

# 加权阵列天线的设计方法—— 马尔柯夫链法

李世宽      刘瑞祥

(大连电子研究所,大连)      (北京理工大学,北京)

**摘要** 加权阵列天线的设计目前主要采用统计法。本文通过总结统计法的优缺点,提出了一个新方法——马尔柯夫链法。新方法采用将阵列分成若干个区的方式,反映了在阵列的不同部分,单元相关性不同这一特性,改变了以前设计加权天线时笼统地考虑整个阵列上的单元排列。应用随机过程的马尔柯夫链特性,得到了各个随机量处于不同状态的概率。由于马尔柯夫链法反映了实际低副瓣天线的口径分布,因而利用此种方法更容易得到低副瓣的加权阵列天线。

**关键词** 加权阵列天线;改进的统计法;马尔柯夫链;计算机辅助设计

## 一、引 言

随着相控阵天线的发展,到目前为止,已经提出了三种可供应用的阵列形式:密度加权阵列、随机阵列和相位加权阵列。这三种阵列在降低最大副瓣电平、减少有源单元和移相器数目、减少发射机种类等方面都起了很大作用。

目前,密度加权阵列和相位加权阵列天线的设计主要采用统计法。但实际应用表明,统计法不易找到一个好的密度加权阵列或相位加权阵列。统计法之所以不易找到一个好的加权阵列形式,是因为统计法本身是一个概率问题。它是以参考阵的幅度分布作为密度加权阵单元幅度或相位加权阵单元相位的概率分布函数的。而确定单元幅度或相位的随机量是相互独立的,这样做是不符合实际情况的。以密度加权阵为例,任何一个低副瓣的密度加权阵列,单元分布总是中间密边缘疏。这意味着,对于阵列中心部分的单元幅度,如果一个栅格点上没有单元(单元幅度为 0),那么相邻栅格点上有单元(单元幅度为 1)的概率就应该比原来确定为有单元的概率大得多;反之,在靠近阵列边缘部分的某个栅格点上,如果有单元,则相邻栅格点上有单元的概率就应该比原来确定为有单元的概率小得多。即对于任何一个低副瓣的加权阵列,确定单元幅度或相位的随机量应该是相关的,而且在阵列的不同部分上,相关性的强弱是不一样的。很显然,每一栅格点上有单元的概率主要应与其附近栅格点上的随机量相关,而且距离越近,相关性越强;反之越弱。这些随机量构成了随机过程的马尔柯夫链。因此,为了更容易得到低副瓣的加权阵列,降低天线的副瓣电平,本文对统计法进行改进,给出一个新方法,称之为“马

尔柯夫链法”。

## 二、马尔柯夫链法的基本理论

马尔柯夫链法的设计依据是:对于密度加权阵列,确定单元幅度的随机量序列  $\{F_n\}$ , 构成随机过程的马尔柯夫链;对于相位加权阵列,确定单元相位的随机量序列  $\{\phi_n\}$ , 构成随机过程的马尔柯夫链。

马尔柯夫链是一种状态和时间都离散的马尔柯夫过程。研究马尔柯夫链,就必须考虑其转移概率矩阵和初始概率。本文提出的马尔柯夫链法以栅格数  $n$  作为马尔柯夫链的时间参数  $t_n$ , 马尔柯夫链的初始概率选为阵列第一个栅格点的参考阵幅度值,然后取马尔柯夫链的一步转移概率矩阵  $P$ 。如何确定转移概率矩阵是马尔柯夫链法的关键。以密度加权阵列为例,在每一栅格点  $n$  处,  $F_n$  仅可处在 0、1 两种状态之一,故马尔柯夫链的一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中,  $p_{00}$  为由  $n-1$  点  $F_{n-1} = 0$  转移到  $n$  点  $F_n = 0$  的转移概率;  $p_{01}$  为由  $n-1$  点  $F_{n-1} = 0$  转移到  $n$  点  $F_n = 1$  的转移概率;  $p_{10}$  为由  $n-1$  点  $F_{n-1} = 1$  转移到  $n$  点  $F_n = 0$  的转移概率;  $p_{11}$  为由  $n-1$  点  $F_{n-1} = 1$  转移到  $n$  点  $F_n = 1$  的转移概率。其中,  $p_{00} + p_{01} = 1$ ,  $p_{10} + p_{11} = 1$ 。

由于我们所研究的随机量在阵列的不同部分上相关性的强弱不一样,故我们先将阵列分成若干个区,然后确定各个区的转移概率矩阵。区域的划分是根据参考阵的幅度分布曲线并结合实际工作经验确定的。对于密度加权阵,分成边缘区、过渡区和中央区;对于相位加权阵,分成正相区和反相区。仍以密度加权阵列为例,因为对于任何一个低副瓣的密度加权阵列,单元分布总是中间密边缘疏。即在阵列中央区,若某一栅格点上  $F_{n-1} = 0$ , 则其相邻栅格点上  $F_n = 1$  的概率就应该比原来确定为有单元的概率大得多,亦即中央区的转移概率矩阵  $P$  中,  $p_{01} \equiv 1$ ;反之,在阵列边缘区,若某一栅格点上  $F_{n-1} = 1$ , 则其相邻栅格点上  $F_n = 1$  的概率就应该比原来确定为单元的概率小得多,亦即边缘区的转移概率矩阵  $P$  中,  $p_{10} \equiv 1$ 。由此可得,确定中央区转移概率矩阵的原则为  $p_{01} = 1$ ,  $p_{00} = 1 - p_{01} = 0$ ,  $p_{10}$ 、 $p_{11}$  待定;确定边缘区转移概率矩阵的原则为  $p_{10} = 1$ ,  $p_{11} = 1 - p_{10} = 0$ ,  $p_{00}$ 、 $p_{01}$  待定。中央区、边缘区的待定元素及过渡区转移概率矩阵的确定是以逻辑电路和信息论的状态分析给出的基本方法为依据,通过枚举法进行选择后确定的。这样,密度加权阵列边缘区、过渡区和中央区的转移概率矩阵分别确定为

$$\begin{bmatrix} (1 - A_n)/2 & (1 + A_n)/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (1 - A_n)/2 & (1 + A_n)/2 \\ 1 - A_n/2 & A_n/2 \end{bmatrix} \text{ 和} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (1 - A_n)/2 & (1 + A_n)/2 \end{bmatrix}$$

$A_n$  为第  $n$  个栅格点的参考阵单元幅度。

根据马尔柯夫链绝对概率的定义,密度加权阵列的随机量  $F_n$ , ( $n=1, 2, \dots, N$ ) 在线

阵各栅格点有单元 ( $F_n = 1$ ) 的概率  $p_1(n)$ , ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) 即可确定 ( $p_0(n)$  表示  $F_n = 0$  的概率), 初始概率

$$p_1(1) = A_1 \quad (2a)$$

$n \in$  边缘区,  $[p_0(n) \ p_1(n)] = [p_0(n-1) \ p_1(n-1)] \begin{bmatrix} (1-A_n)/2 & (1+A_n)/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , 即

$$p_1(n) = (1-A_n)[1-p_1(n-1)]/2 \quad (2b)$$

$n \in$  过渡区,  $[p_0(n) \ p_1(n)] = [p_0(n-1) \ p_1(n-1)] \begin{bmatrix} (1-A_n)/2 & (1+A_n)/2 \\ 1-A_n/2 & A_n/2 \end{bmatrix}$ , 即

$$p_1(n) = [1+A_n-p_1(n-1)]/2 \quad (2c)$$

$n \in$  中央区,  $[p_0(n) \ p_1(n)] = [p_0(n-1) \ p_1(n-1)] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (1-A_n)/2 & (1+A_n)/2 \end{bmatrix}$ , 即

$$p_1(n) = 1 - [(1-A_n)p_1(n-1)]/2 \quad (2d)$$

### 1. 设计密度加权线阵

线阵的座标和单元编码次序如图 1 所示。

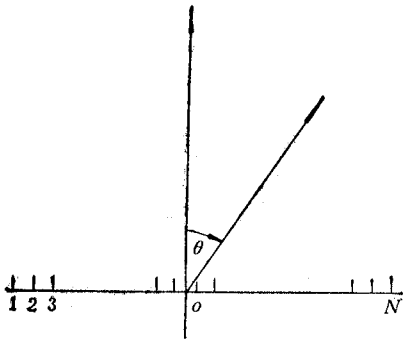


图 1 线阵座标和单元编码次序

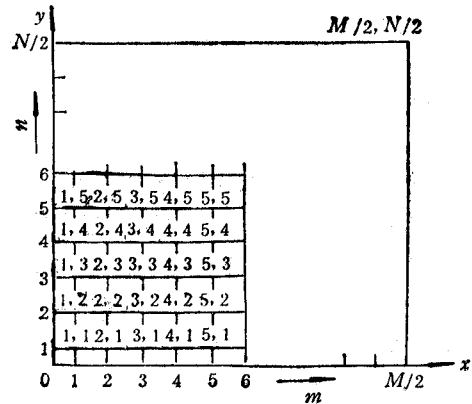


图 2 轴对称平面阵列的单元编码次序( $M, N$  都为偶数)

对于 (2a)、(2b)、(2c) 和 (2d) 式, 将  $p_1(n)$  用  $M_n$  表示, 马尔柯夫链法设计密度加权线阵的第  $n$  个栅格点上的单元幅度可按下式确定:

$$F_n = \begin{cases} 1, & R_n \leq M_n \\ 0, & R_n > M_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (3)$$

式中,  $R_n$  为计算机产生的(0,1)间均匀分布的随机数;  $M_n$  为  $F_n = 1$  的概率, 其中

$$M_1 = A_1 \quad (4a)$$

$$M_n = (1+A_n)(1-M_{n-1})/2, \quad n \in \text{边缘区} \quad (4b)$$

$$M_n = (1+A_n-M_{n-1})/2, \quad n \in \text{过渡区} \quad (4c)$$

$$M_n = 1 - (1-A_n)M_{n-1}/2, \quad n \in \text{中央区} \quad (4d)$$

$A_n$  为第  $n$  个栅格点上参考阵单元幅度。

### 2. 设计密度加权面阵

面阵的单元编码次序如图 2 所示。马尔柯夫链法设计密度加权面阵, 各栅格点有单

元的概率取“等效的不等幅分布”。即对于 $M \times N$ 个栅格点的面阵,先按(3)式及(4a)、(4b)、(4c)、(4d)式计算 $M$ 单元的线阵和 $N$ 单元的线阵各栅格点有单元的概率,然后将这些概率值按照面阵的栅格点 $(m, n)$ 的次序依次相乘,作为整个口径面上各栅格点有单元的概率。

马尔柯夫链法设计密度加权面阵,第 $(m, n)$ 个栅格点上的单元幅度 $F_{mn}$ 按下式确定:

$$F_{mn} = \begin{cases} 1, & R_{mn} \leq M_{mn} \\ 0, & R_{mn} > M_{mn} \end{cases} \quad (m = 1, 2, \dots, M/2; n = 1, 2, \dots, N/2) \quad (5)$$

式中, $R_{mn}$ 是计算机产生的 $(0, 1)$ 间均匀分布的随机数; $M_{mn}$ 是 $F_{mn} = 1$ 的概率,其中

$$M_{mn} = M_m \cdot M_n \quad (6)$$

$$M_m = 1 - (1 - A_m)M_{m-1}/2, \quad m \in \text{中央区} \quad (7a)$$

$$M_m = (1 + A_m - M_{m-1})/2, \quad m \in \text{过渡区} \quad (7b)$$

$$M_m = (1 + A_m)(1 - M_{m-1})/2, \quad m \in \text{边缘区} \quad (7c)$$

$$M_n = 1 - (1 + A_n)M_{n-1}/2, \quad n \in \text{中央区} \quad (7d)$$

$$M_n = (1 + A_n - M_{n-1})/2, \quad n \in \text{过渡区} \quad (7e)$$

$$M_n = (1 + A_n)(1 - M_{n-1})/2, \quad n \in \text{边缘区} \quad (7f)$$

$A_m$ 为 $M$ 单元线口径参考阵的单元幅度分布, $A_n$ 为 $N$ 单元线口径参考阵的单元幅度分布。

### 3. 设计相位非对称的相位加权阵

见图1,对于相位加权线阵,可将其分成正相区和反相区。这两个区分别由若干个小小区间组成。对相位非对称的相位加权阵,正相区和反相区的转移概率矩阵分别选为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (1 - B_n)/2 & (1 + B_n)/2 \end{bmatrix} \text{ 和 } \begin{bmatrix} (1 - B_n)/2 & (1 + B_n)/2 \\ 1 - B_n/2 & B_n/2 \end{bmatrix} \text{ 这里 } B_n = (1 + A_n)/2,$$

$A_n$ 为第 $n$ 个栅格点的参考阵单元幅度。

马尔柯夫链法设计相位非对称的相位加权阵,第 $n$ 个栅格点上的单元相位 $\phi_n$ 按下式确定:

$$\phi_n = \begin{cases} 0, & R_n \leq M_n \\ \pi, & R_n > M_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (8)$$

式中 $R_n$ 为计算机产生的 $(0, 1)$ 间均匀分布的随机数; $M_n$ 为 $\phi_n = 0$ 的概率,其中

$$M_1 = B_1 \quad (9a)$$

$$M_n = 1 - (1 - B_n)M_{n-1}/2, \quad n \in \text{正相区} \quad (9b)$$

$$M_n = (1 + B_n - M_{n-1})/2, \quad n \in \text{反相区} \quad (9c)$$

### 4. 设计相位对称的相位加权阵

见图1,对相位对称的相位加权阵,正相区和反相区的转移概率矩阵分别选为

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (1 - B_n)/2 & (1 + B_n)/2 \end{bmatrix}$  和  $\begin{bmatrix} (1 - B_n)/2 & (1 + B_n)/2 \\ 1 - B_n & B_n \end{bmatrix}$ 。马尔柯夫链法设计相位对

称的相位加权阵,第 $n$ 个栅格点上的单元相位 $\phi_n$ 按下式确定:

$$\phi_n = \begin{cases} 0, & R_n \leq M_n \\ \pi, & R_n > M_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots, N/2) \quad (10)$$

其中

$$M_1 = B_1 \quad (11a)$$

$$M_n = 1 - (1 - B_n)M_{n-1}/2, n \in \text{正相区} \quad (11b)$$

$$M_n = 1 - (1 - B_n)(1 + M_{n+1})/2, n \in \text{反相区} \quad (11c)$$

由上述计算公式可见, 马尔柯夫链法在本质上是使随机量  $F_n$  或  $\phi_n$  与其前面一个随机量相关, 而且在阵列的不同部分, 相关影响的强弱不一样。这样就及时修正了阵列各栅格点上随机量所处状态的概率, 使所得到的密度加权阵的单元排列或相位加权阵的相位排列, 更接近于实际的低副瓣加权阵。因此, 马尔柯夫链法在计算机上模拟设计时, 比统计法更容易得到一个好的加权阵列。

### 三、计算机模拟设计

本文应用统计法和马尔柯夫链法, 在计算机上模拟设计了 128 单元、256 单元密度加权线阵,  $56 \times 56$ 、 $72 \times 72$  单元的密度加权面阵, 以及 128 单元、256 单元的相位加权阵 (相位非对称分布和相位对称分布两种情况), 程序框图见图 3。

模拟设计的计算结果表明, 若给定要计算的样本阵总数, 马尔柯夫链法得到的最好样本阵的最高副瓣电平比统计法得到的最好样本阵的最高副瓣电平低 0.03—6.11dB, 得到的低副瓣样本阵个数比统计法多 3.44—13.0 倍, 得到低副瓣样本阵所需时间比统计法缩短 53%—94%, 见表 1。

表 2 列出了两种方法设计 256 单元密度加权线阵的各项指标。表 3 列出了设计 256 单元相位非对称的相位加权阵的各项指标。

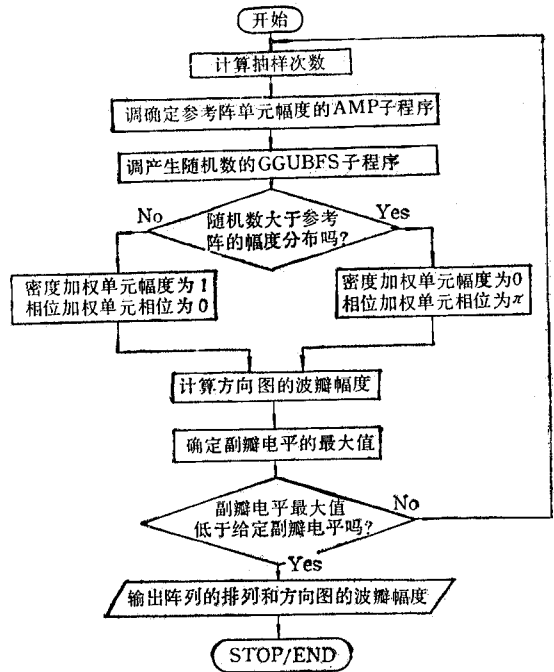


图 3 计算机模拟设计主程序框图

表 1 与统计法相比, 马尔柯夫链法各项指标的提高

马尔柯夫链法 (与统计法相比)	最好样本阵的最高 副瓣电平降低	低副瓣样本阵 个数增加	首次得到低副瓣样 本阵所需时间缩短
平均值 最大值	1.83 dB 6.11 dB	5.10 倍 13.00 倍	80% 94%

表 2 设计 256 单元密度加权线阵的各项指标

样本=200

设计方法	最好样本阵的最高副瓣电平	最好样本阵中有源单元数	最高副瓣电平低于设计值 -23dB 的样本阵个数	首次得到最高副瓣低于 -23dB 的样本阵序号
统计法 马尔柯夫链法	-23.98 dB -26.36 dB	192 203	19 62	第 4 号 第 1 号

表 3 设计 256 单元相位非对称相位加权阵的各项指标

样本=200

设计方法	最好样本阵的最高副瓣电平	最好样本阵中反相单元位置	最高副瓣电平低于设计值 -22 dB 的样本阵个数	首次得到最高副瓣低于 -22dB 的样本阵序号
统计法	-23.70 dB	1, 6, 8, 20, 24, 47, 52, 199, 213, 219, 225, 239, 253	7	第 8 号
马尔柯夫链法	-25.27 dB	16, 19, 26, 27, 45, 52, 202, 237, 248, 249, 253	16	第 3 号

#### 四、结 语

在设计加权阵列天线时,应用马尔柯夫链法可以降低最高副瓣电平、缩短计算时间、减少工作量和提高设计性能。该方法还可以对所得到的阵列进行优选。理论和计算都表明,马尔柯夫链法确是一种比统计法优越得多的新方法。

本文得到张德齐教授的指导和审阅,在此表示衷心感谢。

#### 参 考 文 献

- [1] Y. C. Guo, M. S. Smith, *IEE Proc.*, 130(1983)8, 343.
- [2] 孙茂友,现代雷达,1979年,第3期,第36页.
- [3] 郭燕昌,钱继曾等,相控阵和频率扫描天线原理,国防工业出版社,1978年.
- [4] 王粹坤,随机过程论,科学出版社,1978年.

## DESIGN APPROACH FOR WEIGHTED ARRAY ANTENNAS —MARKOV CHAINS' APPROACH

Li Shikuan

(Dalian Electronics Research Institute, Dalian)

Liu Ruixiang

(Beijing Institute of Technology, Beijing)

**Abstract** Usually, weighted array antennas are designed by using the statistical approach. In this paper, the application of the Markov chains of a random process to the design of density weighted or phase weighted arrays is considered. The new approach is proposed to improve the Statistical approach and divides the array into several parts, in which the selection of the element location or phase is performed correlatively utilizing the probability density function for specifying the location or phase of elements at every part.

**Key words** Weighted array antennas; Improved statistical approach; Markov chains; CAD