第 19 卷 第 1 期 电 子 科 学 学 刊 Vol.19 No.1
1997 年 1 月 JOURNAL OF ELECTRONICS Jan. 1997

用因子分析法建立微波场效应管 S 参数的统计模型 [1]

黄 艺 沈楚玉

(东南大学毫米波国家重点实验室 南京 210096)

摘 要 本文提出用因子分析法建立微波场效应管 S 参数的统计模型，给出了建模的算法步骤和模拟结果，并与主成分分析法建立的统计模型进行了比较。从结果可以看出，用因子分析法建立的统计模型具有比较高的精度。

关键词 统计模型，因子分析，场效应管，S 参数

中图号 TN385, TN386

1 引 言

在微波单片集成电路 (MMIC) 的研制过程中，为了降低生产成本，提高产品的合格率，必须在设计中考虑生产过程中的工艺误差，模型的不确定性，工艺参数的变化，以及环境因素的影响，对电路进行成品率分析和优化设计 [1] 。在进行电路模拟时，首先必须建立各元器件的统计模型。对于微波场效应管，在基于 S 参数的统计模型中， Purviance 根据大量器件的 S 参数测试数据，将每个测试频率点上的 S 参数都作为随机变量，采用主成份分析法，建立了基于 S 参数的线性统计模型 [2] 。这种方法虽然解决了 S 参数之间的相关性问题，但是每个模拟 S 参数的边缘分布与样本 S 参数的边缘分布拟合得不是很好 [1] ，而且模拟的随机 S 参数相关矩阵与样本 S 参数的相关矩阵误差较大。这是由于主成分分析法本身的缺陷所决定的，因为主成分分析的目的只是想用最少个数的主成分来占有最大的样本总方差，所以用它建立起的统计模型只是在较大程度上反映了样本数据的方差信息，却不能很好地反映随机变量之间的相关特性。

本文介绍一种新的分析方法——因子分析法来建立微波场效应管 S 参数的统计模型。因子分析法的基本目的是用少数几个随机变量去描述许多变量之间的协方差关系，这几个随机变量是独立不相关的，并且是不可观测的，常称之为因子，它们可以具有一定的物理意义。与主成分分析法相比，因子分析更加注重于随机变量之间的关系。另外，因子分析法还可以对所建立的统计模型进行检验，而主成分模型则缺乏必要的验证方法。因此因子分析法不仅能够解决 S 参数之间相关性问题，而且能很精确地逼近样本 S 参数的协方差矩阵，同时，通过对统计模型的检验，可以定量地估计所建立的统计模型与样本统计特性之间的误差。

2 因子分析模型简介

设 p 维随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的均值为 $\boldsymbol{\mu}$ ，协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Sigma}$ ，如果 $\boldsymbol{X}$ 能表示成：

$$\boldsymbol{X}_{p\times 1} = \boldsymbol{\mu}_{p\times 1} + \boldsymbol{L}_{p\times k}\boldsymbol{h}_{k\times 1} + \boldsymbol{e}_{p\times 1} \tag{1}$$

1 1995-05-30 收到， 1995-10-30 定稿

其中 $\boldsymbol{h}$ 为 k 维随机向量, $\boldsymbol{e}$ 为 p 维随机向量, $\boldsymbol{L}$ 为 $p\times k$ 维的常数矩阵, 则称 $\boldsymbol{X}$ 为有 k 个因子的模型。 $\boldsymbol{h}$ 称为公共因子, $\boldsymbol{e}$ 称为特殊因子, $\boldsymbol{L}$ 称为因子载荷矩阵。通常假定 [3] :

$$\left.\begin{array}{l}E(\boldsymbol{h})=0,\quad \mathrm{Cov}(\boldsymbol{h})=\boldsymbol{I}_k,\\ E(\boldsymbol{e})=0,\quad \mathrm{Cov}(\boldsymbol{e})=\boldsymbol{\Psi}=\mathrm{diag}(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_p),\\ \mathrm{Cov}(\boldsymbol{h},\boldsymbol{e})=0,\end{array}\right\}\tag{2}$$

式中 $E(\cdot)$, $\mathrm{Cov}(\cdot)$ 分别表示求随机变量的均值和方差 (协方差) , $\boldsymbol{\Psi}$ 称为特殊方差, $\boldsymbol{I}_k$ 表示 k 阶单位矩阵。由上面的模型可以得到

$$\boldsymbol{\Sigma}=\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^T+\boldsymbol{\Psi},\tag{3}$$

(3) 式中的 T 表示矩阵转置。由于随机变量 $\boldsymbol{X}$ 的均值 $\boldsymbol{\mu}$ 与协方差阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 都是未知的, 必须通过 N 个总体的样本来估计。设样本均值为 $\overline{\boldsymbol{\mu}}$, 协方差阵为 $\boldsymbol{S}=(s_{ij})$, 相关矩阵为 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})$ 。由于 $\boldsymbol{R}$ 为标准化的协方差阵, 且与随机变量的单位无关, 这里用 $\boldsymbol{R}$ 代替 $\boldsymbol{S}$ 进行分析, 并取 $\boldsymbol{\mu}=\overline{\boldsymbol{\mu}}$ 。这样如果模型的协方差阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 能较好地拟合样本的协方差阵 $\boldsymbol{S}$, 便可以得到载荷矩阵 $\boldsymbol{L}$ 和特殊方差 $\boldsymbol{\Psi}$ 。

利用极大似然估计法, 可以求出 $\boldsymbol{\Sigma}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 之间的误差函数为

$$F(\boldsymbol{L},\boldsymbol{\Psi})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{S})-\log(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{S})-p,\tag{4}$$

其中 $\mathrm{tr}(\cdot)$ 为求矩阵的迹, 利用优化算法使 $F(\boldsymbol{L},\boldsymbol{\Psi})$ 极小化, 便可以得到 $\boldsymbol{L},\boldsymbol{\Psi}$ 。

3 场效应管 S 参数统计模型的建立

首先将待建模的同一批号的 N 个场效应管在每个频率上的 S 参数测量值分为实部和虚部两部分, 构成随机向量 $\boldsymbol{X}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}=[&\mathrm{Re}(S_{11_{f1}}),\mathrm{Im}(S_{11_{f1}}),\mathrm{Re}(S_{21_{f1}}),\mathrm{Im}(S_{21_{f1}}),\mathrm{Re}(S_{12_{f1}}),\mathrm{Im}(S_{12_{f1}}),\mathrm{Re}(S_{22_{f1}}),\mathrm{Im}(S_{22_{f1}}),\\ &\mathrm{Re}(S_{11_{f2}}),\mathrm{Im}(S_{11_{f2}}),\mathrm{Re}(S_{21_{f2}}),\mathrm{Im}(S_{21_{f2}}),\mathrm{Re}(S_{12_{f2}}),\mathrm{Im}(S_{12_{f2}}),\mathrm{Re}(S_{22_{f2}}),\mathrm{Im}(S_{22_{f2}}),\\ &\quad\cdots\cdots\\ &\mathrm{Re}(S_{11_{fm}}),\mathrm{Im}(S_{11_{fm}}),\mathrm{Re}(S_{21_{fm}}),\mathrm{Im}(S_{21_{fm}}),\mathrm{Re}(S_{12_{fm}}),\mathrm{Im}(S_{12_{fm}}),\mathrm{Re}(S_{22_{fm}}),\mathrm{Im}(S_{22_{fm}})]\end{aligned}$$

其中下标 $fk(k=1,\cdots m)$ 为测试频率, m 为频率点数。样本 N 应尽可能大, 一般 $N>50$ 。然后根据下面的步骤建立微波场效应管 S 参数的统计模型。

(1) 在 m 个频率点上对 N 个 MESFET 在相同工作偏置条件下进行 S 参数测量, 得到样本矩阵 $\boldsymbol{A}_{N\times 8m}$;

(2) 利用极大似然估计, 求出 $\boldsymbol{A}$ 的均值 $\boldsymbol{\mu}_{8m}$, 协方差阵 $\boldsymbol{S}_{8m\times 8m}$, 以及相关矩阵 $\boldsymbol{R}_{8m\times 8m}$;

(3) 计算特殊方差 $\boldsymbol{\Psi}=(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{8m})$ 的初始估计

$$\psi_i=\left(1-\frac{k}{16m}\right)\left(\frac{1}{s^{ii}}\right),\quad i=1,2,\cdots,8m,\tag{5}$$

其中 s^{ii} 为 S^{-1} 的第 i 个对角元；

(4) 确定因子数目 k，由于

$$k < (16m + 1 - \sqrt{64m+1})/2 \tag{6}$$

k 取不超过 (6) 式确定的最大整数；

(5) 计算矩阵 $\boldsymbol{\Psi S}^{-1}\boldsymbol{\Psi}$ 的特征值 $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_{8m}$ 和标准正交特征向量 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{8m}$，令 $\boldsymbol{\Lambda}_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k)$, $\boldsymbol{\Omega}_1 = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k)$, 求出 $\boldsymbol{\Psi}$ 一定时， $F(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{\Psi})$ 的极小解为

$$F(\boldsymbol{\Psi}) = \sum_{i=k+1}^{8m} \left(\log(\lambda_i) + \frac{1}{\lambda_i} - 1 \right), \tag{7}$$

此时

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{\Psi \Omega}_1 (\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1} - \boldsymbol{I}_k)^{-1/2}; \tag{8}$$

(6) 利用 Newton-Raphson 方法求 $F(\boldsymbol{\Psi})$ 的极小值，得到特殊方差 $\boldsymbol{\Psi}$ 的新估计；

(7) 重复 (5) 、 (6) 两步，直到两次迭代的 $\boldsymbol{L}$ 、 $\boldsymbol{\Psi}$ 无明显差异为止。

(8) 求出 $\boldsymbol{L}$ 、 $\boldsymbol{\Psi}$ 之后，利用伪随机数发生器产生满足 (2) 式假定条件的随机向量 $\boldsymbol{h}$ 和 $\boldsymbol{e}$，根据 (1) 式，便可以建立微波场效应管 S 参数的统计模型。由于 $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{\Psi}$ 反映了该型号场效应管 S 参数的统计特性，所以如果要求反复建立其统计模型时，只要利用 $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{\Psi}$ 即可，无需重新处理样本数据。可见， $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{\Psi}$ 比样本数据所占的内存要小得多，因此因子模型还具有计算量小，占用内存少的优点。

4　因子模型的检验

统计模型建立之后，为了判断它是否能反映样本数据的统计信息，需要对它进行检验。

假设 k 个公共因子的统计模型成立，等价于检验假设

$$\boldsymbol{H}_o : \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^T + \boldsymbol{\Psi}. \tag{9}$$

根据 Bartlett 方法，当 N 和 $N-p$ 充分大时，若 χ^2 统计量

$$\chi^2 = \left(N - 1 - \frac{16m+4k+5}{6} \right) \ln \frac{|\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^T + \boldsymbol{\Psi}|}{|\boldsymbol{S}|} > \chi^2_\gamma(\alpha), \tag{10}$$

则拒绝 $\boldsymbol{H}_o$，即认为统计模型与样本统计特性有较大误差。其中 α 为检验水平， $\chi^2_\gamma(\alpha)$ 常称为临界值， γ 为 χ^2 分布的自由度，

$$\gamma = [(8m-k)^2 - 8m - k]/2. \tag{11}$$

5　模拟结果和讨论

由上可见，用因子分析法建立微波场效应管 S 参数统计模型，是根据一批样管的实测 S 参数建立的。为了使模型能较精确地反映该型号管子的实际统计特性，必须从各批产品中随机取

出足够多的样管(例如50个以上)，并测试其 S 参数。由于我们条件的限制，本文采用模拟方法产生样本 S 参数，用以检验方法和所研制建模软件的正确性和有效性。

我们以文献[4]提供的 S 参数为均值，将各频率上 S 参数的实部和虚部作为随机变量，取容差 ±15%，按正态分布产生1000组随机 S 参数，作为1000个管子 S 参数的测试值，建立一个 1000×16 的数据样本 A(为了数据结果便于比较，这里只取10GHz和12GHz两个频率点，以便使随机变量的维数较小)，然后根据 A 建立该场效应管的统计模型。

我们分别用因子分析法和主成分分析法建立场效应管的统计模型。因子分析法中的因子数目为10，主成分分析法中取累积方差贡献率为85%，从16个随机变量中确定12个主成份。为了比较模型的模拟精度，图1分别示出了频率为10GHz时 S 参数实部四个随机变量的统计分布。从结果可见，因子模型能比较好地模拟样本分布，而由主成分模型建立的 S 参数统计分布则对样本数据统计分布的拟合较差。

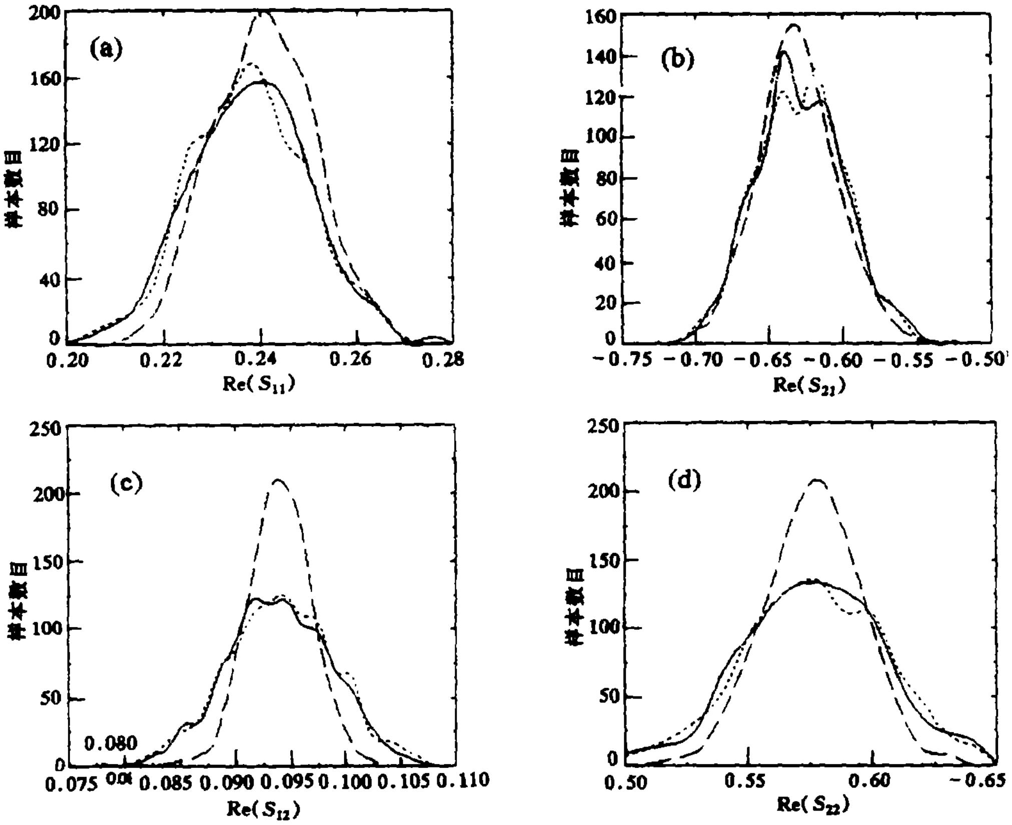

图1 随机变量的统计分布

— 为样本的分布，··· 为由因子模型建立的 S 参数的统计分布，— — — 为主成份模拟产生的 S 参数的分布

另外，我们计算了上述两种方法建立的统计模型的相关矩阵与样本相关矩阵之间的误差，即残差矩阵。因为残差矩阵为对称矩阵，我们分别取其上、下三角阵存放在 Δ 矩阵中((12)式)，并取每个元素至小数点后两位，其中上三角矩阵 Δ_1 为因子模型的残差矩阵，下三角矩阵 Δ_2 为主成分模型的残差矩阵，可见 Δ_1 比 Δ_2 要小得多，在 Δ_1 中，所有的绝对误差都不超过0.05,

而且非零元素只有 16 个；而在 Δ_2 中，所有元素都不等于零，其中 59%(71 个) 的绝对误差大于 0.05 。显然因子分析的误差远小于主成分分析法的误差，这种结果正是由于两种方法本身所决定的。因子模型在于描述随机变量之间的相互关系，所以能较精确地逼近样本的相关矩阵；而主成分模型却在于使主成分占有尽量大的总体方差。

最后，我们对用因子分析法建立的统计模型进行检验。利用 Bartlett 方法，计算得 χ^2 分布的自由度为 5 ，取 $\alpha = 0.05$ ，查表得临界值 $\chi^2_5(0.05) = 11.07$, 计算得到的统计量 χ^2 为 1.40 ，它远小于 11.07, 所以完全可以认为，用因子分析法建立的 S 参数统计模型与样本数据具有相同的分布。

$$\Delta = \left[\begin{array}{cccccccccccccccc}
\bullet & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\
0.02 & \bullet & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & -0.00 & 0.00 & -0.01 & 0.00 & 0.00 & 0.01 & -0.00 & -0.00 \\
-0.06 & 0.05 & \bullet & -0.00 & 0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.01 & -0.00 & -0.00 \\
-0.07 & 0.04 & 0.04 & \bullet & -0.00 & -0.00 & 0.01 & 0.00 & -0.00 & 0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.00 & -0.01 \\
-0.16 & 0.03 & 0.00 & -0.00 & \bullet & -0.00 & -0.01 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.01 & 0.00 & 0.00 & 0.01 & 0.00 & 0.01 \\
-0.03 & -0.00 & -0.01 & -0.01 & -0.11 & \bullet & 0.01 & 0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.01 & 0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & -0.00 \\
0.06 & 0.08 & -0.05 & -0.07 & -0.02 & -0.26 & \bullet & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.00 & 0.00 & -0.00 & -0.01 & 0.00 & 0.01 \\
0.18 & 0.05 & 0.00 & 0.04 & -0.11 & 0.09 & -0.16 & \bullet & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\
0.02 & 0.01 & 0.02 & -0.11 & 0.09 & -0.03 & -0.01 & -0.04 & \bullet & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.00 & 0.00 & -0.00 & -0.00 \\
0.04 & -0.09 & 0.12 & 0.02 & -0.00 & -0.04 & 0.06 & -0.16 & -0.08 & \bullet & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\
-0.08 & -0.07 & 0.15 & 0.18 & -0.01 & 0.16 & -0.07 & -0.06 & 0.08 & -0.07 & \bullet & 0.00 & -0.00 & -0.01 & 0.00 & 0.01 \\
-0.11 & -0.01 & -0.00 & -0.05 & -0.07 & 0.05 & -0.04 & -0.05 & 0.05 & -0.04 & -0.07 & \bullet & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\
0.10 & 0.04 & 0.01 & -0.08 & -0.03 & 0.03 & 0.02 & 0.12 & -0.16 & 0.06 & -0.03 & -0.07 & \bullet & 0.01 & -0.00 & -0.00 \\
0.13 & 0.13 & 0.06 & -0.26 & -0.09 & 0.05 & -0.12 & 0.02 & 0.06 & -0.08 & 0.00 & 0.11 & -0.01 & \bullet & 0.00 & -0.00 \\
0.10 & -0.08 & 0.10 & -0.08 & -0.11 & 0.10 & 0.12 & -0.01 & 0.08 & -0.20 & 0.14 & -0.09 & 0.07 & -0.13 & \bullet & -0.00 \\
-0.10 & -0.10 & -0.14 & -0.22 & 0.13 & -0.08 & -0.00 & 0.06 & 0.01 & -0.08 & 0.04 & 0.09 & -0.07 & 0.09 & 0.16 & \bullet
\end{array}\right] \tag{12}$$

6　结束语

本文提出用因子分析法建立微波场效应管 S 参数的统计模型，给出了建模的算法步骤和模拟结果，并与主成分分析法建立的统计模型进行了比较。从结果可以看出，用因子分析法建立的统计模型具有比较高的精度。

参　考　文　献

[1] Meehan M D, Purviance J. Yield and Reliability in Microwave Circuit and System Design, Boston: Artech House, 1993, chapter 6, pp. 179–207.

[2] Purviance J, *et al.* A linear statistical FET model using principal component analysis. IEEE Trans. on MTT, 1989, MTT-37(9): 1389–1394.

[3] Joreskog K G. Factor analysis by least squares and maximum likelihood, in Statistical Methods for Digital Computers, K. Enstein, A. Ralston, and H. S. Wilf(eds.), New York: John Wiley, 1975. Chapter 2.

[4] Bandler J W, *et al.* Integrated physics-oriented statistical modeling, simulation and optimization. IEEE Trans. on MTT, 1992; 40(6): 1374–1399.

A STATISTICAL MODEL OF MICROWAVE FET S-PARAMETER USING FACTOR ANALYSIS

Huang Yi Shen Chuyu

(*State Key Laboratory of Millimeter Waves, Southeast University, Nanjing* 210096)

Abstract Factor analysis method is firstly used to establish S parameter statistical model of microwave FETs. This statistical model is compared with the one established by principal component analysis method. The results show that the statistical model by factor analysis is more accurate than that by principal component analysis.

Key words Statistical model, FET, Factor analysis, S parameter

黄 艺： 男， 1968 年生，博士生，从事微波毫米波电路 CAD 和有源器件模型的研究.
沈楚玉： 男， 1936 年生，教授，长期从事微波毫米波电路 CAD 和有源器件模型的研究.