mu_{11} \mu_{22} \mu_{33}}} \int \frac{j_i(\mathbf{x}') dV'}{\left(\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}} + \frac{R_3^2}{\mu_{33}} \right)^{1/2}}, \quad (i=1,2,3) \quad (10)$$

从另一方面, 我们把式 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 表成

$$B_k = \sum_{l=1}^3 \sum_{n=1}^3 e_{kln} \frac{\partial A_n}{\partial x_l}, \quad (k=1,2,3) \quad (11)$$

将(5)式代入(3)式并与上式消去 B_k , 得

$$\sum_{p=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\sum_{n=1}^3 e_{kpn} A_n - \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 e_{ijl} \mu_{ki} \mu_{jp} C_l \right) = 0, \quad (k=1,2,3)$$

由此可令 \mathbf{A} 与 \mathbf{C} 间的关系为

$$\sum_{n=1}^3 e_{kpn} A_n = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 e_{ijl} \mu_{ki} \mu_{jp} C_l, \quad (k,p=1,2,3) \quad (12)$$

利用 Levi-Civita 张量密度的性质

$$e_{123} = e_{231} = e_{312} = -e_{132} = -e_{213} = -e_{321} = 1$$

可把(12)式表成如下简洁形式

$$A_n = \sum_{m=1}^3 \Delta_{nm} C_m, \quad (n=1,2,3) \quad (13)$$

式中 Δ_{nm} 代表行列式 $|\mu_{nm}|$ 中元素为 μ_{nm} 的代数余子式。利用(9)式和(10)式, 于是

得到各向异性磁矢势 \mathbf{A} 的积分公式为

$$A_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\sqrt{|\mu_{ik}|}} \sum_{m=1}^3 \Delta_{nm} \int \frac{j_m(\mathbf{x}') dV'}{\left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \mu_{ik}^{(-1)} R_i R_k\right)^{1/2}}, \quad (n=1,2,3) \quad (14)$$

$$A_n(\mathbf{x}) = \frac{\Delta_{nm}}{4\pi\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33}}} \int \frac{j_n(\mathbf{x}') dV'}{\left(\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}} + \frac{R_3^2}{\mu_{33}}\right)^{1/2}}, \quad (n=1,2,3) \quad (15)$$

为证实上式正确, 先由(3)式解出

$$H_k = \sum_{l=1}^3 \mu_{kl}^{(-1)} B_l, \quad (k=1,2,3)$$

并和(12)式一起代入(1)式, 便得 \mathbf{A} 的微分方程为

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \mu_{kl}^{(-1)} e_{ijk} e_{lmn} \frac{\partial^2 A_n}{\partial x_j \partial x_m} = j_i, \quad (i=1,2,3) \quad (16)$$

它可表成

$$\nabla \times (\bar{\mu}^{(-1)} \cdot \nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{j} \quad (17)$$

式中并矢是

$$\bar{\mu}^{(-1)} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mu_{ij}^{(-1)} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (18)$$

为简单计, 令在 $\mu_{ik} = 0$ ($i \neq k$) 情形下, 并作变换

$$y_i = \frac{R_i}{\sqrt{\mu_{ii}}}, \quad (i=1,2,3); \quad dR_i = \sqrt{\mu_{ii}} dy_i, \quad (i=1,2,3) \quad (19)$$

则方程(17)的第一分量式为

$$\begin{aligned} j_1(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_2} (\bar{\mu}^{(-1)} \cdot \nabla \times \mathbf{A})_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} (\bar{\mu}^{(-1)} \cdot \nabla \times \mathbf{A})_2 \\ &= \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial R_1} \frac{\partial R_1}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\mu_{33}} \frac{\partial A_2}{\partial x_2} - \frac{1}{\mu_{22}} \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial R_2} \frac{\partial R_2}{\partial x_2} \left(\frac{1}{\mu_{33}} \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial y_3} \frac{\partial y_3}{\partial R_3} \frac{\partial R_3}{\partial x_3} \left(\frac{1}{\mu_{22}} \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

其次, 对(15)式的第一分量式求偏导得

$$\frac{\partial A_1(\mathbf{x})}{\partial y_i} = -\frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_{22}\mu_{33}}{\mu_{11}}} \int \frac{y_i j_i(\mathbf{x}') dV'}{(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^{3/2}}, \quad (i=1,2,3) \quad (21)$$

并对(13)式分别求出 $\partial A_1/\partial x_1$ 、 $\partial A_2/\partial x_2$ 和 $\partial A_3/\partial x_3$, 再一起代入(7)式中, 得

$$\frac{\mu_{11}}{\mu_{22}\mu_{33}} \frac{\partial A_1}{\partial x_1} = \frac{1}{\mu_{33}} \frac{\partial A_2}{\partial x_2} - \frac{1}{\mu_{22}} \frac{\partial A_3}{\partial x_3}$$

最后, 把上式、(21)式和(19)式代入(20)式中, 得

$$\begin{aligned} j_1(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33}}} \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \int \frac{y_1 j_1(\mathbf{x}') dV'}{(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^{3/2}} + \frac{\partial}{\partial y_2} \int \frac{y_2 j_1(\mathbf{x}') dV'}{(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y_3} \int \frac{y_3 j_1(\mathbf{x}') dV'}{(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^{3/2}} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

由 $R = x - x'$, 可知有

$$dV' = |dx'dx'dx'| = |dR_1dR_2dR_3| = \sqrt{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33}} dy_1dy_2dy_3$$

如引入新算符

$$\nabla_y = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial y_3}$$

则(22)式可表成

$$j_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \left(\nabla_y \cdot \frac{\mathbf{y}}{y^3} \right) j_1(\mathbf{x}') dy_1dy_2dy_3 \quad (23)$$

当 $y \approx 0$ 时, $\nabla_y \cdot \frac{\mathbf{y}}{y^3} = 0$, (23)式两边恒等;当 $y = 0$ 时,可取 $j_1(\mathbf{x}') = j_1(\mathbf{x})$, 因

$$\int \nabla_y \cdot \frac{\mathbf{y}}{y^3} dy_1dy_2dy_3 = \oint \frac{\mathbf{y} \cdot d\mathbf{S}_y}{y^3} = 4\pi$$

故(23)式两边亦恒等. 同理可证,当 $n = 2, 3$ 时, (15)式是方程(17)式的第二分量和第三分量当张量 μ_{ik} 三个主轴为 x_1, x_2 和 x_3 时的解.

三、矩阵形式方程和电感张量特性公式

现研究正弦稳态电路系统中的一个闭合回路 l . 此回路的法拉第定律的复式是

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{d\Phi^{(L)}}{dt} + \frac{d\Phi^{(M)}}{dt} \quad (24)$$

在各向异性均匀磁介质中仍有

$$\frac{d\Phi}{dt} = i\omega \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

由此,若回路 l 由 N 个支路组成并有 G 个外支路与之连通而有磁耦合的作用,则(24)式写成

$$\sum_{g=1}^N \int \mathbf{E}_g \cdot d\mathbf{l}_g = i\omega \sum_{g=1}^N \sum_{n=1}^3 \int \hat{A}_{lg,n} dl_{g,n} + i\omega \sum_{c=1}^G \sum_{g=1}^N \sum_{n=1}^3 \int \hat{A}_{cg,n} dl_{g,n} \quad (25)$$

式中 $\hat{A}_{lg,n}(\mathbf{x}, t)$ 代表由回路 l 上的电流 $\mathbf{J}_l(\mathbf{x}', t) = \mathbf{j}_l(\mathbf{x}')e^{i\omega t}$ 在本回路第 g 支路上所激发的各向异性磁矢势 $\hat{\mathbf{A}}_{lg}(\mathbf{x}, t)$ 的第 n 坐标分量,而 $\hat{A}_{cg,n}(\mathbf{x}, t)$ 则是由外支路 c 上的电流 $\hat{\mathbf{J}}_c(\mathbf{x}', t) = \mathbf{j}_c(\mathbf{x}')e^{i\omega t}$ 在回路 l 中第 g 支路所激发的各向异性磁矢势 $\hat{\mathbf{A}}_{cg}(\mathbf{x}, t)$ 的第 n 坐标分量. 把(14)式两边同乘以因子 $e^{i\omega t}$ 即得上述二量的形式是

$$\hat{A}_{lg,n}(\mathbf{x}, t) = \frac{\sigma}{4\pi\sqrt{|\mu_{ik}|}} \sum_{m=1}^3 \Delta_{nm} \sum_{g'=1}^N \int_{l_{g'}} \frac{j_{g',m}(\mathbf{x}', t) dl_{g'}}{\left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \mu_{ik}^{(-1)} R_{g',i} R_{g',k} \right)^{1/2}} \quad (n = 1, 2, 3) \quad (26)$$

$$\hat{A}_{cg,n}(\mathbf{x}, t) = \frac{\sigma}{4\pi\sqrt{|\mu_{ik}|}} \sum_{m=1}^3 \Delta_{nm} \int_{l_c} \frac{j_{c,m}(\mathbf{x}', t) dl_c}{\left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \mu_{ik}^{(-1)} R_{cg,i} R_{cg,k} \right)^{1/2}}$$

$$(n = 1, 2, 3) \quad (27)$$

式中 σ 是导线均匀横截面。把(26)式和(27)式代入(25)式中并把电流密度变换成电流强度^[1]

$$\hat{I}_{g',m} = \sigma_{g',m} \hat{J}_{g',m}; \quad \hat{I}_{e,m} = \sigma_{e,m} \hat{J}_{e,m}$$

使电流强度可提到对支路的积分号外

$$\begin{aligned} \sum_{g=1}^N \sum_{n=1}^3 \int_{l_g} \hat{E}_{g,n} dl_{g,n} &= \sum_{g'=1}^N \sum_{g=1}^N \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \hat{I}_{g',m} \int_{l_{g'}} \hat{\rho}_{g',g,nn}^{(L)} \frac{dl_{g,n}}{\sigma_{g',m}} \\ &+ \sum_{e=1}^G \sum_{g=1}^N \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \hat{I}_{e,m} \int_{l_e} \hat{\rho}_{e,g,nn}^{(M)} \frac{dl_{g,n}}{\sigma_{e,m}} \end{aligned} \quad (28)$$

再把上式还原成对回路 l 成立的形式

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^3 \oint_l \hat{E}_{l,n} dl_{l,n} &= \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \hat{I}_{l',m} \oint_l \hat{\rho}_{l',l,nn}^{(L)} \frac{dl_{l,n}}{\sigma_{l',m}} \\ &+ \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{e=1}^G \hat{I}_{e,m} \oint_l \hat{\rho}_{e,l,nn}^{(M)} \frac{dl_{l,n}}{\sigma_{e,m}} \end{aligned} \quad (29)$$

式中称为自感和互感的复阻抗率^[6]张量各是

$$\hat{\rho}_{l',l,nn}^{(L)} = \frac{i\omega\sigma}{4\pi\sqrt{|\mu_{ik}|}} \Delta_{nm} \oint_{l'} \frac{dl_{l'}}{\left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \mu_{ik}^{(-1)} R_{l',i} R_{l',k}\right)^{1/2}} \quad (30)$$

$$\hat{\rho}_{e,l,nn}^{(M)} = \frac{i\omega\sigma}{4\pi\sqrt{|\mu_{ik}|}} \Delta_{nm} \int_{l_e} \frac{dl_e}{\left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \mu_{ik}^{(-1)} R_{e,l,i} R_{e,l,k}\right)^{1/2}} \quad (31)$$

如引入对回路而言的复电压分量、自感复阻抗张量和互感复阻抗张量如下:

$$\hat{V}_{l,n} = \oint_l \hat{E}_{l,n} dl_{l,n} \quad (32)$$

$$\hat{Z}_{l',l,nn}^{(L)} = \oint_l \hat{\rho}_{l',l,nn}^{(L)} \frac{dl_{l,n}}{\sigma_{l',m}} \quad (33)$$

$$\hat{Z}_{e,l,nn}^{(M)} = \oint_l \hat{\rho}_{e,l,nn}^{(M)} \frac{dl_{l,n}}{\sigma_{e,m}} \quad (34)$$

则(29)式的含义表现出是一个电路方程

$$\sum_{n=1}^3 \hat{V}_{l,n} = \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \hat{Z}_{l',l,nn}^{(L)} \hat{I}_{l',m} + \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{e=1}^G \hat{Z}_{e,l,nn}^{(M)} \hat{I}_{e,m}$$

显然,对每一个坐标分量而言,都有

$$\hat{V}_{l,n} = \sum_{m=1}^3 \hat{Z}_{l',l,nn}^{(L)} \hat{I}_{l',m} + \sum_{m=1}^3 \sum_{e=1}^G \hat{Z}_{e,l,nn}^{(M)} \hat{I}_{e,m}, \quad (n = 1, 2, 3)$$

或表为

$$[\hat{V}_{l,n}] = [\hat{Z}_{l',l,nn}^{(L)}][\hat{I}_{l',m}] + \sum_{e=1}^G [\hat{Z}_{e,l,nn}^{(M)}][\hat{I}_{e,m}] \quad (35)$$

这就是矩阵形式的对一个闭合回路而言且包含互感的纯电感各向异性电路的复式欧姆定

律。

我们可以定义 $L_{l',nm}$ 和 $M_{el, nm}$ 各为

$$\hat{Z}_{l',nm}^{(L)} = i\omega L_{l',nm} \quad (36)$$

$$\hat{Z}_{l',nm}^{(M)} = i\omega M_{el, nm} \quad (37)$$

于是由(30)、(31)、(33)和(34)式, 得出各向异性磁自感系数张量和互感系数张量的特性公式为

$$L_{l',nm} = \frac{\Delta_{nm}}{4\pi\sqrt{|\mu_{ik}|}} \oint_l \oint_{l'} \frac{\cos(\mathbf{j}'_l \cdot \mathbf{e}_n)}{\cos(\mathbf{j}'_{l'} \cdot \mathbf{e}_m)} \frac{dl_l dl_{l'}}{\left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \mu_{ik}^{(-1)} R_{l',i} R_{l',k}\right)^{1/2}} \quad (38)$$

$$M_{el, nm} = \frac{\Delta_{nm}}{4\pi\sqrt{|\mu_{ik}|}} \oint_l \int_{l_c} \frac{\cos(\mathbf{j}'_l \cdot \mathbf{e}_n)}{\cos(\mathbf{j}'_c \cdot \mathbf{e}_m)} \frac{dl_l dl_c}{\left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \mu_{ik}^{(-1)} R_{el,i} R_{el,k}\right)^{1/2}} \quad (39)$$

四、标量形式方程和 $L_{l',l}$ 与 $L_{l',nm}$ 的关系

把(28)式写成如下形式:

$$\begin{aligned} \sum_{g=1}^N \int_{l_n} \mathbf{E}_g \cdot d\mathbf{l}_g &= \sum_{g'=1}^N \sum_{g=1}^N \int_{l_n} \left\{ \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \hat{\rho}_{g'g, nm}^{(L)} \cos(\mathbf{j}'_{g'} \cdot \mathbf{e}_m) \cos(\mathbf{j}'_g \cdot \mathbf{e}_n) \right\} \hat{i}_{g'} d\mathbf{l}_g \\ &+ \sum_{c=1}^G \sum_{g=1}^N \int_{l_n} \left\{ \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \hat{\rho}_{cg, nm}^{(M)} \cos(\mathbf{j}'_c \cdot \mathbf{e}_m) \cos(\mathbf{j}'_g \cdot \mathbf{e}_n) \right\} \hat{i}_c d\mathbf{l}_g \end{aligned} \quad (40)$$

如今自感复阻抗率和互感复阻抗率各为

$$\hat{\rho}_{g'g}^{(L)} = \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \hat{\rho}_{g'g, nm}^{(L)} \cos(\mathbf{j}'_{g'} \cdot \mathbf{e}_m) \cos(\mathbf{j}'_g \cdot \mathbf{e}_n) \quad (41)$$

$$\hat{\rho}_{cg}^{(M)} = \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \hat{\rho}_{cg, nm}^{(M)} \cos(\mathbf{j}'_c \cdot \mathbf{e}_m) \cos(\mathbf{j}'_g \cdot \mathbf{e}_n) \quad (42)$$

则有

$$\sum_{g=1}^N \int_{l_n} \hat{\mathbf{E}}_g \cdot d\mathbf{l}_g = \sum_{g=1}^N \left(\sum_{g'=1}^N \hat{i}_{g'} \int_{l_{g'}} \hat{\rho}_{g'g}^{(L)} \frac{dl_{g'}}{\sigma_{g'}} \right) + \sum_{c=1}^G \hat{i}_c \left(\sum_{g=1}^N \int_{l_n} \hat{\rho}_{cg}^{(M)} \frac{dl_g}{\sigma_g} \right)$$

表成对回路 l 成立的形式:

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \hat{i}_l \oint_l \hat{\rho}_{l'l}^{(L)} \frac{dl_l}{\sigma_{l'}} + \sum_{c=1}^G \hat{i}_c \oint_l \hat{\rho}_{cl}^{(M)} \frac{dl_l}{\sigma_c} \quad (43)$$

如引入对回路而言的复电压、自感复阻抗和互感复阻抗如下:

$$\hat{v}_l = \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (44)$$

$$\hat{Z}_{l'l}^{(L)} = \oint_l \hat{\rho}_{l'l}^{(L)} \frac{dl_l}{\sigma_{l'}} \quad (45)$$

$$\hat{Z}_{cl}^{(M)} = \oint_l \hat{\rho}_{cl}^{(M)} \frac{dl_l}{\sigma_c} \quad (46)$$

式中

$$\hat{\rho}_{i'l}^{(L)} = \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \hat{\rho}_{l',nm}^{(L)} \cos(\mathbf{j}'_l \mathbf{e}_m) \cos(\mathbf{j}_l \mathbf{e}_n) \quad (47)$$

$$\hat{\rho}_{i'l}^{(M)} = \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \hat{\rho}_{el, nm}^{(M)} \cos(\mathbf{j}'_e \mathbf{e}_m) \cos(\mathbf{j}_e \mathbf{e}_n) \quad (48)$$

则(43)式也表现出是一个电路方程:

$$\hat{V}_l = \hat{Z}_{l'l}^{(L)} \hat{I}_l + \sum_{e=1}^G \hat{Z}_{el}^{(M)} \hat{I}_e \quad (49)$$

这就是标量形式的对一个闭合回路而言且包含互感的纯电感各向异性电路的复式欧姆定律.

我们可以定义 $L_{l'l}$ 和 M_{el} 各为

$$\hat{Z}_{l'l}^{(L)} = i\omega L_{l'l} \quad (50)$$

$$\hat{Z}_{el}^{(M)} = i\omega M_{el} \quad (51)$$

于是由(30)、(31)、(47)、(48)、(45)和(46)式, 得出各向异性磁自感系数和互感系数的特性公式为

$$\begin{aligned} L_{l'l} = & \frac{1}{4\pi\sqrt{|\mu_{ik}|}} \oint_l \oint_{l'} \left\{ \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \Delta_{nm} \cos(\mathbf{j}'_l \mathbf{e}_m) \cos(\mathbf{j}_l \mathbf{e}_n) \right\} \\ & \times \frac{dl_l dl_{l'}}{\left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \mu_{ik}^{(-1)} R_{l'l, i} R_{l'l, k} \right)^{1/2}} \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} M_{el} = & \frac{1}{4\pi\sqrt{|\mu_{ik}|}} \oint_l \int_{l_e} \left\{ \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \Delta_{nm} \cos(\mathbf{j}'_e \mathbf{e}_m) \cos(\mathbf{j}_l \mathbf{e}_n) \right\} \\ & \times \frac{dl_l dl'_e}{\left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \mu_{ik}^{(-1)} R_{el, i} R_{el, k} \right)^{1/2}} \end{aligned} \quad (53)$$

比较(38)式与(52)式以及(39)式与(53)式, 便得标量形式与张量形式的电感系数间的变换关系为

$$L_{l'l} = \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 L_{l'l, nm} \cos^2(\mathbf{j}'_l \mathbf{e}_m) \quad (54)$$

$$M_{el} = \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 M_{el, nm} \cos^2(\mathbf{j}'_e \mathbf{e}_m) \quad (55)$$

五、从各向异性过渡到各向同性

当张量 μ_{ik} 的三个主轴为 x_1, x_2, x_3 时, 矩阵 $[\mu_{ik}]$ 可化成对角矩阵, 因而有 $\mu_{ik} = 0, (i \neq k)$; $\mu_{ii}^{(-1)} = 1/\mu_{ii}, (i = 1, 2, 3)$ 为此(38)式和(52)式分别化简为

$$L_{l'l,nn} = \frac{\Delta_{nn}}{4\pi\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33}}} \oint_{l'} \oint_l \frac{\cos(\mathbf{j}'_l \mathbf{e}_n)}{\cos(\mathbf{j}'_l \mathbf{e}_n)} \frac{dl_l dl'_l}{\left(\frac{R_{l'l,1}^2}{\mu_{11}} + \frac{R_{l'l,2}^2}{\mu_{22}} + \frac{R_{l'l,3}^2}{\mu_{33}}\right)^{1/2}} \quad (n=1,2,3) \quad (56)$$

$$L_{l'l} = \frac{1}{4\pi\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33}}} \oint_{l'} \oint_l \left\{ \sum_{n=1}^3 \Delta_{nn} \cos(\mathbf{j}'_l \mathbf{e}_n) \cos(\mathbf{j}_l \mathbf{e}_n) \right\} \times \frac{dl_l dl'_l}{\left(\frac{R_{l'l,1}^2}{\mu_{11}} + \frac{R_{l'l,2}^2}{\mu_{22}} + \frac{R_{l'l,3}^2}{\mu_{33}}\right)^{1/2}} \quad (57)$$

当 l' 代换为 e , 上两式便分别是 $M_{el,nn}$ 和 M_{el} .

当磁介质由线性各向异性过渡到线性各向同性时, 因有 $\mu_{ii} = \mu$, ($i=1,2,3$); $\Delta_{nn} = \mu^2$, ($n=1,2,3$). 从而(57)式和(56)式分别过渡为

$$L_{l'l} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{l'} \oint_l \cos(\mathbf{j}'_l \mathbf{j}_l) \frac{dl_l dl'_l}{R_{l'l}} \quad (58)$$

$$L_{l'l,nn} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{l'} \oint_l \frac{\cos(\mathbf{j}'_l \mathbf{e}_n)}{\cos(\mathbf{j}'_l \mathbf{e}_n)} \frac{dl_l dl'_l}{R_{l'l}} \quad (59)$$

当 l' 代换为 e , 上两式便分别是 M_{el} 和 $M_{el,nn}$.

把(59)式代入自感系数变换的关系式(54)中

$$L_{l'l} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{l'} \oint_l \left\{ \cos(\mathbf{j}_l \mathbf{e}_1) \cos(\mathbf{j}'_l \mathbf{e}_1) + \cos(\mathbf{j}_l \mathbf{e}_2) \cos(\mathbf{j}'_l \mathbf{e}_2) + \cos(\mathbf{j}_l \mathbf{e}_3) \cos(\mathbf{j}'_l \mathbf{e}_3) \right\} \times \frac{dl_l dl'_l}{R_{l'l}} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{l'} \oint_l \cos(\mathbf{j}_l \mathbf{j}'_l) \frac{dl_l dl'_l}{R_{l'l}}$$

所得结果正是诺埃曼公式, 也与(58)式完全吻合.

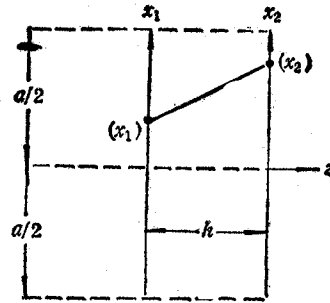
六、例 题

试求两个彼此平行、中心距离为 d , 且大小相等的正方形回路 l_1 和 l_2 之间的互感系数.

设张量 μ_{ik} 的三个主轴为 x, y 和 z , 且使回路平面法线指向 z 轴, 并把 l' 代换为 e , 把(57)式变换成 M_{el} , 对 l_1 和 l_2 回路的四边求和, 得

$$M_{el} = \frac{1}{4\pi\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33}}} \sum_{g=1}^4 \sum_{e=1}^4 \int_{l_g} \int_{l_e} \left\{ \sum_{n=1}^3 \Delta_{nn} \cos(\mathbf{j}'_g \mathbf{e}_n) \cos(\mathbf{j}_e \mathbf{e}_n) \right\} \times \frac{dl_g dl'_e}{\left(\frac{R_{eg,1}^2}{\mu_{11}} + \frac{R_{eg,2}^2}{\mu_{22}} + \frac{R_{eg,3}^2}{\mu_{33}}\right)^{1/2}}$$

在上式中, 仅需对正方形 l_1 和 l_2 两两平行的边求积分, 因为相垂直的两边都因有一个余弦因子为零而消失在积分中.

图 1 两个长度为 a 彼此相距 h 的平行直线

设正方形边长为 a , 则对两个长度为 a 彼此相距 h 的平行直线(图1)来说, 得到

$$M_{el}(a, h) = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_{22}\mu_{33}}{\mu_{11}}} \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-a/2}^{+a/2} \frac{dx_1 dx_2}{\left[\frac{(x_1 - x_2)^2}{\mu_{11}} + \frac{h^2}{\mu_{33}} \right]^{1/2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\mu_{22}\mu_{33}}{4\pi}} \int_{-a/2}^{+a/2} dx_2 \left[\ln \left\{ \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{\mu_{11}}} + \sqrt{\frac{(x_1 - x_2)^2}{\mu_{11}} + \frac{h^2}{\mu_{33}}} \right\} \right]_{x_1=-a/2}^{x_1=a/2}$$

将 x_1 用它的值 $\pm a/2$ 代替后得到两项之差, 对两项中每一项取分部积分, 得

$$\frac{\sqrt{\mu_{22}\mu_{33}}}{4\pi} \int_{-a/2}^{+a/2} dx_2 \ln \left\{ \frac{\pm \frac{a}{2} - x_2}{\sqrt{\mu_{11}}} + \sqrt{\frac{\left(\pm \frac{a}{2} - x_2\right)^2}{\mu_{11}} + \frac{h^2}{\mu_{33}}} \right\}$$

$$= \sqrt{\frac{\mu_{22}\mu_{33}}{4\pi}} \left[x_2 \ln \left\{ \frac{\pm \frac{a}{2} - x_2}{\sqrt{\mu_{11}}} + \sqrt{\frac{\left(\pm \frac{a}{2} - x_2\right)^2}{\mu_{11}} + \frac{h^2}{\mu_{33}}} \right\} \right]_{x_2=-a/2}^{x_2=a/2}$$

$$\pm \sqrt{\frac{\mu_{22}\mu_{33}}{4\pi}} \frac{a}{2} \left[\ln \left\{ x_2 \mp \frac{a}{2} + \sqrt{\left(x_2 \mp \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{\mu_{11}}{\mu_{33}} h^2} \right\} \right]_{x_2=-a/2}^{x_2=a/2}$$

$$+ \frac{\sqrt{\mu_{22}\mu_{33}}}{4\pi} \left[\sqrt{\left(x_2 \mp \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{\mu_{11}}{\mu_{33}} h^2} \right]_{x_2=-a/2}^{x_2=a/2}$$

将 x_2 用值 $\pm a/2$ 代替共得十二项, 这十二项经过归并和整理之后缩减为三项

$$M(a, h) = 2 \sqrt{\frac{\mu_{22}\mu_{33}}{4\pi}} \left(\sqrt{\frac{\mu_{11}}{\mu_{33}}} h - \sqrt{a^2 - \frac{\mu_{11}}{\mu_{33}} h^2} + a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + \frac{\mu_{11} h^2}{\mu_{33}}}}{\sqrt{\mu_{11}/\mu_{33}} h} \right)$$

将正方形 l_1 和 l_2 互相平行的边成对地配合, 即得四对距离等于 h 的线段和另外四对 $h = \sqrt{a^2 + d^2}$ 的线段; 前四对线段里电流的方向是相同的, 而后四对里电流的方向是相反的。因此, 所求的这两个正方形回路间的互感系数为

$$M_{el} = 4M(a, h) - 4M(a, \sqrt{a^2 + d^2})$$

$$= \frac{2\sqrt{\mu_{22}\mu_{33}}}{\pi} \left\{ \sqrt{\frac{\mu_{11}}{\mu_{33}}} d - \sqrt{a^2 + \frac{\mu_{11}}{\mu_{33}} d^2} - \sqrt{\frac{\mu_{11}}{\mu_{33}} (a^2 + d^2)} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \sqrt{a^2 + (\mu_{11}/\mu_{33})(a^2 + d^2)} + a \ln [(a + \sqrt{a^2 + \mu_{11}d^2/\mu_{33}})/\sqrt{\mu_{11}/\mu_{33}d}] \\
& - a \ln \sqrt{a + a^2 + (a^2 + d^2)\mu_{22}/\mu_{33}}/\sqrt{(a^2 + d^2)\mu_{11}/\mu_{33}} \} \quad (60)
\end{aligned}$$

若正方形平面法线不是指向 z 轴,而是分别指向 x 轴和 y 轴,则上式中的 μ_{11}/μ_{33} 应分别用 μ_{22}/μ_{11} 和 μ_{33}/μ_{22} 替换。此结果表明,在各向异性介质中两线圈间的互感与线圈平面法线相对介质主轴的方位有关。

当介质过渡到线性各向同性时,上式化成

$$M_{cl} = \frac{2\mu}{\pi} \left(d - 2\sqrt{a^2 + d^2} + \sqrt{2a^2 + d^2} + a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + d^2}}{d} - a \ln \frac{a + \sqrt{2a^2 + d^2}}{\sqrt{a^2 + d^2}} \right)$$

此结果与文献[7]完全一致。

七、结 束 语

本文把诺埃曼电感公式推广到各向异性磁介质的普遍情形,从而得到电感系数的为大家所熟悉的标量形式之外的另一种形式,即张量形式。这两种形式间存在一定的变换关系,并且通过实例说明两线圈间的互感与线圈相对磁介质的方位有关。此外,本文给出的各向异性磁矢势 \mathbf{A} 的积分公式,具有相当的普遍性,可作为研究各向异性磁介质的其它物理问题的理论基础^[8-9]。

参 考 文 献

- [1] 陈燊年,电子科学学刊,9(1987)1,85—89.
- [2] 陈燊年,电子学报,1987年,第4期,第116—119页.
- [3] Chen Xinnian (陈燊年), Journal of Electronics (China), 5(1988) 1, 60—66.
- [4] 陈燊年,吴建国,电子学报,1989年,第1期,第125—127页.
- [5] Л. Д.,朗道等,连续媒质电动力学,上册,人民教育出版社,1963年,第88,167和176页.
- [6] 陈燊年,电子学报,1987年,第2期,第113—115页.
- [7] N. E. 塔姆,电学原理,上册,商务印书馆,1956年,第223页.
- [8] 王建成、陈燊年,华侨大学学报,1989年,第2期,第125—132页.
- [9] 王建成、陈燊年,华侨大学学报,1990年,第1期,第16—24页.

A NEW FORMULA FOR INDUCTANCE OF ANISOTROPIC MAGNETIC MEDIA

Chen Xinnian

(Huaqiao University, Quanzhou, Fujian)

Chen Jie

(Institute of Construction Research,
Ministry of Metallurgy, Beijing)

Abstract By solving the basic equations of magnetic field in the anisotropic magnetic media in which the tensor μ_{ik} is symmetric, an integral formula for anisotropic vector potential \mathbf{A} is obtained. By which the character formulae for self- and mutual inductances are derived in scalar and tensor forms, and their transformation formulae are also deduced. Finally the formulae are checked by practical examples.

Key words Magnetic media; Inductance of anisotropic magnetic media; Magnetic vector potential