第2卷 第2期 电 子 学 通 讯 Vol. 2, No. 2
1980 年 4 月 JOURNAL OF ELECTRONICS April, 1980

# 合成元三维相控阵天线辐射空间多重控制理论的研究*

刘 振 威
(中央气象局电信台)

**提 要**

在接收阵天线中，提高信/噪比，即最大化增益并有效地抑制干扰一直成为研究的中心课题．本文围绕着这个中心，提出了振子型合成元三维相控阵天线辐射空间多重控制理论．它包括：合成元三维阵远区辐射场表达式；合成元在三维空间辐射场型最大方向可控性质；阵辐射场图型多重零点控制的基本关系；在多重零点控制强制条件下，合成元三维相控阵天线方向增益最大化．

## 一、引 言

在天线阵理论的领域中，阵元的空间辐射性质与阵几何之间的关系表明：通常的有向元组成的三维阵其阵元间失去了对称轴，在空间任意选定的方向上都能有效地实现相控将是不可能的．由于在这种情形下，方向图相乘原理不再成立，以及阵几何关系的复杂性，使得对阵的性能指标最佳化和方向图合成技术的研究困难起来．因此，许多作者[1-9]所研究的都局限于各向同性元或同样空间取向的相同的有向元组成的阵，即阵的性能指标最佳化以及方向图合成技术都是以阵因子为前提的，因而他们的理论在实际应用方面受到一定限制．解决这个问题的基本途径之一是：如果某种阵元最大辐射场方向具有按照预先任意给定的方向控制，同时阵元之间兼备在该控制方向上场型具有一致的性质的话，那么这种有向元构成的三维相控阵不仅有了对称轴，而且对称轴可随着相控方向旋转，这就有效地实现了全时空的相控，并为阵性能指标最佳化技术提供了实现的基础．为解决这一问题，本文提出了振子型合成元的形式．

本文研究系属接收相控阵范围．在接收阵天线中，提高信/噪比，即最大化增益并有效地抑制干扰一直成为研究的中心课题．本文围绕着这个中心，提出了合成元三维相控阵天线辐射空间多重控制理论．它包括：合成元三维阵远区辐射场表达式；合成元在三维空间辐射场型最大方向可控性质；阵辐射场图型多重零点控制的基本关系；在多重零点控制强制条件下，合成元三维相控阵天线方向增益最大化．

## 二、合成元三维阵远区辐射场表达式

在 $x$, $y$, $z$ 三维空间，任意放置$N$个合成元，第 $n$ 个合成元 ($n=1, 2, \cdots, N$) 的位

* 1979 年 5 月 7 日收到.

置坐标向量为 $\boldsymbol{r}_n(r_n, \theta_n, \phi_n)$；每个合成元由三个相互垂直的振子组成，第 $n$ 个合成元中，第 1、2、3 振子的辐射场特征向量，即振子的轴向单位向量分别为 $\hat{\boldsymbol{s}}_{n1}(\theta^{n1}, \phi^{n2})$、$\hat{\boldsymbol{s}}_{n2}(\theta^{n2}, \phi^{n2})$ 和 $\hat{\boldsymbol{s}}_{n3}(\theta^{n3}, \phi^{n3})$，如图 1 所示.

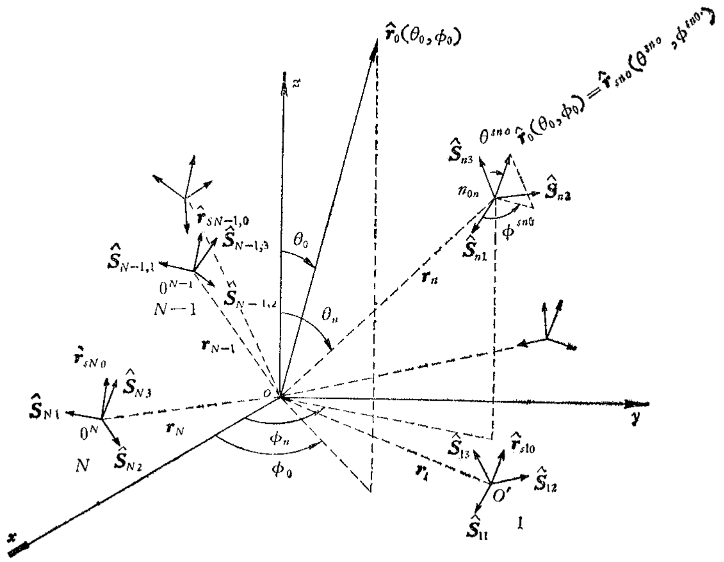

图 1　N 个不同排列方向合成元三维阵坐标系几何关系

根据坐标关系有：

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{s}}_{n1} \\ \hat{\boldsymbol{s}}_{n2} \\ \hat{\boldsymbol{s}}_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta^{n1}\cos\phi^{n1} & \sin\theta^{n1}\sin\phi^{n1} & \cos\theta^{n1} \\ \sin\theta^{n2}\cos\phi^{n2} & \sin\theta^{n2}\sin\phi^{n2} & \cos\theta^{n2} \\ \sin\theta^{n3}\cos\phi^{n3} & \sin\theta^{n3}\sin\phi^{n3} & \cos\theta^{n3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} \\ \hat{\boldsymbol{y}} \\ \hat{\boldsymbol{z}} \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$n = 1, 2, \cdots, N$$

并满足如下条件：

$$\langle \hat{\boldsymbol{s}}_{ns}, \hat{\boldsymbol{s}}_{nt} \rangle = \begin{cases} 1 & s = t \\ 0 & s \neq t \end{cases} \quad s, t = 1, 2, 3 \tag{2}$$

式中，$\hat{\boldsymbol{x}}$、$\hat{\boldsymbol{y}}$、$\hat{\boldsymbol{z}}$ 分别为坐标向量 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$、$\boldsymbol{z}$ 的单位向量；〈 〉表示矢量的数量积. 根据不同排列方向振子元天线阵远区辐射场推导的基本方法[10]，求得 $N$ 个不同排列方向的合成元三维阵的远区辐射场的表达式为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_{阵}(\theta, \phi) = -j\frac{60}{r}\left[\frac{\pi l}{\lambda}\right] e^{-jkr} \sum_{n=1}^{N} \Big\{ \sum_{s=1}^{3} I_{ns} [[\cos\theta \sin\theta^{ns} \cos(\phi - \phi^{ns}) \\ - \sin\theta\cos\theta^{ns}]\hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin\theta^{ns}\sin(\phi - \phi^{ns})\hat{\boldsymbol{\phi}}] \\ \times e^{j\{\delta_n + kr_n[\sin\theta\sin\theta_n\cos(\phi-\phi_n) + \cos\theta\cos\theta_n]\}} \Big\} \end{aligned} \tag{3}$$

式中，$r$、$\theta$、$\phi$ 为远场点 $P$ 的坐标；$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$，圆波数；$l$ 为合成元中每个振子的臂长；$\delta_n$ 为第 $n$ 个合成元的激励电流相位；$I_{ns}$，$s = 1, 2, 3$，分别为第 $n$ 个合成元中三个振子的激励电流幅度；$\hat{\boldsymbol{\theta}}$、$\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 分别为阵坐标 $\theta$, $\phi$ 方向角的单位向量.

## 三、合成元在三维空间中辐射场型最大方向可控性质的分析

在三维阵中的每一个合成元，根据式(1)、(2)，它们在三维空间都是任意取向的，现在我们把每个合成元本身各振子的辐射特征向量 $\hat{s}_{n1}$、$\hat{s}_{n2}$、$\hat{s}_{n3}$ 看成该元自身的坐标系，其对应的坐标方向角为 $\theta^{s_n}$ 和 $\phi^{s_n}$. 根据矢量的基本关系，任意选定的相控方向 $\hat{r}_0(\theta_0, \phi_0)$ 在每个合成元自身坐标系的方向角由下式给出

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta^{s_{n0}} &= \langle \hat{r}_0(\theta_0, \phi_0), \hat{s}_{n3}\rangle \\ \cos\phi^{s_{n0}} &= \frac{\langle \hat{r}_0(\theta_0, \phi_0), \hat{s}_{n1}\rangle}{\sqrt{\langle \hat{r}_0(\theta_0, \phi_0), \hat{s}_{n1}\rangle^2 + \langle \hat{r}_0(\theta_0, \phi_0), \hat{s}_{n2}\rangle^2}}\end{aligned}\right\} \quad n = 1, 2, \cdots, N \tag{4}$$

式中，$\langle\ \rangle$ 表示矢量的数量积；$\hat{s}_{n1}$, $\hat{s}_{n2}$, $\hat{s}_{n3}$ 由式(1)给出；

$$\hat{r}_0(\theta_0, \phi_0) = \sin\theta_0\cos\phi_0\hat{x} + \sin\theta_0\sin\phi_0\hat{y} + \cos\theta_0\hat{z}$$

根据式(4)，相控方向在 $\hat{s}_{n1}\hat{s}_{n2}\hat{s}_{n3}$ 坐标系中的表达式为：

$$\begin{aligned}\hat{r}_0(\theta_0, \phi_0) = \hat{r}_{s_{n0}}(\theta^{s_{n0}}, \phi^{s_{n0}}) &= \sin\theta^{s_{n0}}\cos\phi^{s_{n0}}\hat{s}_{n1} + \sin\theta^{s_{n0}}\sin\phi^{s_{n0}}\hat{s}_{n2} \\ &+ \cos\theta^{s_{n0}}\hat{s}_{n3} \quad n = 1, 2, \cdots, N\end{aligned} \tag{5}$$

并且有：

$$\left.\begin{aligned}&\hat{s}_{n1}(\theta^{s_n} = 90^\circ, \ \phi^{s_n} = 0^\circ) \\ &\hat{s}_{n2}(\theta^{s_n} = 90^\circ \ \ \phi^{s_n} = 90^\circ) \\ &\hat{s}_{n3}(\theta^{s_n} = 0^\circ \ \ \ \phi^{s_n} = 0^\circ)\end{aligned}\right\} \quad n = 1, 2, \cdots, N \tag{6}$$

将式(6)代入式(3)，用合成元自身坐标表示，则合成元三维阵远区辐射场为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{阵}(\theta, \phi) = -j\frac{60}{r}\left[\frac{\pi l}{\lambda}\right] e^{-jkr}\sum_{n=1}^{N}\{&I_{n1}[\cos\theta^{s_n}\cos\phi^{s_n}\hat{\theta}^{s_n} - \sin\phi^{s_n}\hat{\phi}^{s_n}] \\ &+ I_{n2}[\cos\theta^{s_n}\sin\phi^{s_n}\hat{\theta}^{s_n} + \cos\phi^{s_n}\hat{\phi}^{s_n}] + I_{n3}[-\sin\theta^{s_n}\hat{\theta}^{s_n}]\} \\ &\times e^{j[\delta_n + kr_n[\sin\theta\sin\theta_n\cos(\phi-\phi_n) + \cos\theta\cos\theta_n]]}\end{aligned} \tag{7}$$

式中，$\hat{\theta}^{s_n}$, $\hat{\phi}^{s_n}$ 分别为第 $n$ 合成元自身坐标方向角 $\theta^{s_n}$, $\phi^{s_n}$ 的单位向量. 令

$$-I_{n1} = I_{n2} = -I_{n3} = I_n, \quad n = 1, 2, \cdots, N \tag{8}$$

并令 $\phi_{neR1} = -(90^\circ - \phi^{s_{n0}})$ 和 $\phi_{neR2} = \theta^{s_{n0}}$ 分别为第一和第二加权旋转角，则有对应的加权因子分别为：

$$\left.\begin{aligned}\cos\phi_{neR1} &= \sin\phi^{s_{n0}} \\ \sin\phi_{neR1} &= -\cos\phi^{s_{n0}}\end{aligned}\right\}, \quad n = 1, 2, \cdots, N \tag{9}$$

和

$$\left.\begin{aligned}\cos\phi_{neR2} &= \cos\theta^{s_{n0}} \\ \sin\phi_{neR2} &= \sin\theta^{s_{n0}}\end{aligned}\right\}, \quad n = 1, 2, \cdots, N \tag{10}$$

用式(8)—(10)加权阵中每个合成元幅度空间向量因子，则式(7)变为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{阵}(\theta, \phi) = -j\frac{60}{r}\left[\frac{\pi l}{\lambda}\right] e^{-jkr}\sum_{n=1}^{N} I_n\{&[(-1)[\cos\theta^{s_n}\cos\phi^{s_n}\hat{\theta}^{s_n} \\ &- \sin\phi^{s_n}\hat{\phi}^{s_n}]\sin\phi_{neR1} + [\cos\theta^{s_n}\sin\phi^{s_n}\hat{\theta}^{s_n} + \cos\phi^{s_n}\hat{\phi}^{s_n}] \\ &\times \cos\phi_{neR1}]\cos\phi_{neR2} + (-1)[-\sin\theta^{s_n}\hat{\theta}^{s_n}]\sin\phi_{neR2}\}\end{aligned}$$

$$\times\ e^{j[\delta_n+kr_n[\sin\theta\sin\theta_n\cos(\phi-\phi_n)+\cos\theta\cos\theta_n]]}$$

$$= -j\frac{60}{r}\left[\frac{\pi l}{\lambda}\right]e^{-jkr}\sum_{n=1}^{N}\{I_n[\cos\theta^{s_n}\cos\theta^{s_{n0}}\cos(\phi^{s_n}-\phi^{s_{n0}})\hat{\boldsymbol{\theta}}^{s_n}$$

$$-\sin(\phi^{s_n}-\phi^{s_{n0}})\cos\theta^{s_{n0}}\hat{\boldsymbol{\phi}}^{s_n}+\sin\theta^{s_n}\sin\theta^{s_{n0}}\hat{\boldsymbol{\theta}}^{s_n}]$$

$$\times\ e^{j[\delta_n+kr_n[\sin\theta\sin\theta_n\cos(\phi-\phi_n)+\cos\theta\cos\theta_n]]}\} \tag{11}$$

从式 (11) 中看出：在相控 $\hat{\boldsymbol{r}}_0(\theta_0,\phi_0)$ 方向，即

$$\delta_n = -kr_n[\sin\theta_0\sin\theta_n\cos(\phi_0-\phi_n)+\cos\theta_0\cos\theta_n] \quad n=1,2,\cdots,N$$

的条件下，考虑式 (5) 关系，阵中合成元的幅度空间向量因子

$$[\cos\theta^{s_n}\cos\theta^{s_{n0}}\cos(\phi^{s_n}-\phi^{s_{n0}})\hat{\boldsymbol{\theta}}^{s_n}-\sin(\phi^{s_n}-\phi^{s_{n0}})\cos\theta^{s_{n0}}\hat{\boldsymbol{\phi}}^{s_n}$$
$$+\sin\theta^{s_n}\sin\theta^{s_{n0}}\hat{\boldsymbol{\theta}}^{s_n}],\quad n=1,2,\cdots,N$$

呈现最大值. 这表明：在阵中所有合成元在加权条件下，辐射场最大方向都指向预先任意选定的相控方向. 根据辐射空间的几何关系，在这种情况，阵中每个合成元辐射场在相控方向具有最大点外，其场型⊖(含相控方向场强方向在内)都是不一致的.

根据以上分析，揭示了一个基本关系，合成元的辐射场最大方向的可控性质与合成元自身的取向无关. 利用这种性质，我们提出把阵中每个合成元都进行一致取向的处理，即在阵的 $x$, $y$, $z$ 坐标系中，令

$$\hat{\boldsymbol{s}}_{n1}(\theta^{n1}=90°,\ \phi^{n1}=0°)$$
$$\hat{\boldsymbol{s}}_{n2}(\theta^{n2}=90°,\ \phi^{n2}=90°)$$
$$\hat{\boldsymbol{s}}_{n3}(\theta^{n3}=0°,\ \phi^{n3}=0°),\quad n=1,2,\cdots,N$$

则式 (1) 变为

$$\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{s}}_{n1}\\ \hat{\boldsymbol{s}}_{n2}\\ \hat{\boldsymbol{s}}_{n3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}\\ \hat{\boldsymbol{y}}\\ \hat{\boldsymbol{z}}\end{bmatrix} \tag{12}$$

该式称为阵合成元一致取向条件. 这时，阵中合成元的加权条件为

$$\left.\begin{aligned}\cos\phi_{neR1}&=\sin\phi_0\\ \sin\phi_{neR1}&=-\cos\phi_0\\ \cos\phi_{neR2}&=\cos\theta_0\\ \sin\phi_{neR2}&=\sin\theta_0\\ -I_{n1}=I_{n2}&=-I_{n3}=I_n\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

根据式 (12)、(13)，则一致取向合成元三维相控阵天线远区辐射场为

$$\boldsymbol{E}_{阵|^{一致}_{加权}}(\theta,\phi)=-j\frac{60}{r}\left[\frac{\pi l}{\lambda}\right]e^{-jkr}\{[\cos\theta\cos\theta_0\cos(\phi-\phi_0)$$

$$+\sin\theta\sin\theta_0]\hat{\boldsymbol{\theta}}-\sin(\phi-\phi_0)\cos\theta_0\hat{\boldsymbol{\phi}}\}$$

$$\times\sum_{n=1}^{N}I_n e^{j[\delta_n+kr_n[\sin\theta\sin\theta_n\cos(\phi-\phi_n)+\cos\theta\cos\theta_n]]} \tag{14}$$

⊖ 此处“场型”是指阵元向整个空间辐射图型，并包含相应的场强方向的完整概念而特定提出的.

式(14)表明：一致取向的合成元经多重加权，在相控方向 $\hat{r}_0(\theta_0, \phi_0)$，每个元的场强方向都为 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$，并且相对幅度都为1，因此得到了有效地相加；阵中的每个合成元辐射场型在相控方向都具有一致性的特征；合成元自身的辐射场与阵因子无关。由此得出结论：有向元三维阵以合成元的形式有效地实现了全时空的相控。

## 四、合成元三维相控阵天线辐射图型零点控制的基本关系

本节通过矢量空间方法，给出了合成元三维相控阵天线辐射图型多重零点控制的基本关系。

### (一) 合成元三维相控阵远区辐射场多重零点控制矢量空间

令列矢量 $\boldsymbol{J}$ 表示阵元的复激励函数集合

$$\boldsymbol{J} = [J_n] = \begin{bmatrix} I_1\exp(j\delta_1) \\ I_2\exp(j\delta_2) \\ \vdots \\ I_N\exp(j\delta_N) \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, \cdots, N \tag{15}$$

令列矢量 $\boldsymbol{F}$ 表示由距离不同引起的相位差因子集合

$$\boldsymbol{F} = [F_n] = \begin{bmatrix} \exp(-jk\boldsymbol{r}_1\cdot\hat{\boldsymbol{r}}) \\ \exp(-jk\boldsymbol{r}_2\cdot\hat{\boldsymbol{r}}) \\ \vdots \\ \exp(-jk\boldsymbol{r}_N\cdot\hat{\boldsymbol{r}}) \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, \cdots, N \tag{16}$$

并令

$$-j\frac{60}{r}\left[\frac{\pi l}{\lambda}\right]e^{-jkr} = K$$

以及

$$\{[\cos\theta\cos\theta_0\cos(\phi-\phi_0) + \sin\theta\sin\theta_0]\hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin(\phi-\phi_0)\cos\theta_0\hat{\boldsymbol{\phi}}\} = \boldsymbol{g}(\theta, \phi)_{|eR(\theta_0,\phi_0)}$$

则式(14)变为

$$\boldsymbol{E}_{阵}(\theta, \phi) = K\boldsymbol{g}(\theta, \phi)_{|eR(\theta_0,\phi_0)}\langle\boldsymbol{F}, \boldsymbol{J}\rangle \tag{17}$$

式中，$\langle\ \rangle$ 表示矢量的数量积。

对应于相控方向式(17)的形式为

$$\boldsymbol{E}_{阵}(\theta_0, \phi_0) = K\langle\boldsymbol{F}_0, \boldsymbol{J}\rangle \tag{18}$$

式中，$\boldsymbol{F}_0$ 是 $\boldsymbol{F}$ 中的 $\hat{\boldsymbol{r}}(\theta, \phi)$ 用 $\hat{\boldsymbol{r}}_0(\theta_0, \phi_0)$ 代换求得。

若预先任意选定 $M$ 个方向

$$\hat{\boldsymbol{r}}_i(\theta_i, \phi_i), \quad i = 1, 2, \cdots, M$$

使得阵远区辐射图型对应于这些方向都同时产生零点，根据式(17)，产生一组矢量空间关系

$$Kg(\theta_i, \phi_i)_{|eR(\theta_0,\phi_0)}\langle F_i, J\rangle = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, M \tag{19}$$

式中，$F_i$ 称之为零点强制矢量．对应 $M$ 个零点强制矢量集合 $H$ 为

$$H = \begin{bmatrix} F_1^+ \\ F_2^+ \\ \vdots \\ F_M^+ \end{bmatrix} \tag{20}$$

式中，符号“+”表示矢量的复共轭转置．

式（19）表明：$g(\theta, \phi)_{|eR(\theta_0,\phi_0)}$ 是合成元方向图型，仅由元本身的结构而定，而阵辐射图型在任意若干规定的方向产生零点是通过零点强制矢量集合 $H$ 改变复激励函数集合 $J$ 所在空间的结构而形成的，因此与合成元方向图型因子无关，考虑式（20）的关系，则式（19）变为

$$HJ = 0 \tag{21}$$

我们把式（21）称为合成元三维相控阵天线远区辐射场多重零点控制矢量空间．

## （二）多重零点控制矢量空间的性质及其求解

根据矢量空间的基本性质[11]，令 $\mathfrak{R}(H^T)$ 为 $H$ 零点强制矢量集合的行空间，$\mathfrak{N}(H)$ 为 $H$ 零点强制矢量集合的零空间，则有如下性质：行空间 $\mathfrak{R}(H^T)$ 与零空间 $\mathfrak{N}(H)$ 正交；在 $H$ 零点强制矢量集合中，其元素 $F_i$ 之间是线性不相关的，而构成 $M$ 维子空间；由于行空间 $\mathfrak{R}(H^T)$ 与零空间 $\mathfrak{N}(H)$ 的正交互补性质，$\mathfrak{R}(H^T)$ 与 $\mathfrak{N}(H)$ 构成了 $N$ 维空间，则零空间 $\mathfrak{N}(H)$ 为 $(N-M)$ 维子空间．阵元的复激励函数集合矢量 $J$ 存在于零空间 $\mathfrak{N}(H)$ 中，如果它的一组正交规格化基为 $e_{(1)}, e_{(2)}, \cdots, e_{(N-M)}$ 的话，则阵元复激励函数集合 $J$ 在零空间 $\mathfrak{N}(H)$ 的表示式 $J_c$ 为

$$J_c = \langle e_{(1)}, J\rangle e_{(1)} + \langle e_{(2)}, J\rangle e_{(2)} + \cdots + \langle e_{(N-M)}, J\rangle e_{(N-M)} \tag{22}$$

根据以上分析，多重零点控制矢量空间的另一种表达式为

$$\mathfrak{R}(H^T)\mathfrak{N}(H) = 0 \tag{23}$$

根据零点强制矢量 $F_i$ 的定义，则有

$$H = \begin{bmatrix} F_1^+ \\ F_2^+ \\ \vdots \\ F_M^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{jkr_1\cos\alpha_{11}} & e^{jkr_2\cos\alpha_{21}} & \cdots & e^{jkr_N\cos\alpha_{N1}} \\ e^{jkr_1\cos\alpha_{12}} & e^{jkr_2\cos\alpha_{22}} & \cdots & e^{jkr_N\cos\alpha_{N2}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ e^{jkr_1\cos\alpha_{1M}} & e^{jkr_2\cos\alpha_{2M}} & \cdots & e^{jkr_N\cos\alpha_{NM}} \end{bmatrix} \tag{24}$$

式中，$\cos\alpha_{ni} = \hat{r}_n \cdot \hat{r}_i = \sin\theta_i \sin\theta_n \cos(\phi_i - \phi_n) + \cos\theta_i \cos\theta_n$，$i = 1, 2, \cdots, M$，$n = 1, 2, \cdots, N$．

令 $H$ 为 $M \times N$ 矩阵 $Q_{MN} = [q_{m,n}]$，并令

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

为零空间 $\mathfrak{N}(H)$ 中的任意一个矢量，则式（23）变为

$$\boldsymbol{Q}_{MN}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \tag{25}$$

的求解. 根据齐次方程组的性质[12],求得生成零空间 $\mathfrak{N}(\boldsymbol{H})$ 的一组基为

$$\boldsymbol{x}_{(j)}=\begin{bmatrix} x_1^{(j)} \\ x_2^{(j)} \\ \vdots \\ x_M^{(j)} \\ 0_{(1)} \\ \vdots \\ 0 \\ 1_{(j)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0_{(N-M)} \end{bmatrix}, \quad j=1,2,\cdots,(N-M) \tag{26}$$

式中,

$$\begin{bmatrix} x_1^{(j)} \\ x_2^{(j)} \\ \vdots \\ x_M^{(j)} \end{bmatrix}=\boldsymbol{Q}_{MM}^{-1}\boldsymbol{b}_{(j)}$$

并且, $\boldsymbol{Q}_{MM}=[q_{mn}],\ m,n=1,2,\cdots,M$

$$\boldsymbol{b}_{(j)}=-\begin{bmatrix} q_{1\,(M+j)} \\ q_{2\,(M+j)} \\ \vdots \\ q_{M\,(M+j)} \end{bmatrix}, \quad j=1,2,\cdots,(N-M)$$

$$q_{mn}=e^{ikr_n\cos\alpha_{nm}}, \quad m=1,2,\cdots,M, \quad n=1,2,\cdots,N$$

式(26)称为多重零点控制矢量空间的解.

### (三) 多重零点控制强制条件及其对应的阵辐射场矢量空间表达式

已知生成行空间 $\mathfrak{R}(\boldsymbol{H}^T)$ 的一组基为 $\boldsymbol{F}_i$, $i=1,2,\cdots,M$, 和生成零空间 $\mathfrak{N}(\boldsymbol{H})$ 的一组基为 $\boldsymbol{x}_{(j)}$, $j=1,2,\cdots,(N-M)$. 令 $\boldsymbol{v}_i$ 和 $\boldsymbol{e}_i$, $i=1,2,\cdots,M$, 分别为行空间 $\mathfrak{R}(\boldsymbol{H}^T)$ 的一组正交基和对应的正交规格化基,并令 $\boldsymbol{w}_{(j)}$ 和 $\boldsymbol{e}_{(j)}$, $j=1,2,\cdots,(N-M)$, 分别为零空间 $\mathfrak{N}(\boldsymbol{H})$ 的一组正交基和对应的正交规格化基. 根据 Gram-Schmidt 正交化方法[13],对于行空间 $\mathfrak{R}(\boldsymbol{H}^T)$ 和零空间 $\mathfrak{N}(\boldsymbol{H})$ 分别有如下关系:

$$\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{F}_i-\sum_{i=1}^{i-1}\frac{\langle \boldsymbol{v}_{i-1},\boldsymbol{F}_i\rangle}{\langle \boldsymbol{v}_{i-1},\boldsymbol{v}_{i-1}\rangle}\boldsymbol{v}_{i-1};\quad \boldsymbol{e}_i=\frac{\boldsymbol{v}_i}{\sqrt{\langle \boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_i\rangle}}\quad i=1,2,\cdots,M \tag{27}$$

$$\boldsymbol{w}_{(j)}=\boldsymbol{x}_{(j)}-\sum_{j=1}^{j-1}\frac{\langle \boldsymbol{w}_{(j-1)},\boldsymbol{x}_{(j)}\rangle}{\langle \boldsymbol{w}_{(j-1)},\boldsymbol{w}_{(j-1)}\rangle}\boldsymbol{w}_{(j-1)};\quad \boldsymbol{e}_{(j)}=\frac{\boldsymbol{w}_{(j)}}{\sqrt{\langle \boldsymbol{w}_{(j)},\boldsymbol{w}_{(j)}\rangle}}$$

$$j=1,2,\cdots,(N-M) \tag{28}$$

根据式 (27) (28)，我们分别求得行空间 $\mathfrak{R}(\boldsymbol{H}^T)$ 和零空间 $\mathfrak{N}(\boldsymbol{H})$ 正交规格化基．由于行空间 $\mathfrak{R}(\boldsymbol{H}^T)$ 和零空间 $\mathfrak{N}(\boldsymbol{H})$ 的正交互补性质，则 $\boldsymbol{e}_i$，$i=1, 2, \cdots, M$ 和 $\boldsymbol{e}_{(j)}$，$j=1,2, \cdots, (N-M)$ 构成了一个完整的 $N$ 维空间．因而，把它们毗连起来形成了 $N$ 维空间的强制矢量集合

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1^+ \\ \boldsymbol{e}_2^+ \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_M^+ \\ \boldsymbol{e}_{(1)}^+ \\ \boldsymbol{e}_{(2)}^+ \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_{(N-M)}^+ \end{bmatrix} \tag{29}$$

此式称为多重零点控制强制条件．$\boldsymbol{P}$ 中任何两个矢量之间存在如下性质

$$\boldsymbol{e}_\mu^+\boldsymbol{e}_\nu=\begin{cases}1 & 当\ \mu=\nu \\ 0 & 当\ \mu\neq\nu\end{cases}$$

根据这个性质，则有

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^+=\boldsymbol{I} \tag{30}$$

式中：$\boldsymbol{I}$ 表示单位矩阵，符号"+"表示复共轭转置．因此，$\boldsymbol{P}$ 是酉矩阵(或称为 Hermitian 正交矩阵)．

根据式 (19)、(22)、(29)、(30)，在多重零点控制强制条件下，合成元三维相控阵天线远区辐射场公式和复激励函数集合矢量空间表示式分别为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{阵c}(\theta, \phi)&=[K\boldsymbol{g}(\theta, \phi)_{|eR(\theta_0,\phi_0)}]\langle\boldsymbol{F}, \boldsymbol{P}^+\boldsymbol{J}_c\rangle \\ &=[K\boldsymbol{g}(\theta, \phi)_{|eR(\theta_0,\phi_0)}](\boldsymbol{P}\boldsymbol{F})^+\boldsymbol{J}_c\end{aligned} \tag{31}$$

$$\boldsymbol{J}_c=\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\ 或\ \boldsymbol{J}=\boldsymbol{P}^+\boldsymbol{J}_c \tag{32}$$

上述分析揭示了合成元三维相控阵零点形成的基本规律，在多重零点强制集合 $\boldsymbol{H}$ 的作用下，通过 $\boldsymbol{P}$ 因子改变强制激励函数集合 $\boldsymbol{J}_c$ 所在空间的结构，而实现阵辐射图型多重零点控制；当强制零点个数 $M$ 增加，即行空间 $\mathfrak{R}(\boldsymbol{H}^T)$ 维数增加，而零空间 $\mathfrak{N}(\boldsymbol{H})$ 的维数相应减少时，则反映激励函数集合矢量 $\boldsymbol{J}_c$ 的自由度的减少，如果 $\mathfrak{R}(\boldsymbol{H}^T)$ 的维数增加至 $N-1$ 维，即零点控制个数 $M=N-1$ 时，则 $\boldsymbol{J}_c$ 的自由度减少到 1，说明控制零点个数可高至 $N-1$ 个．在工程方面，根据式 (32)，逐次求 $i=1, 2, \cdots, M$ 零点所对应的 $\boldsymbol{J}_{c(1)}$，$\boldsymbol{J}_{c(2)}$，$\cdots$，$\boldsymbol{J}_{c(N-M)}$ 的激励，通过分层多重独立的馈电结构而实现多重零点定位控制．

## 五、在多重零点控制强制条件下，合成元三维相控阵天线方向增益最大化

用参考文献 [14] 中的相同方法，求得合成元三维相控阵用 Hermitian 型比表示方向增益的公式为：

$$D = \frac{\boldsymbol{J}^{+}\boldsymbol{A}\boldsymbol{J}}{\boldsymbol{J}^{+}\boldsymbol{B}\boldsymbol{J}} \tag{33}$$

式中，符号“+”表示矢量复共轭转置，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 $N \times N$ Hermitian 矩阵，并且 $\boldsymbol{B}$ 是正定的.

$$\boldsymbol{A} = [a_{mn}] = \boldsymbol{F}_0\boldsymbol{F}_0^{+}$$

$$\boldsymbol{F}_0 = \begin{bmatrix} e^{-jkr_1\cos\alpha_{10}} \\ e^{-jkr_2\cos\alpha_{20}} \\ \vdots \\ e^{-jkr_N\cos\alpha_{N0}} \end{bmatrix}$$

并且

$$\boldsymbol{B} = [b_{mn}]$$

$\boldsymbol{B}$ 的元素 $b_{mn}$ 为

$$b_{mn} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |\boldsymbol{g}(\theta, \phi)_{|eR(\theta_0, \phi_0)}|^2 e^{-jk[r_m\cos\alpha_m - r_n\cos\alpha_n]} \sin\theta d\theta d\phi$$

式中，

$$\cos\alpha_n = [\sin\theta\sin\theta_n\cos(\phi - \phi_n) + \cos\theta\cos\theta_n]$$

$$\cos\alpha_{n0} = [\sin\theta_0\sin\theta_n\cos(\phi_0 - \phi_n) + \cos\theta_0\cos\theta_n]$$

把式(32)代入式(33)，则在多重零点控制强制条件下，合成元三维相控阵天线方向增益表示式为：

$$D_c = \frac{\boldsymbol{J}_c^{+}\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{J}_c}{\boldsymbol{J}_c^{+}\boldsymbol{B}_c\boldsymbol{J}_c} \tag{34}$$

式中，

$$\boldsymbol{A}_c = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{+}$$

$$\boldsymbol{B}_c = \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{+}$$

根据式(34)，在多重零点控制强制条件下[3]，合成元三维相控阵天线方向增益最大值为：

$$D_{c\max} = \boldsymbol{F}_{0c}^{+}\boldsymbol{B}_c^{-1}\boldsymbol{F}_{0c} \tag{35}$$

与它对应的最佳化复激励的条件为：

$$\boldsymbol{J}_{c\text{opt}} = \boldsymbol{B}_c^{-1}\boldsymbol{F}_{0c}^{+} \tag{36}$$

式中，

$$\boldsymbol{F}_{0c} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{F}_0$$

根据式(35)、(36)，用数值方法可解出合成元三维相控阵天线在多重零点控制强制条件下的方向增益最大化问题.

## 感 谢

在这项研究工作中，得到了中国科学院电子学研究所吕保维先生的宝贵指导，在此表示由衷地感谢. 对中央气象局各级领导的热情支持和关怀，深表谢意.

## 参 考 文 献


[1] Y. T. Lo, S. W. Lee and Q. H. Lee, *Proc. IEEE*, 54(1966),1033.
[2] D. K. Cheng and F. I. Tseng, *Proc. IEE*, 114(1967), 589.
[3] C. J. Drane, Jr. and J. F. McIlvenna, *Radio Electron. Eng.*, 39 (1970), 49.
[4] D. K. Cheng, *Proc. IEEE*, 59(1971), 1664.
[5] R. R. Kurth, *IEEE Trans. on AP*, AP-22(1974), 103.
[6] B. Wardrop, *Marconi Rev. (GB)*, 38(1975), 184.
[7] N. Goto and Y. Tsunoda, *IEEE Trans. on AP*, AP-25(1977), 896.
[8] F. Hodjat and S. A. Hovanessian, *IEEE Trans. on AP*, AP-26(1978), 198.
[9] O. Elnarsson, *IEEE Trans. on AP*, AP-27(1979), 86.
[10] 刘振威,电子学通讯,1(1979), 118.
[11] G. Strang, Linear Algebra and Its Applications, Academic Press, (1976), Chapter 2.
[12] E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, Wiley and Sons, Inc., (1972), Chapter 6.
[13] F. B. Hildebrand, Methods of Applied Mathematics, Prentice-Hall, (1965), pp34—36.
[14] 刘振威,电子学通讯,1(1979),163.