细胞神经网络的全局指数稳定性 [1]

张 强 许 进

(西安电子科技大学电子工程研究所 西安 710071)

摘 要 本文研究了细胞神经网络的全局指数稳定性问题，运用 Lyapunov 函数法和不等式的分析技巧给出了细胞神经网络全局指数稳定的三个判据.

关键词 细胞神经网络，全局指数稳定性， Lyapunov 函数

中图号 TN-052

1 引 言

自从 L.O.Chua 和 L.Yang[1] 提出细胞神经网络 (CNN) 的理论以来，由于其良好的应用前景， CNN 现在已经成为神经网络研究的新热点. 目前， CNN 已被用于模式识别，图像处理等领域. 然而，这些工程应用极大地依赖于 CNN 的动态行为. 因此，研究 CNN 的动态行为 (例如，稳定性，振荡以及混沌等) 对于 CNN 的硬件设计具有重要的指导作用. 在某些应用中 (例如优化)，我们期望系统具有唯一的一个全局渐近稳定的平衡点. 但是，为了保证系统有快的收敛速度，实际中指数稳定性更有意义. 在文献 [2] 及其所附文献中，研究了神经网络的局部指数稳定性问题. 应该指出，由于非线性系统的局部指数稳定性与其线性化系统的稳定性等价 [3]，因此，动态神经网络的局部指数稳定性一般容易获得. 本文正是基于此研究了 CNN 的全局指数稳定性问题，获得了三个充分条件.

2 全局指数稳定性分析

CNN 可由下述的一阶非线性自治系统描述:

$$\dot{x}_i(t) = -x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j(t)) + I_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{1}$$

其中 $f_j : R \mapsto R,\ j = 1, 2, \cdots, n$ 满足:

(1) $f_j(x_j)$ 在 R 上全局 Lipschitz 连续, 即存在一个正常数 $M_j > 0$, 使得对所有的 $x_1, x_2 \in R$, 有: $|f_j(x_1) - f_j(x_2)| \le M_j |x_1 - x_2|$;

(2) $f_j(x_j)$ 在 R 上单调非降且有界.

显然， Sigmoid 函数和分段线性 (PWL) 函数一般均满足上述假设.

引理 1[4] CNN(1) 的平衡点集非空.

根据引理 1，设 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ 为 CNN(1) 的平衡点，令 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T, z = (z_1, z_2, \cdots, z_n)^T, z = x - x^*, g_i(z_i) = f_i(z_i + x_i^*) - f_i(x_i^*), i = 1, 2, \cdots, n$. 则 (1) 式成为

$$\dot{z}_i(t) = -z_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j(z_j), \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{2}$$

[1] 1998-09-02 收到， 1999-05-14 定稿
国家自然科学基金资助项目

显然，(1) 式的平衡点的稳定性与 (2) 式 $z=0$ 的稳定性等价．因此，只需研究 (2) 式 $z=0$ 处的稳定性即可．

由 $f_i(x_i)$ 的假设及 $g_i(z_i)$ 的定义知：

$$|g_i(z_i)| \le M_i|z_i|, \quad z_i \in R, \tag{3}$$

$$z_i g_i(z_i) \ge 0, \quad z_i \in R. \tag{4}$$

进而，由 (3) 式，(4) 式知：

$$z_i g_i(z_i) \le M_i z_i^2, \quad z_i \in R. \tag{5}$$

在进行分析之前，先给出与本文相关的定义和引理．

定义　如果 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 的主对角线外的元素非正，且 A^{-1} 为非负矩阵，即 $a_{ij}\le 0,(i\ne j), A^{-1}\ge 0$, 则称 A 为 M 矩阵．

引理 2[5]　M 矩阵的主对角线的元素必为正值．

引理 3[5]　n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 为 M 矩阵的充要条件是下列结论之一成立：

(1) 存在正常数 η_j，$j=1,2,\cdots,n$, 使得

$$\sum_{j=1}^{n}\eta_j a_{ij} > 0, \quad i=1,2,\cdots,n.$$

(2) 存在正常数 λ_j，$j=1,2,\cdots,n$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_{ij} > 0, \quad j=1,2,\cdots,n.$$

(3) $a_{ij}\le 0, i\ne j, i,j=1,2,\cdots,n$, 且存在对角矩阵 $D=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n), d_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$ 使得 $B=DA+A^TD$ 为正定矩阵．

定理 1　CNN(2) 的平衡点 $z=0$ 是全局指数稳定的，若存在一组正数 $p_i>0$ 及一组非负数 $d_i\ge 0, i=1,2,\cdots,n$, 使得矩阵 $R=[r_{ij}]_{n\times n}$, 满足 $\lambda_{\max}((R+R^T)/2)<0$, 其中 r_{ij} 定义为

$$r_{ij}=\begin{cases} -p_i + a_{ii}^{+}M_i(p_i+d_iM_i), & i=j; \\ M_j|a_{ij}|(p_i+d_iM_i), & i\ne j; \end{cases}$$

$a_{ii}^{+}=\max\{a_{ii},0\}$,$\lambda_{\max}(\ )$ 表示矩阵的最大特征值，R^T 表示矩阵 R 的转置．

证明　令 $V(z)=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{2}p_iz_i^2+\sum\limits_{i=1}^{n}d_i\int\limits_{0}^{z_i}g_i(\rho)d\rho$, 显然，$V(z)$ 是正定且径向无界的．

$$\begin{aligned}\dot V(z)|_{(2)} &= \left[\sum_{i=1}^{n}p_iz_i+\sum_{i=1}^{n}d_ig_i(z_i)\right]\left[-z_i+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}g_j(z_j)\right] \\ &= -\sum_{i=1}^{n}p_iz_i^2-\sum_{i=1}^{n}d_iz_ig_i(z_i)+\sum_{i,j=1}^{n}[p_iz_ia_{ij}g_j(z_j)+d_ia_{ij}g_j(z_j)g_i(z_i)]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq -\sum_{i=1}^{n} p_i z_i^2 + \sum_{i=1}^{n} p_i z_i a_{ii} g_i(z_i) + \sum_{i=1}^{n} d_i a_{ii} g_i(z_i)^2 \\
&\quad + \sum_{1\leq i\neq j\leq n} [p_i z_i a_{ij} g_j(z_j) + d_i a_{ij} g_j(z_j) g_i(z_i)] \\
&\leq -\sum_{i=1}^{n} p_i z_i^2 + \sum_{i=1}^{n} [(p_i + d_i M_i) M_i] a_{ii}^{+} z_i^2 + \sum_{1\leq i\neq j\leq n} [p_i |a_{ij}| |z_i g_j(z_j)| \\
&\quad + \sum_{1\leq i\neq j\leq n} d_i |a_{ij}| |g_i(z_i) g_j(z_j)|] \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} [-p_i + M_i(p_i + d_i M_i) a_{ii}^{+}] z_i^2 + \sum_{1\leq i\neq j\leq n} (p_i + d_i M_i) M_j |a_{ij}| |z_i z_j| \\
&= |z|^T R |z|,
\end{aligned}
$$

其中 $|z| = (|z_1|, |z_2|, \cdots, |z_n|)^T$. 又 $|z|^T R|z| \leq \lambda_{\max}((R+R^T)/2) z^T z$. 因此, 只要 $\lambda_{max}((R+R^T)/2) < 0$, 根据全局指数稳定性判据知, CNN(2) 的平衡点是全局指数稳定的.

注 由于矩阵 $R+R^T$ 是对称矩阵, 因此定理 1 的条件等价于 $R+R^T$ 负定.

定理 2 若矩阵 $T = [T_{ij}]_{n\times n}$, 其中 $T_{ij} = \begin{cases} 1 - a_{ii} M_i, & i = j; \\ -|a_{ij}| M_j, & i \neq j \end{cases}$ 是 M 矩阵, 则 CNN(2) 是全局指数稳定的.

证明 若矩阵 T 是 M 矩阵, 则据引理 3 知, 存在一组正常数 $p_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$, 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i T_{ij} > 0, j = 1, 2, \cdots, n$, 即有

$$
p_j(a_{jj} M_j - 1) + \sum_{1\leq i\neq j\leq n} p_i |a_{ij}| M_j < 0. \tag{6}
$$

令 $V(z) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i |z_i|$, 显然, $V(z)$ 正定且径向无界.

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(z)|_{(2)} &= \sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{sgn} z_i (-z_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j(z_j)) \\
&= -\sum_{j=1}^{n} [p_j |z_j| + p_j a_{jj} |g_j(z_j)|] + \sum_{i\neq j} p_i a_{ij} sgn z_i g_j(z_j) \\
&\leq -\sum_{j=1}^{n} p_j |z_j| + \sum_{j=1}^{n} [p_j a_{jj} + \sum_{i\neq j} p_i |a_{ij}|] |g_j(z_j)| \\
&\leq -\sum_{j=1}^{n} p_j |z_j| + \sum_{j=1}^{n} [p_j a_{jj} M_j + \sum_{i\neq j} p_i M_j |a_{ij}|]^{+} |z_j| \\
&= -\sum_{j=1}^{n} [p_j - (p_j a_{jj} M_j + \sum_{i\neq j} p_i M_j |a_{ij}|)^{+}] |z_j|.
\end{aligned}
$$

由 (6) 式可知, $p_j - (p_j a_{jj} M_j + \sum\limits_{i\neq j} p_i M_j |a_{ij}|)^{+}$ 必为正.不妨设它为 $p_j - (p_j a_{jj} M_j + \sum\limits_{i\neq j} p_i M_j |a_{ij}|)^{+}$

$= kp_j, k > 0$, 因此有

$$\dot{V}(z)|_{(2)} \leq -\sum_{j=1}^{n} kp_j|z_j| = -kV(z).$$

所以根据全局指数稳定性的判据知， CNN(2) 是全局指数稳定的.

推论　若下列之一得到满足：

(1) $\max_{1\leq j\leq n}\{a_{jj}M_j + \sum\limits_{i\neq j}|a_{ij}|M_j\} < 1$;

(2) $\max_{1\leq i\leq n}\{a_{ii}M_i + \sum\limits_{i\neq j}|a_{ij}|M_j\} < 1$;

(3) $\max_{1\leq i\leq n}\{a_{ii}M_i + \frac{1}{2}\sum\limits_{i\neq j}(|a_{ij}|M_j + |a_{ji}|M_i)\} < 1$;

则 CNN(2) 全局指数稳定.

注　定理 2 推广了文献 [6-8] 中相应的结论. 实际上，令上述推论中的 $M_i = 1, i = 1, 2, \cdots, n$, 则推论 (1) 式， (2) 式分别成为文献 [6] 中的定理 3 及文献 [7] 中的定理 3 ，定理 4 .

定理 3　若存在一个正定矩阵 P 及一个正常数 $\lambda > 0$, 使得矩阵 $-2P + PAF(z) + F(z)A^TP + \lambda I, \forall z \in R^n$ 负定，则 CNN(2) 全局指数稳定，其中 $F(z)=\mathrm{diag}(g_1(z_1)/z_1, g_2(z_2)/z_2, \cdots, g_n(z_n)/z_n)$.

证明　令 $V(z) = z^TPz$, 显然， $V(z)$ 正定且径向无界.

$$\begin{aligned}\dot{V}(z)|_{(2)} &= 2z^TP(-z + AG(z)) = -2z^TPz + 2z^TPAG(z)\\ &= -2z^TPz + z^TPAF(z)z + z^TF(z)A^TPz\\ &= z^T(-2P + PAF(z) + F(z)A^TP)z.\end{aligned}$$

若存在某个正数 $\lambda > 0$, 使得 $\dot{V}(z)|_{(2)} \leq -\lambda z^Tz$, 则 CNN(2) 全局指数稳定；亦即若 $-2P + PAF(z) + F(z)A^TP + \lambda I, \forall z \in R^n$ 负定，则 CNN(2) 全局指数稳定.

3 应用与举例

本文给出了细胞神经网络全局指数稳定的三个充分条件，然而在实际中这些条件却很难直接应用. 由文献 [1] 知， CNN 方程 (2) 式中的元素 a_{ij} 所构成的矩阵 $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ 可由 CNN 的模板 $A(i,j;k,l)$ 决定. 若将 $n = M \times N$ 个细胞单元排列成 $M \times N$ 的矩阵形式，其中第 (i,j) 位置上的细胞用 $C(i,j)$ 表示，则模板 $A(i,j;k,l)$ 表征细胞 $C(i,j)$ 与细胞 $C(k,l)$ 之间的连接强度. 实际应用中， CNN 的设计就是其模板的设计. 因此，将有关稳定性的结论转化为模板应满足的条件，就可以用于设计了. 根据文献 [9,10], 相应于本文中的三个充分条件的模板所满足的条件不难求得，这里省略. 下面给出一个例子.

例　设具有两个细胞的 CNN 的方程如下：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + \frac{1}{3}f_1(x_1) - \frac{1}{6}f_2(x_2) + I_1,\\ \dot{x}_2 &= -x_2 + \frac{1}{12}f_1(x_1) + \frac{1}{3}f_2(x_2) + I_2,\end{aligned}$$

其中， f 是分段线性函数. 不难验证，上述方程满足定理 1 的条件，使用四阶龙格 - 库塔法仿真表明，结果正确.

4 结 论

神经网络的稳定性是神经网络系统应用于实践中应首先考虑的问题。自 CNN 模型提出以来，有关的理论及应用的研究大量涌现出来。其中，理论研究主要集中于稳定性方面。本文分析了研究 CNN 全局指数稳定的必要性，并且运用 Lyapunov 函数法给出了保证 CNN 全局指数稳定的三个条件，这对于其硬件实现具有一定的指导意义。

参 考 文 献

[1] Chua L O, Yang L. Cellular neural networks: Theory and applications. IEEE Trans. on Circuits and Syst. 1988, CAS-35(10): 1257-1290.

[2] 梁学斌，吴立德. 连续反馈联想记忆的吸引域和指数收敛速度的估计及其应用. 电子科学学刊，1996, 18(1): 1-6.

[3] Khalil K. Nonlinear Systems. New York: Macmillan, 1992, 128.

[4] 廖晓昕. 细胞神经网络的数学理论 (I). 中国科学，A 辑，1994, 24(9): 902-910.

[5] Michel A N, Miller R K. Qualitative Analysis of Large Scale Dynamical Systems. New York: Academic Press, 1977, 46-48.

[6] 梁学斌，吴立德. 非线性神经网络全局指数稳定性分析及吸引域和模式恢复估计. 复旦学报 (自然科学版), 1995, 34(3): 311-319.

[7] 梁学斌，吴立德. Hopfield 型神经网络的全局指数稳定性及其应用. 中国科学，A 辑，1995, 25(5): 523-532.

[8] 廖晓昕. Hopfield 型神经网络的稳定性. 中国科学，A 辑，1993, 23(10): 1025-1035.

[9] Chua L O, Roska T. Stability of a class of nonreciprocal cellular neural networks. IEEE Trans. on Circuits and Syst. 1990, 37(12): 1520-1527.

[10] Gilli M. Stability of cellular neural networks and delayed cellular neural networks with nonpositive templates and nonmonotonic output functions. IEEE Trans. on Circuits and Syst. 1994, 41(8): 518-528.

GLOBAL EXPONENTIAL STABILITY OF CELLULAR NEURAL NETWORKS

Zhang Qiang Xu Jin

(*Electronic Engineering Research Institute, Xidian University, Xi'an* 710071)

Abstract This paper studies the problem of global exponential stability for the cellular neural networks. Three criterions about global exponential stability of the cellular neural networks are obtained by means of Lyapunov function approach and the method of inequality analysis.

Key words Cellular neural networks, Global exponential stability, Lyapunov function

张 强： 男，1971 年生，博士生，研究方向：电路与系统，神经网络，信号处理.

许 进： 男，1959 年生，理学、工学双博士，教授，博士生导师；研究方向：电路与系统，神经网络，图论，遗传算法.