

# 非均匀介质填充波导本征值问题的有限元分析\*

徐善驾

(中国科学技术大学)

## 提 要

本文讨论了用有限元法求解非均匀介质填充波导本征值问题的具体过程,给出了有关的计算公式和程序。作为例子,对条形介质填充矩形波导主模场结构的分析和色散特性的计算,获得了与解析解十分一致的结果,从而证实了所述程序的可靠性。

## 一、引 言

非均匀介质填充规则波导的本征值问题是微波理论和技术中重要的实际问题之一。尤其是介质填充波导简正孪生波色散特性的分析更是研究特种微波传输线和设计有关微波元件的基础。

场分量匹配法是研究介质填充波导各简正孪生波色散特性的有力工具。这种方法首先求出波导横截面内各分块均匀介质区域中电波和磁波的本征函数,然后根据介质交界面上切向电场和磁场连续的边界条件,确定特征方程,进而解出各孪生波的传播常数。但是除了少数极简单正规的边界形状外,能用解析法求解的边值问题实在是不多的;因此利用解析法通过场分量匹配来求解介质填充波导的本征值问题有一定的局限性。本文讨论的用有限元法对非均匀介质填充波导本征值问题的求解,适用于任意横截面形状,填充介质分块均匀的波导;从而打破了上述的限制,使对这类问题的求解范围大为扩展。

与均匀介质填充的情况不同,在非均匀介质填充的波导中,电波和磁波一般是不能单独存在的,能独立存在的本征波是既有纵向磁场又有纵向电场的孪生波。因此,为了导出孪生波的所有场分量并确定它的传播常数,必须同时求解,而不是分别单独求解(场在介质交界面上相互耦合)两个满足 Helmholtz 方程和有关边界条件,与纵向电场  $E_z$  和纵向磁场  $H_z$  成比例的标量函数  $\psi$  和  $\phi$ ;然后再根据(1)和(2)式由纵向场确定横向场。这样,整个问题的求解便告完成。

$$\mathbf{E}_{ip} = \frac{j\epsilon_{cp}}{\chi^2} \omega\mu_p [\mathbf{i}_z \times \nabla_i \phi_p - \epsilon_c \nabla_i \psi_p], \quad (1)$$

$$\mathbf{H}_{ip} = -\frac{j\epsilon_{cp}\beta}{\chi^2} [\epsilon_{rp} \mathbf{i}_z \times \nabla_i \psi_p + \nabla_i \phi_p]. \quad (2)$$

\* 1981年7月6日收到。

本文的目的就是要导出用有限元法求解函数  $\psi$  和  $\phi$  以及孪生波传播特性的计算公式和程序,并对两种条形介质填充矩形波导主模场结构及其色散特性进行计算,以证实所述方法和计算程序的可靠性.

## 二、有限元分析

现在考察如图 1 所示,在横截面形状为任意的规则波导内填充  $p$  块分块均匀的电介质 ( $\mu = \mu_0$ ) 的情况. 波导壁认为是理想导电的,忽略介质的损耗. 在子域  $s_p$  内标量函数  $\phi_p = H_{z,p}$  和

$\psi_p = \frac{\omega \epsilon_0}{\beta} E_{z,p}$  满足 Helmholtz 方程:

$$\left. \begin{aligned} \nabla_i^2 \phi_p + g_p^2 \phi_p &= 0, \\ \nabla_i^2 \psi_p + g_p^2 \psi_p &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中,

$$g_p^2 = k^2 \epsilon_{rp} - \beta^2 = \chi^2 / \epsilon_{cp}, \quad (4)$$

$$\epsilon_{cp} = \frac{\epsilon_c - 1}{\epsilon_c - \epsilon_{rp}}, \quad (5)$$

$$\epsilon_c = \left( \frac{\beta}{k} \right)^2, \quad (6)$$

$$\chi^2 = k^2 - \beta^2 = k^2(1 - \epsilon_c), \quad (7)$$

式中,  $k$  为自由空间波数,  $\beta$  为孪生波的传播常数,  $\chi$  是它的本征值,  $\epsilon_c$  为等效介电常数,  $\epsilon_{rp}$  是子域  $s_p$  内介质的相对介电常数.

对  $p$  个子区间求和后,即得整个波导横截面上纵向场应满足的方程. 由(3)式可将偏微分方程组对  $p$  的求和写成如下的矩阵形式:

$$\sum_p \left( \begin{bmatrix} \epsilon_{cp} \nabla_i^2 & 0 \\ 0 & \epsilon_c \epsilon_{cp} \epsilon_{rp} \nabla_i^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi_p \\ \psi_p \end{pmatrix} + \chi^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \epsilon_c \epsilon_{rp} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi_p \\ \psi_p \end{pmatrix} \right) = 0. \quad (8)$$

上式中函数  $\phi_p$  和  $\psi_p$  在波导壁上应满足:

$$\left. \frac{\partial \phi_p}{\partial n} \right|_{\Omega} = 0, \quad (9)$$

$$\phi_p|_{\Omega} = 0. \quad (10)$$

在介质界面  $\Omega'$  上根据切向电场和切向磁场连续的条件,应保证

$$\phi_p, \psi_p, \epsilon_{cp} \left( \omega \mu_0 \frac{\partial \phi_p}{\partial n} - \frac{\beta^2}{\omega \epsilon_0} \frac{\partial \phi_p}{\partial l} \right), \epsilon_{rp} \beta \left( \epsilon_{rp} \frac{\partial \psi_p}{\partial n} + \frac{\partial \psi_p}{\partial l} \right)$$

是连续的. 其中  $\mathbf{n}$  和  $\mathbf{l}$  分别是介质交界面的法向和切向单位矢量,  $\frac{\partial}{\partial l}$  表示沿界面切向求导,  $\mathbf{i}_z = \mathbf{n} \times \mathbf{l}$ ,  $\mathbf{i}_z$  为波导轴向单位矢量.

(8) 式加上上述的边界条件构成了非均匀介质填充波导的本征值问题. 可以证明<sup>[1]</sup>, 该本征值问题等价于下列泛函的变分问题:

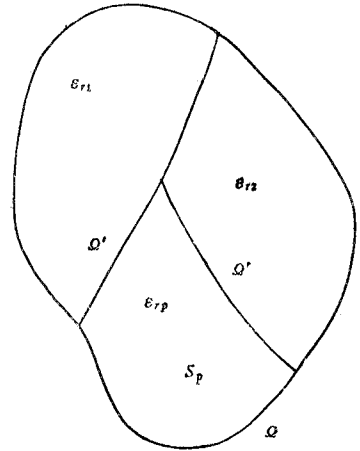


图 1 非均匀介质填充波导  
Fig. 1 A waveguide filled with inhomogeneous dielectrics

$$J(\phi, \psi) = \sum_p [J_1(\phi_p, \psi_p) + J_2(\phi_p, \psi_p) - \chi^2 J_3(\phi_p, \psi_p)], \quad (11)$$

其中,

$$J_1(\phi_p, \psi_p) = \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_{cp} \int_{s_p} |\nabla_t \phi_p|^2 ds_p + \varepsilon_c \varepsilon_{cp} \varepsilon_{rp} \int_{s_p} |\nabla_t \psi_p|^2 ds_p \right], \quad (12)$$

$$\begin{aligned} J_2(\phi_p, \psi_p) &= \varepsilon_{cp} \varepsilon_c \int_{s_p} \mathbf{i}_z \cdot (\nabla_t \phi_p \times \nabla_t \psi_p) ds_p \\ &= \varepsilon_{cp} \varepsilon_c \int_{s_p} \left( \frac{\partial \phi_p}{\partial x} \frac{\partial \psi_p}{\partial y} - \frac{\partial \psi_p}{\partial x} \frac{\partial \phi_p}{\partial y} \right) ds_p, \end{aligned} \quad (13)$$

$$J_3(\phi_p, \psi_p) = \frac{1}{2} \left[ \int_{s_p} |\phi_p|^2 ds_p + \varepsilon_c \varepsilon_{rp} \int_{s_p} |\psi_p|^2 ds_p \right]. \quad (14)$$

为了求解变分问题(11)式, 首先需对区域进行剖分. 如图 2 所示, 将每个子域  $s_p$  逐个分割为互不重叠的基本元 (现取成三角形), 记为  $\Delta_c$ ,  $c$  为基本元的编号; 每个三角形顶点按反时针方向以次序 (1, 2, 3) 排列. 由于波导与介质的边界面  $\Omega$  和介质交界面  $\Omega'$  两边介质的特性参数  $\varepsilon$ , 有间断性, 故剖分时点元必须落在间断线  $\Omega$  和  $\Omega'$  上.

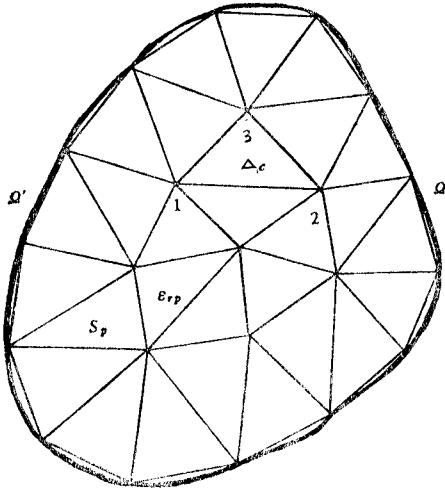


图 2 区域的剖分

Fig. 2 Divisions of a range

与用正交波型函数系展开的方法来表示波导中的任意场相类似, 在有限元的离散化中, 函数  $\phi_p(x, y)$ ,  $\psi_p(x, y)$  在各基本元上用适当方式插值的基函数来代替; 若采用三角形上的线性插值, 则对于  $s_p$  内的第  $c$  个单元, 应有:

$$\phi_p^c(x, y) = \sum_{i=1}^3 N_i^c(x, y) \phi_i^c, \quad (x, y) \in \Delta_c; \quad (15)$$

$$\psi_p^c(x, y) = \sum_{i=1}^3 N_i^c(x, y) \psi_i^c, \quad (x, y) \in \Delta_c; \quad (16)$$

其中,  $\phi_i^c$  和  $\psi_i^c$  分别是  $\phi_p^c$  和  $\psi_p^c$  在第  $c$  个三角形, 第  $i$  个顶点上的值;  $N_i^c(x, y)$  是三角形上线性插值的基函数, 它等于<sup>[5]</sup>:

$$N_i^c(x, y) = \frac{1}{2\Delta_c} (a_i + b_i x + c_i y), \quad (i = 1, 2, 3). \quad (17)$$

如果由  $p$  个子域  $s_p$  构成的整个波导横截面  $s$  内共有  $K_n$  个点元, 则由于同一个点元要对应  $\psi$  和  $\phi$  两个函数, 故每个点元应该有两个标号. 本文采用如下的分配办法: 函数  $\phi$  在各点的取值用标号 1 至  $K_n$  来表示; 而标号  $K_n + 1$  至  $2K_n$  表示函数  $\psi$  在点元的取值. 这样, 泛函(11)式存在极值的必要条件可表示为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \phi_l} &= 0, \quad (l = 1, 2, \dots, K_n); \\ \frac{\partial J}{\partial \psi_j} &= 0, \quad (j = K_n + 1, K_n + 2, \dots, 2K_n); \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

即

$$\left. \begin{aligned} \sum_p \left[ \frac{\partial J_1}{\partial \phi_l} + \frac{\partial J_2}{\partial \phi_l} - \chi^2 \frac{\partial J_3}{\partial \phi_l} \right] &= 0, \quad (l = 1, 2, \dots, K_n); \\ \sum_p \left[ \frac{\partial J_1}{\partial \phi_j} + \frac{\partial J_2}{\partial \phi_j} - \chi^2 \frac{\partial J_3}{\partial \phi_j} \right] &= 0, \quad (j = K_n + 1, \dots, 2K_n). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

由(12)式得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_1}{\partial \phi_l} &= \varepsilon_{cp} \int_{s_p} \left[ \frac{\partial \phi_p}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi_l} \left( \frac{\partial \phi_p}{\partial x} \right) + \frac{\partial \phi_p}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi_l} \left( \frac{\partial \phi_p}{\partial y} \right) \right] dx dy \\ &\quad + \varepsilon_c \varepsilon_{cp} \varepsilon_{rp} \int_{s_p} \left[ \frac{\partial \phi_p}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi_l} \left( \frac{\partial \phi_p}{\partial x} \right) + \frac{\partial \phi_p}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi_l} \left( \frac{\partial \phi_p}{\partial y} \right) \right] dx dy. \end{aligned} \quad (20)$$

由于  $\frac{\partial}{\partial \phi_l} \left( \frac{\partial \phi_p}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial \phi_l} \left( \frac{\partial \phi_p}{\partial y} \right) = 0$ , 故上式中的后半部分为零.

设  $\frac{\partial J_1^c}{\partial \phi_i^c}$  表示子域  $s_p$  内的面元  $\Delta_e$  对(20)式的贡献, 则将(15)和(16)式代入(20)式后有:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_1^c}{\partial \phi_i^c} &= \varepsilon_{cp} \sum_{i=1}^3 \int_{\Delta_e} \phi_i^c \left[ \frac{\partial N_i^c}{\partial x} \frac{\partial N_i^c}{\partial x} + \frac{\partial N_i^c}{\partial y} \frac{\partial N_i^c}{\partial y} \right] dx dy \\ &= \varepsilon_{cp} \sum_{i=1}^3 \phi_i^c (b_i b_i + c_i c_i) / 4 \Delta_e. \end{aligned} \quad (21)$$

同理可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_1^c}{\partial \phi_j^c} &= \varepsilon_c \varepsilon_{cp} \varepsilon_{rp} \sum_{i=1}^3 \int_{\Delta_e} \phi_i^c \left[ \frac{\partial N_i^c}{\partial x} \frac{\partial N_i^c}{\partial x} + \frac{\partial N_i^c}{\partial y} \frac{\partial N_i^c}{\partial y} \right] dx dy \\ &= \varepsilon_c \varepsilon_{cp} \varepsilon_{rp} \sum_{i=1}^3 \phi_i^c (b_i b_i + c_i c_i) / 4 \Delta_e. \end{aligned} \quad (22)$$

若将(21)和(22)式写成矩阵的形式则为:

$$\left( \frac{\partial J_1^c}{\partial \phi^c} \right) = [A_{1\phi}^c](\phi^c), \quad (23)$$

$$\left( \frac{\partial J_1^c}{\partial \phi^c} \right) = [A_{1\psi}^c](\phi^c), \quad (24)$$

其中,  $[A_{1\phi}^c]$  和  $[A_{1\psi}^c]$  都是  $3 \times 3$  的方阵; 它们的典型元素由(21)和(22)式知:

$$(A_{1\phi}^c)_{mn} = (b_m b_n + c_m c_n) \varepsilon_{cp} / 4 \Delta_e, \quad (25)$$

$$(A_{1\psi}^c)_{mn} = (b_m b_n + c_m c_n) \varepsilon_{cp} \varepsilon_c \varepsilon_{rp} / 4 \Delta_e, \quad (26)$$

$$(m = 1, 2, 3; n = 1, 2, 3).$$

对(13)、(14)式作类似的处理后可得:

$$\left( \frac{\partial J_2^c}{\partial \phi^c} \right) = [A_{2\phi}^c](\phi^c), \quad (27)$$

$$\left( \frac{\partial J_2^c}{\partial \phi^c} \right) = [A_{2\psi}^c](\phi^c), \quad (28)$$

$$\left( \frac{\partial J_3^c}{\partial \phi^c} \right) = [B_{\psi}^c](\phi^c), \quad (29)$$

$$\left(\frac{\partial J_3}{\partial \phi^e}\right) = [B_\phi^e](\phi^e), \quad (30)$$

式中矩阵  $[A_{2\phi}^e]$ ,  $[A_{1\phi}^e]$ ,  $[B_\phi^e]$  和  $[B_\phi^e]$  的典型元素如下列各式所示:

$$(A_{2\phi}^e)_{mn} = \varepsilon_{cp} \varepsilon_c (b_m c_n - b_n c_m) / 4\Delta_c, \quad (31)$$

$$(A_{1\phi}^e)_{mn} = \varepsilon_{cp} \varepsilon_c (c_m b_n - c_n b_m) / 4\Delta_c, \quad (32)$$

$$(B_\phi^e)_{mn} = \frac{\Delta_c}{12} (1 + \delta_{mn}), \quad (33)$$

$$(B_\phi^e)_{mn} = \frac{\Delta_c}{12} (1 + \delta_{mn}) \varepsilon_c \varepsilon_{rp}, \quad (34)$$

$$\left( \begin{matrix} m = 1, 2, 3; & n = 1, 2, 3; & \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \end{matrix} \right).$$

将(23)、(24)、(27)、(28)、(29)和(30)式合在一起就得到子域  $s_p$  内第  $e$  个面元  $\Delta_c$  对泛函  $J(\phi_p, \phi_p)$  取极值的贡献为:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial J^e}{\partial \phi_i^e}\right) &= [A_{1\phi}^e](\phi^e) + [A_{2\phi}^e](\phi^e) - \chi^2 [B_\phi^e](\phi^e) = 0, \\ \left(\frac{\partial J^e}{\partial \phi_j^e}\right) &= [A_{1\phi}^e](\phi^e) + [A_{2\phi}^e](\phi^e) - \chi^2 [B_\phi^e](\phi^e) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

设整个波导横截面  $S$  内共划分为  $K_m$  个面元, 则(19)式对子域  $p$  的求和可改写为对面元  $e$  的求和. 将(35)式代入(19)式得:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{e=1}^{K_m} ([A_{1\phi}^e](\phi^e) + [A_{2\phi}^e](\phi^e) - \chi^2 [B_\phi^e](\phi^e)) &= 0, \\ \sum_{e=1}^{K_m} ([A_{1\phi}^e](\phi^e) + [A_{2\phi}^e](\phi^e) - \chi^2 [B_\phi^e](\phi^e)) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

在根据上式对所有面元逐个累加时, 必须特别小心不同面元上介质的特性参数  $\varepsilon_{rp}$ ,  $\varepsilon_{cp}$  是不同的. 另外, 累加不同于取代, 凡是与某一点元相交的所有面元都对该点元有贡献. 全部面元按(36)式合成完毕后就得到总体矩阵  $[A]$  和  $[B]$ . 但这时的  $[A]$  和  $[B]$  还不能作最后定解的广义本征值问题的系数阵, 这是因为边界条件(10)式是强加边界条件, 因此还必须对上面得到的系数阵的元素作如下的处理:

$$A_{mn} = B_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n \text{ 但 } m \text{ 或 } n = h_K; K=1, 2, \dots, M; m, n=1, 2, \dots, 2K_n; \\ 1, & m = n, m = h_K, K = 1, 2, \dots, M; \end{cases} \quad (37)$$

上式中  $M$  表示落在金属边界  $\Omega$  上的点元数, 这些点元的编号分别为  $h_1, h_2, \dots, h_M$ ; 其中  $h_j$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ) 本身并不一定连号, 它是大于等于  $K_n + 1$ , 小于等于  $2K_n$  的任何整数.

从(36)式结合(37)式便把微分方程本征值问题最终离散化为广义代数本征值问题:

$$[A](u) = \chi^2 [B](u), \quad (38)$$

式中系数阵  $[A]$  和  $[B]$  是  $2K_n \times 2K_n$  的对称方阵; 有  $2K_n$  行的列矢量  $(u)$  与  $K_n$  行的列矢量  $(\phi)$  和  $(\psi)$  有如下关系:

$$(u) = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{K_n} \\ u_{K_n+1} \\ \vdots \\ u_{2K_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_{K_n} \\ \phi_{K_n+1} \\ \vdots \\ \phi_{2K_n} \end{pmatrix}.$$

对于(38)式可以先化为对称阵  $[p]$  的本征值问题:

$$[p](v) = \chi^2(v), \tag{39}$$

然后由本征函数  $(v)$  求出原问题的本征函数  $(u)$ . 这时解题过程即告结束 (两问题的本征值  $\chi^2$  是相等的).

有了函数  $\phi$  和  $\psi$  之后, 如需要, 将它们代入(1)和(2)式, 即可确定不同波型简正孪生波的各场分量.

由(36)式可见, 系数阵  $[A]$  和  $[B]$  是等效介电常数  $\epsilon_e$  的函数, 因此为了获得非均匀介质填充波导中孪生波的色散特性必须对(38)式求解多次, 对于每个确定的  $\epsilon_e$  值, 求得了  $\chi$  以后由(6)和(7)式即可算出  $\beta-k$  关系曲线. 不同模式孪生波的截止波长可由  $\epsilon_e=0$  时的  $\chi$  值确定.

### 三、计算实例

将上面的分析结果应用于对如图 3 所示的条形介质填充矩形波导主模场结构及其色散特性的计算以验证所述方法的正确性.

介电常数为  $\epsilon_r$  的介质插入波导后, 将矩形横截面分成三个子域 I, II 和 III. 子域 I, III 内介质的  $\epsilon_r = 1$ . 由图可见整个矩形区域共有  $KN = M \times N$  个点元, 由于每个点元

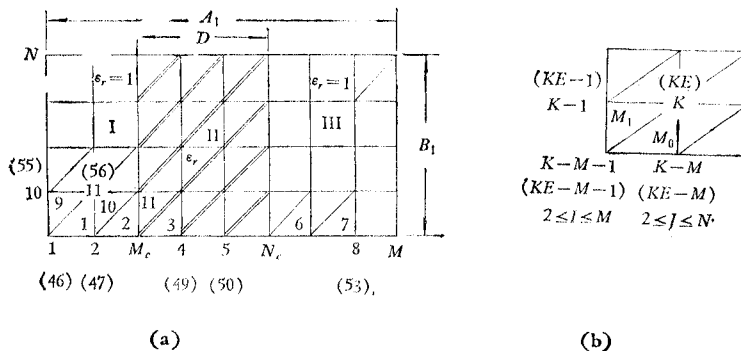


图 3  
Fig. 3

- (a) 条形介质填充矩形波导  
(a) A rectangular waveguide filled with slab dielectric
- (b) 点元标号与面元标号之间的关系  
(b) Relation between the labels of vertices and elements

需要有两个标号,故共有  $2 \times M \times N$  个标号. 标号  $K, KE$  与  $x$  和  $y$  方向的离散变量  $I, J$  有如下关系:

$$K = M \times (J - 1) + I,$$

$$KE = K + KN.$$

而面元标号与点元标号和面元三顶点编号之间满足:

$$M_0 = M \times (J - 1) + I + (M - 2) \times (J - 2) - (M + 1),$$

$$M_1 = M_0 + M - 1,$$

$$L(1, M_0) = L(1, M_1) = K - M - 1,$$

$$L(2, M_0) = K - M,$$

$$L(3, M_0) = L(2, M_1) = K,$$

$$L(3, M_1) = K - 1,$$

$$LE(1, M_0) = LE(1, M_1) = KE - M - 1,$$

$$LE(2, M_0) = KE - M,$$

$$LE(3, M_0) = LE(2, M_1) = KE,$$

$$LE(3, M_1) = KE - 1,$$

式中  $L(i, M_0)$  和  $LE(i, M_0)$  分别代表面元标号为  $M_0$  的三角形的第  $i$  个顶点的两个标号 ( $i = 1, 2, 3$ ).  $L(i, M_1)$  和  $LE(i, M_1)$  的含义类推,不赘述.

有了上列关系,根据输入的初始信息(包括剖分参量  $M, N, M_c, N_c$ ; 几何参量  $A_1, B_1, D$ ; 以及物理参量  $\varepsilon_{rp}, \varepsilon_c$ ) 确定了各点元的坐标之后,经过(20)–(35)式对每个面元的单元分析和根据(36)式对所有面元逐个累加的总体合成,便可得到系数阵  $[A]$  和  $[B]$ . 然后再按依据(37)式所编制的下列程序,对强加边界条件进行处理:

```

DO 6 I = 1, M
DO 6 J = 1, N
K = M * (J - 1) + I + KN
IF(I * EQ * 1) GOTO 10
IF(I * EQ * M) GOTO 10
IF(J * EQ * 1) GOTO 10
IF(J * EQ * N) GOTO 10
GOTO 6
10 A(K, K), D(K, K) = 1.0
DO 42 II = 1, M
DO 42 JJ = 1, N
KK = M * (JJ - 1) + II + KN
KH = KK - KN
A(K, KH), A(KH, K), D(K, KH), D(KH, K) = 0.0
IF(KK * NE * K) GOTO 43
GOTO 42
43 A(K, KK), A(KK, K), D(K, KK), D(KK, K) = 0.0

```

## 42 CONTINUE

## 6 CONTINUE

这样,便得到离散化的代数本征值问题的 $[A]$ 和 $[B]$ 矩阵. 求解广义本征值问题(38)式,从而获得孪生波的本征值 $\chi$ 和相应的本征函数. 需要说明的是,由于本文在化对称阵为对称三对角阵的 Householder 方法和求对称三角阵全部本征值和本征函数的  $QL$  方法中,充分利用了高维矩阵 $[A]$ 、 $[D]$ 上三角形或下三角形在运算过程中的空档来存放与当前运算无关的元素,待需用到这些元素时再设法调用,从而使数存单元节省约  $1/3$ ,这样对 DJS-8 机来说,在不动用扩体的情况下,点元数和面元数可分别用到 110 和 170,这无疑对提高计算精度是有利的.

计算不同  $\epsilon_c$  值下的  $\chi$  值,得到如图 4 所示的两种条形介质加载波导主模的色散特性曲线. 图 5 是第一个高次孪生波的色散特性曲线. 表 1 给出了计算值与解析值的比较,两者吻合得很好;证实了计算程序的可靠性.

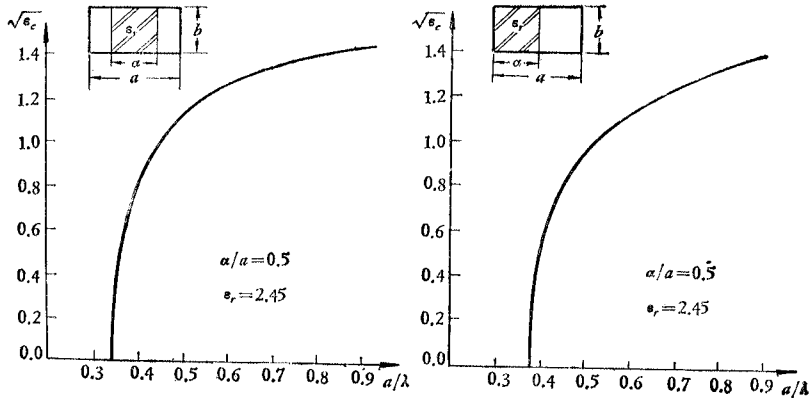


图 4 主模色散特性曲线

Fig. 4 The dispersion curves of the dominant mode

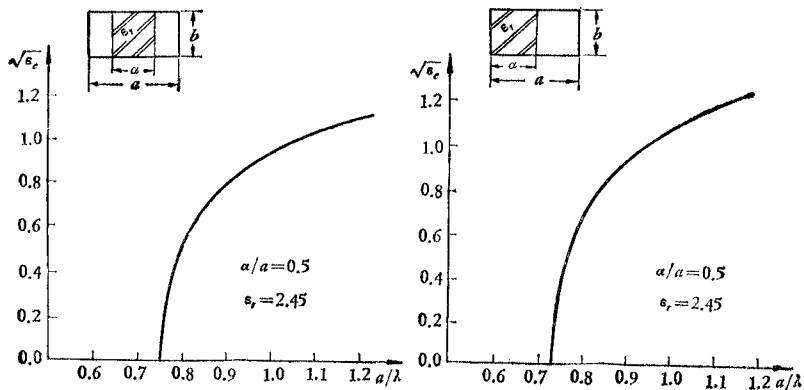


图 5 第一高次波色散特性曲线

Fig. 5 The dispersion curves of the first high order mode



表 1 孪生波主模色散特性计算值与理论值之比较

Tab. 1 A comparison of dispersion characteristics of the hybrid dominant mode between calculated and theoretical values

$\sqrt{\epsilon_c}$	$a/\lambda$					
	介质居中 ( $\alpha/a = 0.5$ )			介质靠边 ( $\alpha/a = 0.5$ )		
	计算值	解析值	误差 (%)	计算值	解析值	误差 (%)
0.00	0.3378	0.3370	0.24	0.3739	0.3737	0.08
0.40	0.3505	0.3500	0.14	0.3910	0.3908	0.05
0.80	0.4011	0.4000	0.27	0.4594	0.4559	0.77
0.95	0.4380	0.4350	0.69	0.5115	0.5105	0.20
0.99	0.4517	0.4526	0.20	0.5328	0.5340	0.23
1.10	0.4997	0.5000	0.06	0.6029	0.6000	0.49
1.20	0.5665	0.5655	0.17	0.7006	0.7000	0.09

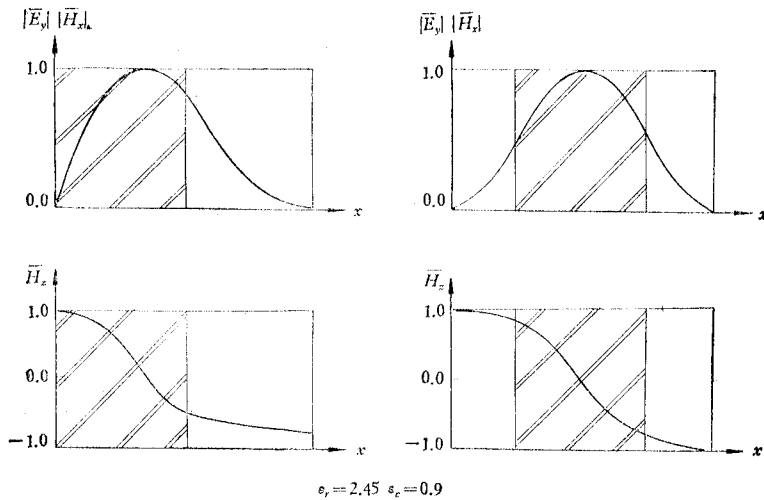


图 6 主模场强分布图

Fig. 6 Field distribution of the dominant mode

图 6 给出了条形介质加载矩形波导主模的场强分布图, 图中  $\bar{H}_z$ ,  $|\bar{E}_y|$  和  $|\bar{H}_x|$  都是对其本身的最大值归一的. 计算表明, 整个波导横截面上  $E_z = 0$ , 从而  $E_x, H_y$  均为零, 而且所有场强分量与坐标  $y$  无关, 这正是  $H_{m0}$  波所具有的特性. 由此可知条形介质加载矩形波导的主模孪生波实际上已退化成  $H_{10}$  波; 它的第一个高次波实际上就是  $H_{20}$  波, 这个事实与文献[3]的结论是一致的.

#### 四、讨 论

求解非均匀介质填充波导本征值问题的困难在于电磁场在各个介质分界面上的耦合, 这种耦合使本征波成为既有纵向电场又有纵向磁场的孪生波. 为了确定这些孪生波必须同时求解函数  $\phi$  和  $\psi$ . 再加上如果波导横截面和填充介质的形状比较复杂, 就会使

问题变得相当困难. 当用有限元法求解这类问题时, 复杂的边界形状和物理参数分布, 正好能充分发挥该种方法的优势, 从而使解题效率提高.

对于均匀介质填充的波导,  $\psi$  和  $\phi$  间的耦合消失, 即 (13) 式为零, 这时波导中将分别存在电波和磁波. 同样, 如果波导中的场在横截面某个坐标方向的导数为零, 那么不论介质是否均匀, 这时 (13) 式也为零, 于是本征波就从孪生波退化为互不耦合的电波和磁波. 本文所举的实际例子正是属于这种情况. 事实上, 如果直接求解与磁波本征值问题等价的泛函的变分问题 (40) 式

$$J(\phi) = \sum_p \left[ \frac{1}{2} \epsilon_{ep} \int_{s_p} |\nabla_t \phi_p|^2 ds_p - \frac{\chi^2}{2} \int_{s_p} |\phi_p|^2 ds_p \right], \quad (40)$$

同样可以得到上节给出的有关  $H_{10}$  波的场强分布和色散特性的具体结果.

在求解非均匀介质填充波导的本征值问题时, 本征波及其本征值不仅与波导的几何特性有关而且还与等效介电常数  $\epsilon_e$  有关, 对于不同的  $\epsilon_e$  值即使其它条件完全一样, 所得本征波的场强分布和色散特性也各不相同, 因此为了获得某个本征波的色散特性必须按不同的  $\epsilon_e$  值对 (38) 式求解多次.

应用本文的有关公式和程序可以求解结构更为复杂的非均匀介质填充波导的本征值问题, 例如对广泛用于平面立体电路中的介质鱼鳍线色散特性的计算等.

本文承蒙石钟慈教授审阅并提出宝贵意见, 深致谢意.

### 参 考 文 献

- [1] S. Ahmed, *Electronics Letters*, 4(1968), 387.
- [2] N. Marcuvitz, *Waveguide handbook, Rad. Lab. Series*, Vol. 10, 1948.
- [3] Wei-gan Lin, *IEEE on MTT*, MTT-28(1980), 339.
- [4] 徐善驾, *电子学报*, 10(1982), 39.
- [5] 徐善驾, *电子学通讯*, 4(1982), 222.

## THE FINITE-ELEMENT ANALYSIS OF EIGENVALUE PROBLEM OF WAVEGUIDES FILLED WITH INHOMOGENEOUS DIELECTRICS

Xu Shan-jia

(China University of Science and Technology)

The concrete procedure using finite-element method to solve the eigenvalue problem of waveguides filled with inhomogeneous dielectrics is discussed. The relative formula and programs are given. For an example, the field structure analysis and calculation of the dispersion feature for dominant mode of the dielectric slab loaded rectangular waveguide have been completed. The rather consistent results with analytical solution are obtained and the reliability of the programs is verified.