非线性规划神经网络模型 [1]

陶 卿 曹进德 * 方廷健

(中国科学院合肥智能机械研究所 合肥 230031)

*(云南大学成人教育学院 昆明 650091)

摘 要 本文提出一种求解闭凸集上非线性规划问题的神经网络模型，给出了它的 Liapunov 函数，在适当的假设下，运用 La Salle 不变性原理证明了它的大范围渐近稳定性，并给出了计算机模拟.

关键词 非线性规划，神经网络模型，大范围渐近稳定性

中图号 TN-052

1 引 言

自从 Hopfield 提出利用神经网络模型求解优化问题后 [1]，各种求解非线性规划问题的神经网络模型层出不穷。但对约束优化问题，大多采用传统的罚函数方法将问题无约束化。正如文献 [2] 所指出的，由于网络中罚因子的存在，不仅不能使网络求得精确解，还会导致电路无法实现，目前这种方法已渐被淘汰。文献 [2] 在求解二次规划问题方面取得了很大的进展，设计出不含罚因子、大范围收敛于规划问题精确解集的神经网络模型，并给出了电路实现。文献 [3] 将文献 [2] 的结果作了进一步的推广，但它们考虑的仅仅是二次规划问题.

本文提出一种求解闭凸集上非线性规划问题的神经网络模型，在比较适当的假设下，巧妙构造这种连续动力系统的 Liapunov 能量函数，运用 La Salle 不变性原理进行动态分析。理论分析表明本文提出的神经网络是大范围渐近稳定的，并且在约束区域的内部，它使目标函数单调下降，计算机模拟的结果也说明了这一点。应该指出的是，文献 [2] 和文献 [3] 中的模型对非线性规划问题是不适用的，即使对二次规划问题，本文的网络也比文献 [3] 的模型简单，从而使网络实现更经济。我们同时还考虑了网络的收敛速率。

2 非线性规划问题

考虑下述非线性规划问题:

$$\left.\begin{aligned} \min f(x), \\ \text{subject to } x \in Q, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中 $f: R^m \to R,\ Q \subset R^m$ 是闭凸集， $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^T$ ，以下记 $\|x\|$ 表示 x 的欧几里德范数.

假设 1 $f: R^m \to R$ 二阶连续可微，并且存在常数 $c \geq 0$ ，使

$$h^T f''(x)h \geq c\|h\|^2, \quad \forall x, h \in R^m.$$

[1] 1998-07-09 收到， 1999-05-20 定稿

注：当 $f(x)=(1/2)x^TAx+a^Tx$, A 半正定时，假设 1 显然成立。以下假定 $f(x)$ 满足假设 1，且非线性规划问题 (1) 式的解集非空。

引理 1[4] 对 $\forall x\in R^m$, 存在唯一一点 $P(x)$，满足 $\|x-P(x)\|=\inf_{y\in Q}\|x-y\|$；称 P 为 Q 上的投影算子，且 $\|P(x)-P(y)\|\le\|x-y\|, \forall x,y\in R^m$。

引理 2[4] 对 $\forall\tilde{x}\in R^m$, $x_0\in Q$，则 $<\tilde{x}-x_0,x-x_0>\le 0, \forall x\in Q$ 的充要条件是 $x_0=P(\tilde{x})$。

引理 3 x^* 是规划问题 (1) 式的解的充要条件是 $<f'(x^*),x-x^*>\ge 0, \forall x\in Q$。

证明 类似于文献 [3] 引理 3 的证明。

定理 1 x^* 是规划问题 (1) 式的解的充要条件是 $x^*=P(x^*-f'(x^*))$。

证明 类似于文献 [3] 定理 2 的证明。

3 神经网络模型及其动态分析

我们提出以下连续的神经网络模型来求解非线性规划问题 (1) 式：

$$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=P(x-f'(x))-x. \tag{2}$$

定理 2 设 x^* 是非线性规划问题 (1) 式的一个解，令 $V(x)=f(x)-f(x^*)-<f'(x^*),x-x^*>+(1/2)\|x-x^*\|^2$，则 $\dot{V}(x)\le -c\|x-x^*\|^2-\|x-P(x-f'(x))\|^2$。

证明

$$\begin{aligned}\dot{V}(x)&=<f'(x)-f'(x^*),\mathrm{d}x/\mathrm{d}t>+<x-x^*,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t>\\&=<f'(x)-f'(x^*),P(x-f'(x))-x>\\&\quad+<x-x^*,P(x-f'(x))-x>,<f'(x)-f'(x^*),P(x-f'(x)-x)>\\&=<f'(x)-f'(x^*),P(x-f'(x))-x^*+x^*-x>\\&=<f'(x)-f'(x^*),x^*-x>+<f'(x),P(x-f'(x))-x^*>\\&\quad-<f'(x^*),P(x-f'(x))-x^*>,\end{aligned} \tag{3}$$

而

$$\begin{aligned}<f'(x),P(x-f'(x))-x^*>&=<f'(x)-x+P(x-f'(x)),P(x-f'(x))-x^*>\\&\quad+<x-P(x-f'(x)),P(x-f'(x))-x^*>\\&=<P(x-f'(x))-(x-f'(x)),P(x-f'(x))-x^*>\\&\quad+<x-P(x-f'(x)),P(x-f'(x))-x>\\&\quad+<x-P(x-f'(x)),x-x^*>.\end{aligned}$$

根据 (3) 式，$\dot{V}(x)=<f'(x)-f'(x^*),x^*-x>-<f'(x^*),P(x-f'(x))-x^*>+<P(x-f'(x))-(x-f'(x)),P(x-f'(x))-x^*>-\|x-P(x-f'(x))\|^2$。根据引理 2 和引理 3，$\dot{V}(x)\le -c\|x-x^*\|^2-\|x-P(x-f'(x))\|^2$。 证毕

定理 3 设 $f(x)$ 满足假设 1，则神经网络模型 (2) 式大范围渐近收敛于非线性规划问题 (1) 式的解集。

证明 $\forall x_0 \in R^m$, 设 $x(t)$ 是以 x_0 为初值的解，其最大存在区间为 $[0, \beta(x_0))$, x^* 是非线性规划问题 (1) 式的一个解，令 $G = \{x : V(x) \leq f(x_0) - f(x^*) - < f'(x^*), x_0 - x^* > +(1/2)\|x_0 - x^*\|^2, x \in R^m\}$ 。根据定理 2 ， $V(x)$ 是 G 上 (2) 式的 Liapunov 函数 [5] ，且 $x(t) \in G$ 。根据 Taylor 公式，存在 $\xi \in R^m$, 使

$$\begin{aligned} V(x) &= f(x) - f(x^*) - < f'(x^*), x - x^* > +(1/2)\|x - x^*\|^2 \\ &= < x - x^*, f''(\xi)(x - x^*) > +(1/2)\|x - x^*\|^2 \geq c\|x - x^*\|^2 + (1/2)\|x - x^*\|^2, \end{aligned} \quad (4)$$

由此 G 为有界集。根据常微分方程解的存在性理论 [6] ， $\beta(x_0) = +\infty$ 。根据 LaSalle 不变性原理 [5] ，存在常数 r ，使 $x(t) \to M \cap V^{-1}(r)$ ，其中 M 是 $E = \{x : \dot{V}(x) = 0, x \in \overline{G}\}$ 的最大不变集 [5] 。再根据定理 2 和定理 1 ， M 中的每一个点都是非线性规划问题 (1) 式的一个解。由 x_0 的任意性，定理得证。 证毕

注 1：当规划问题 (1) 式没有约束，即 P 为恒等算子时，模型 (2) 式是经典的最速下降流线方程 [6] 。

注 2：对二次规划问题，文献 [3] 对文献 [2] 作了推广和简化，其模型为

$$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = (I + f''(x))(P(x - f'(x))).$$

当 $f(x)$ 是二次泛函时，本文不仅可得到文献 [3] 的全部结果，而且模型更为简捷，因而网络实现更经济。

对网络的收敛速率问题，我们有

定理 4 若存在常数 $c_1 \succ 0$ 和 $c_2 \succ 0$ ，使 $c_2\|h\|^2 \geq h^T f''(x)h \geq c_1\|h\|^2, \forall x, h \in R^m$ 。则存在 $c^* \succ 0$ ，使 $\|x(t) - x^*\| = o(e^{-c^*t})$ 。

证明 根据定理 2 ， $\dot{V}(x) \leq -c_1\|x - x^*\|^2$ 。根据 (4) 式， $V(x) \leq c_2\|x - x^*\|^2 + (1/2)\|x - x^*\|^2$ 。令 $c^* = (2c_1)/(c_2 + 1)$, $\mathrm{d}/(e^{c^*t}V(x(t)))/\mathrm{d}t = e^{c^*t}(\dot{V}(x(t)) + c^*V(x(t))) \leq 0$ 。故 $e^{c^*t}V(x(t))$ 是 $0 \leq t \prec +\infty$ 上的减函数，因此 $(1/2)\|x(t) - x^*\|^2 \leq V(x(t)) \leq V(x(0))e^{-c^*t}$ ，得证。 证毕

下面研究神经网络模型 (2) 式在约束区域内的行为。

引理 4[8] 对 $\forall x, y \in R^n$ ，有 $< P(x) - P(y), x - y > \geq \|P(x) - P(y)\|^2$ 。

定理 5 $f(x)$ 沿系统 (2) 式位于 Q 中的轨道 $x(t)$ 单调递减。

证明

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(x(t))/\mathrm{d}t &= < f'(x(t)), P(x(t) - f'(x(t))) - x(t) > \\ &= - < x(t) - f'(x(t)) - x(t), P(x(t) - f'(x(t))) - P(x(t)) > . \end{aligned}$$

根据引理 4 ， $\mathrm{d}f(x(t))/\mathrm{d}t \leq -\|P(x(t) - f'(x(t))) - x(t)\|^2 \leq 0$ ，即 $f(x)$ 沿 $x(t)$ 单调递减。 证毕

注：结合定理 3 的注 2 ，模型 (2) 式是最速下降流线方程 [6] 的推广。

4 神经网络的实现

神经网络模型 (2) 式可由框图 1 实现：

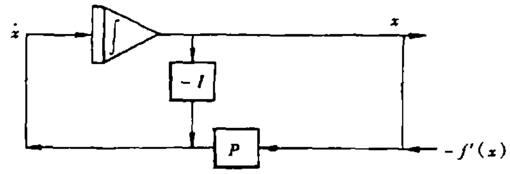

图 1 神经网络的实现框图

当 Q 为超闭正方体，如 $Q=[0,1]^m$ 时， $P(x)$ 的第 i 个分量为

$$(P(x))_i=\begin{cases}0, & x_i \prec 0;\\ x_i, & 0\le x_i\le 1;\\ 1, & x_i \succ 1.\end{cases}$$

此时投影算子 P 容易由电路实现。当 $Q=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^T: Dx=b, x_i\ge 0, i=1,2,\cdots m\}$ 时， x_0 的投影 $P(x_0)$ 是下述标准二次规划问题的解:

$$\min(1/2)\|x-x_0\|^2,\quad \text{subject to } Dx=b,\quad x_i\ge 0,\quad i=1,2,\cdots,m.$$

于是投影算子 P 在每一点处的值可由文献 [2] 中的神经网络求得，且可由电路实现 [2] 。

5 计算机模拟

我们在 PC 机上用四阶龙格 - 库塔法模拟了由 (2) 式确定的解非线性规划问题 (1) 式的神经网络方法。

例 1 考虑下述二次规划的扰动问题:

$$\min f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\begin{pmatrix}\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{2}\end{pmatrix}\right)^T\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}\left(x+\begin{pmatrix}\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{2}\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}\sin x_1\\ \sin x_2\end{pmatrix},$$
$$\text{subject to } 0\le x_i,\quad i=1,2.$$

易知其理论解为 $(0,0)$ ，并且 $h^Tf''(x)h\ge 2\|h\|^2, \forall x\in R^2, \forall h\in R^2$ 。取 $\Delta t=10^{-3}$ 单位时间，模拟时间 $t=10$ 单位时间。当取初值为 $(0,0)$ ，模拟结果为 $(0.000000, 0.000000)$ ，当任取初值为 $(1000,2000)$, 模拟结果仍为 $(0.000000, 0.000000)$ 。

例 2 考虑下述非线性规划问题 (取自文献 [9])

$$\min f(x)=0.4x_2+x_1^2+x_2^2-x_1x_2+\frac{1}{30}x_1^3,$$
$$\text{subject to } x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_1+0.5x_2\ge 0.4, 0.5x_1+x_2\ge 0.5.$$

当 $x_1\ge 0, x_2\ge 0$ 时，对 $\forall h\in R^2, h^Tf''(x)h\ge\|h\|^2$ 。由模型 (2) 式和投影算子的性质可知，当初值满足约束 $x_1\ge 0, x_2\ge 0$ 时， (2) 式的解轨道也满足此约束，因此第 3 节的理论局限于约束区域内仍然成立。添加两个松弛变量将本例后两个不等式约束转化为等式约束后，用文献 [2] 中的神经网络求得投影算子。取两个神经网络的初值都为 0 ，步长为 10^{-3} 单位时间，模拟时间为 10 单位时间，得模拟结果为 $(0.339521, 0.330239)$ 。文献 [9] 提供的理论解为 $(0.3395, 0.3302)$ ，可见模拟结果与理论解非常接近。

以上模拟结果表明本文的理论是正确的。

6 结束语

本文设计出一种不含罚因子的神经网络模型用于求解约束的非线性规划问题，定义了它的 Liapunov 能量函数，理论分析和计算机模拟都表明本文的神经网络模型是大范围渐近收敛的. 本文的假设比较宽松合理，模型也简单。作者正在考虑将文献 [2] 的结果完整推广至本文的非线性规划问题.

参 考 文 献

[1] Tank D W, Hopfield J J. Simple "neural" optimization networks. IEEE Trans. on CAS, 1986, CAS-33(5): 533-541.

[2] Xia Y. A new neural network for solving linear and quadratic problems. IEEE Trans. on NN, 1996, NN-7(6): 1544-1547.

[3] 陶卿，王常波，方廷健. 一种求解闭凸集上二次规划问题的神经网络型. 模式识别与人工智能, 1998, 11(1): 83-87.

[4] 张学铭，李训经，陈祖浩. 最优控制系统的常微分方程理论. 北京：高等教育出版社, 1989, 50-201.

[5] La Salle J P. The Stability of Dynamical Systems. Philadelphia, PA: SLAM, 1976, 20-40.

[6] 郭大均. 非线性泛函分析. 济南：山东科技出版社, 1985, 437-460.

[7] 焦李成. 神经网络计算. 西安：西安电子科技大学出版社, 1995, 105-295.

[8] 张石生. 变分不等式及其应用. 北京：科学出版社, 1990, 100-120.

[9] Kennedy M P, Chua L O. Neural networks for nonlinear programming. IEEE Trans. on CAS, 1988, CAS-35(5): 554-562.

THE NEURAL NETWORK MODEL FOR NONLINEAR PROGRAMMING PROBLEMS

Tao Qing Cao Jinde* Fang Tingjian

(*Hefei Institute of Intelligent Machines, Academia Sinica, HeFei* 230031)

*(*Adult Education College, Yunnan University, Kunmin* 650091)

Abstract This paper presents a kind of neural network model for nonlinear programming problems on the closed convex sets, defines its Liapunov energy function and shows its global asymptotic stability by using La Salle invariant principle under proper assumptions. Finally, the simulations are given to illustrate the correctness of proposed model.

Key words Nonlinear programming problems, Neural network models, Global asymptotic stability

陶 卿： 男，1965 年生，博士生，研究方向为智能信息处理.

曹进德： 男，1963 年生，博士，教授，研究方向为非线性系统理论、神经网络理论和混沌理论.

方廷健： 男，1939 年生，研究员，博士生导师，研究方向为智能信息处理.