两类周期查询式完全服务排队系统研究 [1]

赵东风
(云南大学信息与电子科学系 昆明 650091)

摘 要 本文对时间连续型非对称周期查询式完全服务排队系统进行了分析，并与时间离散型周期查询式完全服务排队系统 (赵东风, 1994) 进行了对比研究. 在两种系统取相同的系统参数值的条件下，给出两类排队服务系统的分析结果.

关键词 非对称周期查询排队系统，完全服务，连续时间，离散时间
中图号 TN913.2

1 引 言

周期查询式排队服务理论在工业过程控制、计算机网络、通信系统、控制决策等方面都有着很广泛的应用，因此，该课题的研究一直受到国内外学者的关注，取得了一些较为重要的研究成果. 文献 [1-4] 分析了时间连续型周期查询式排队服务系统性能，文献 [5-12] 讨论了时间离散型周期查询式排队服务系统性能. 两类系统采用了不同的分析方法，有效地分析了周期查询式排队服务系统. 在文献 [10,12] 中，作者综合应用了上述两类周期查询式排队服务系统的分析方法，对时间离散型周期查询式排队服务系统进行了分析，结果表明分析方法是有效的. 本文采用概率母函数的分析方法，对时间连续型非对称周期查询式完全服务排队系统进行了分析，并与文献 [9] 中的时间离散型周期查询式完全服务排队系统的结果进行了对比研究.

2 连续时间系统模型

在时间连续型非对称周期查询式完全服务排队系统中有 N 个终端站，这 N 个终端站是由一个逻辑性服务器依顺序查询服务.

2.1 假设条件 (1) 进入各个工作站存储器内等待发送的信息分组的到达过程是相互独立的 Poisson 分布，到达率是 $\lambda_i, i=1,2,\cdots,N$； (2) 任何一个工作站发送信息分组的时间变量是相互独立的，并且在其发送一个信息分组的时间内新到达的信息分组数的概率母函数是 $\tilde{B}_j(\lambda_j-\lambda_j z_j)$，发送一个信息分组的时间均值和二阶原点矩分别是 $\beta_j=-\tilde{B}'_j(0)$ 和 $\nu_{\beta_j}=\tilde{B}''_j(0)$； (3) 任何两个相邻工作站之间的查询转换时间变量是相互独立的，并且在其查询转换时间内新到达的信息分组数的概率母函数是 $\tilde{R}_k(\lambda_k-\lambda_k z_k)$，查询转换时间的均值和二阶原点矩分别是 $\gamma_k=-\tilde{R}_k(0)$ 和 $\nu_{r_{\bar{k}}}=\tilde{R}''_k(0)$；

在所讨论的排队服务系统中，每个终端站的存储器容量足够大，不会产生信息分组丢失现象，服务按完全服务协议先到先服务.

2.2 $\tilde{G}_{i+1}(z_1,z_2,\cdots,z_{i+1},\cdots,z_N)$ 假设 i 号终端站 $(i=1,2,\cdots,N)$ 是在 t_n 时刻接受服务，即获得发送信息分组的权利，当 i 号终端站发送完存储器内按完全服务协议规定的信息分组数，服务台就马上查询 $i+1$ 号终端. $i+1$ 号终端站在 t_{n+1} 刻获得发送信息分组的权利.

[1] 1997-02-27 收到， 1998-08-15 定稿
国家 863/CIMS 主题资助项目，国家自然科学基金资助项目

定义随机变量 $\tilde{\xi}_i(n)$ 是 i 号终端站在 t_n 时刻其存储器内存储的信息分组数，则整个排队服务系统在 t_n 时刻的状态可表示为 $[\tilde{\xi}_1(n),\tilde{\xi}_2(n),\cdots,\tilde{\xi}_i(n),\cdots,\tilde{\xi}_N(n)]$ 。

在满足 $\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\beta_i<1$ 的条件下，排队服务系统是稳定的，并可求得系统状态变量的概率母函数为

$$\tilde{G}_{i+1}(z_1,z_2,\cdots,z_{i+1},\cdots,z_N)=\lim_{n\to\infty}E\left[\prod_{j=1}^{N}z_j^{\tilde{\xi}_j(n+1)}\right]$$

$$=\tilde{R}_i\left[\sum_{j=1}^{N}\lambda_j(1-z_j)\right]\tilde{G}_i\left[z_1,z_2,\cdots,\tilde{H}_i\left[\sum_{\substack{j=1\\ \neq i}}^{N}\lambda_j(1-z_j)\right],\cdots,z_N\right],\quad i=1,2,\cdots,N,\quad (1)$$

式中 $\tilde{H}_i(s_i)=\tilde{B}_i\left(s_i+\lambda_i(1-\tilde{H}_i(s_i))\right)$ 。

3 连续时间系统特性

3.1 $\tilde{g}_i(i,i)$ 定义在 t_n 时刻第 i 号终端站开始接受服务时，第 j 号终端站内平均等待发送的信息分组数为 $\tilde{g}_i(j)$ ，其值由下式计算。

$$\tilde{g}_i(j)=\lim_{z_1,z_2,\cdots,z_N\to 1}\frac{\partial\tilde{G}_i(z_1,z_2,\cdots,z_j,\cdots,z_N)}{\partial z_j},\quad i=1,2,\cdots,N;\quad j=1,2,\cdots,N.\quad (2)$$

定义

$$\tilde{g}_i(j,k)=\lim_{z_1,z_2,\cdots,z_N\to 1}\partial^2\tilde{G}_i(z_1,z_2,\cdots,z_j,\cdots,z_k,\cdots,z_N)/(\partial z_j\partial z_k),$$
$$i=1,2,\cdots,N;\quad j=1,2,\cdots,N;\quad k=1,2,\cdots,N.\quad (2)$$

对 (1) 式求一阶偏导，并计算 $\sum_{i=1}^{N}\tilde{g}_{i+1}(j)$, 得到平均排队队长：

$$\tilde{g}_i(i)=\lambda_i(1-\rho_i)\theta_c,\qquad i=1,2,\cdots,N,\quad (4)$$

式中 $\rho_i=\lambda_i\beta_i$ ， $\theta_c=\sum_{i=1}^{N}\gamma_i\Big/\left[1-\sum_{i=1}^{N}\rho_i\right]$ 。

对 (1) 式求二阶偏导，得到

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{i+1}(j,k)=&\lambda_j\lambda_k\tilde{R}_i''(0)+\lambda_j\lambda_k\gamma_i+\lambda_j\gamma_i\tilde{g}_i(k)+\lambda_k\gamma_i\tilde{g}_i(j)+\{2\lambda_j\lambda_k\beta_i\gamma_i(1+h_i)\\&+\lambda_j\lambda_k\beta_i[1+3h_i+\tilde{H}_i''(0)]+\lambda_j\lambda_k(1+h_i)^2\tilde{B}_i''(0)\}\tilde{g}_i(i)+\tilde{g}_i(j,k)\\&+\lambda_k\beta_i(1+h_i)\tilde{g}_i(j,i)+\lambda_j\beta_i(1+h_i)\tilde{g}_i(i,k)+\lambda_j\lambda_k\beta_i^2(1+h_i)^2\tilde{g}_i(i,i),\\&\quad i\neq j\neq k.\end{aligned}\quad (5)$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{i+1}(j,j)=&\lambda_j^2\tilde{R}_i''(0)+2\lambda_j\gamma_i\tilde{g}_i(j)+[2\lambda_j^2h_i+2\lambda_j^2\beta_i\gamma_i(1+h_i)+\lambda_j^2(1+h_i)^2\tilde{B}_i''(0)\\&+\lambda_j^2\beta_i\tilde{H}_i''(0)]\tilde{g}_i(i)+\tilde{g}_i(j,j)+2\lambda_j\beta_i(1+h_i)\tilde{g}_i(j,i)\\&+\lambda_j^2\beta_i^2(1+h_i)^2\tilde{g}_i(i,i),\qquad i\neq j.\end{aligned}\quad (6)$$

$$\tilde{g}_{i+1}(j,i)=\lambda_j\lambda_i\tilde{R}_i''(0)+\lambda_j\lambda_i\gamma_i+\lambda_i\gamma_i\tilde{g}_i(j)+\lambda_j\lambda_i\beta_i\gamma_i(1+h_i)\tilde{g}_i(i),\quad i\neq j. \tag{7}$$

$$\tilde{g}_{i+1}(i,i)=\lambda_i^2\tilde{R}_i''(0), \tag{8}$$

式中 $h_i=-\tilde{H}_i'(0)$ 。

由 (5) 式和 (7) 式计算 $\sum_{i=1}^N \tilde{g}_{i+1}(j,k)$, 得到

$$\begin{aligned}&\lambda_j\lambda_k\sum_{i=1}^N\tilde{R}_i''(0)+\lambda_j\lambda_k\sum_{i=1}^N\gamma_i+\lambda_j\sum_{\substack{i=1\\ \neq k}}^N\gamma_i\tilde{g}_i(k)+\lambda_k\sum_{\substack{i=1\\ \neq j}}^N\gamma_i\tilde{g}_i(j)\\&\quad+\lambda_j\lambda_k\sum_{\substack{i=1\\ \neq j\\ \neq k}}^N[2\gamma_i\beta_i(1+h_i)+(1+h_i)^2\tilde{B}_i''(0)+\beta_i(1+3h_i+\tilde{H}_i''(0))]\tilde{g}_i(i)\\&\quad+\lambda_j\lambda_k\beta_j\gamma_j(1+h_j)\tilde{g}_j(j)+\lambda_j\lambda_k\beta_k\gamma_k(1+h_k)\tilde{g}_k(k)+\lambda_j\sum_{\substack{i=1\\ \neq j\\ \neq k}}^N\beta_i\tilde{g}_i(k,i)\\&\quad+\lambda_k\sum_{\substack{i=1\\ \neq j\\ \neq k}}^N\beta_i\tilde{g}_i(j,i)+\lambda_j\lambda_k\sum_{\substack{i=1\\ \neq j\\ \neq k}}^N\beta_i^2(1+h_i)^2\tilde{g}_i(i,i)\\&=\tilde{g}_j(k,j)+\tilde{g}_k(j,k).\end{aligned} \tag{9}$$

由 (6) 式和 (8) 式计算 $\sum_{i=1}^N \tilde{g}_{i+1}(j,j)$, 得到

$$\begin{aligned}&\lambda_j^2\sum_{i=1}^N\tilde{R}_i''(0)+2\lambda_j\sum_{\substack{i=1\\ \neq j}}^N\gamma_i\tilde{g}_i(j)+\lambda_j^2\sum_{\substack{i=1\\ \neq j}}^N[2\gamma_i\beta_i(1+h_i)+2\beta_ih_i+(1+h_i)^2\tilde{B}_i''(0)+\beta_i\tilde{H}_i''(0)]\\&\quad\times\tilde{g}_i(i)+2\lambda_j\sum_{\substack{i=1\\ \neq j}}^N\beta_i(1+h_i)\tilde{g}_i(j,i)+\lambda_i^2\sum_{\substack{i=1\\ \neq j}}^N\beta_i^2(1+h_i)^2\tilde{g}_i(i,i)=\tilde{g}_j(j,j).\end{aligned} \tag{10}$$

将 (9) 式的结果经过求和计算后代入 (10) 式中，得到

$$\begin{aligned}&(1-\sum\rho_i)\sum\frac{\beta_i}{\lambda_i(1-\rho_i)}\tilde{g}_i(i,i)=\sum\rho_i\sum\tilde{R}_i''(0)+\sum\rho_i\left[(\sum\gamma_i)^2-\sum\gamma_i^2\right]\\&\quad+\theta_c\{\sum\rho_i\sum\frac{\lambda_i\tilde{B}_i''(0)}{1-\rho_i}-\sum\frac{\lambda_i\rho_i\tilde{B}_i''(0)}{1-\rho_i}+\sum\gamma_i\left[(\sum\rho_i)^2-\sum\rho_i^2\right]\},\end{aligned} \tag{11}$$

式中 $\sum=\sum_{i=1}^N$ 。

3.2 $\overline{W}_{Ei}^c$ 在 i 号终端发送完一个信息分组后，其存储器内等待发送的信息分组数的概率母函数为

$$Q_i(z_i)=\frac{\tilde{B}_i(\lambda_i-\lambda_i z_i)[1-\tilde{G}_i(1,\cdots,z_i,1,\cdots,1)]}{\lambda_i\theta_c[\tilde{B}_i(\lambda_i-\lambda_i z_i)-z_i]},\qquad i=1,2,\cdots,N. \tag{12}$$

建立 i 号终端存储器内信息分组等待发送时间的概率母函数的关系式：

$$W_{Ei}^c(\lambda_i-\lambda_i z_i)\tilde{B}_i(\lambda_i-\lambda_i z_i)=Q_i(z_i),\qquad i=1,2,\cdots,N. \tag{13}$$

对 (13) 式求导，并代入 (11) 式化简得到

$$\sum\rho_i\overline{W}_{Ei}^c=\frac{\sum\rho_i}{2}\left\{\frac{\sum\tilde{R}_i''(0)}{\sum\gamma_i}+\frac{1}{1-\sum\rho_i}\left[\sum\lambda_i\tilde{B}_i''(0)+\sum\gamma_i\left(1-\frac{\sum\rho_i^2}{\sum\rho_i}\right)\right]-\frac{\sum\gamma_i^2}{\sum\gamma_i}\right\}. \tag{14}$$

4 离散时间系统特性

4.1　$g_i(i,i)$　　根据文献 [9] 对时间离散型非对称周期查询式完全服务排队系统进行分析，在信息分组到达过程为 Poisson 分布时，可得到

$$\begin{aligned}(1-\sum\rho_i)\sum\frac{\beta_i}{\lambda_i(1-\rho_i)}g_i(i,i)&=\sum\rho_i\sum R_i''(1)+\sum\rho_i\left[(\sum\gamma_i)^2-\sum\gamma_i^2\right]\\&+\theta\left\{\sum\rho_i\sum\frac{\lambda_i B_i''(1)}{1-\rho_i}-\sum\frac{\lambda_i\rho_i B_i''(1)}{1-\rho_i}+\sum\gamma_i\left[(\sum\rho_i)^2-\sum\rho_i^2\right]\right.\\&\left.+\sum\rho_i-(1-\sum\rho_i)\sum\frac{\rho_i^2}{1-\rho_i}\right\},\end{aligned} \tag{15}$$

式中 $\theta=\sum_{i=1}^N\gamma_i\Big/\left[1-\sum_{i=1}^N\rho_i\right]$.

同样根据文献 [9]，得到时间离散型非对称周期查询式完全服务排队系统的信息分组在存储器中平均等待的时间关系式：

$$\sum\rho_i\overline{W}_{Ei}=\frac{\sum\rho_i}{2}\left\{\frac{\sum R_i''(1)}{\sum\gamma_i}+\frac{1}{1-\sum\rho_i}\left[\sum\lambda_i B_i''(1)+\sum\rho_i+\sum\gamma_i\left(1-\frac{\sum\rho_i^2}{\sum\rho_i}\right)\right]-\frac{\sum\gamma_i^2}{\sum\gamma_i}\right\}. \tag{16}$$

4.2　两类系统特性　　在时间连续型周期查询式完全服务排队系统的参数取值，与文献 [9] 中的时间离散型周期查询式完全服务排队系统的参数值相同时，得到如下关系式：

$$\tilde{g}_i(i,i)=g_i(i,i), \tag{17}$$

$$\overline{W}_{Ei}^c=\overline{W}_{Ei}+0.5. \tag{18}$$

5 结束语

(1) 非对称周期查询完全服务排队系统的精确解析非常复杂，本文采用概率母函数的分析方法，建立了与其对应的数学模型，在此基础上进行了解析分析，其结果对进一步分析非对称周期查询完全服务排队系统是有意义的。

(2) 本文对时间连续的周期查询完全服务排队系统与时间离散的周期查询完全服务排队系统还进行了对比分析。时间连续系统与时间离散系统的分析方法是不同的，但当两个系统中的相应随机变量的参数取值相同时，则得到 (17) 式和 (18) 式。在时间离散的周期查询排

队系统中，由于进入各个终端站存储器的信息分组的开始时间确定在进入时隙结束，因而存在一个推迟时间量，分析证明 [12] 该推迟时间量在信息分组到达过程为 Poisson 分布时，其量值为 0.5 。另外，两类系统的平均循环查询周期 $\theta_c = \theta$, 平均队长 $\tilde{g}_i(i) = g_i(i)$ 。两类系统的对比分析，对非对称周期查询完全服务排队系统的问题研究也将是有益的。

(3) 计算机模拟实验也表明 (数值结果在此省略), 以上分析结果与实验数值相一致。

参 考 文 献

[1] Rubin I, De Moraes L F. Message delay analysis for polling and token multiple-access schemes for local communication networks. IEEE J. of Select Areas Commun., 1983, 1(5): 935–947.

[2] Ferguson M J, Aminetzah Y J. Exact results for nonsymmetric token ring systems. IEEE Trans. on COM., 1985, COM-33(3): 223–231.

[3] Takinc T, Takahashi Y. Exact analysis of asymmetric polling systems with single buffers. IEEE Trans. on COM., 1988, COM-36(10): 1119–1127.

[4] 逯昭义，王思明. 环形 LAN 存取方式建模的研究. 电子科学学刊， 1994, 16(2): 148–156.

[5] Ibe O C, Cheng X. Approximate analysis of asymmetric single-server token-passing systems. IEEE Trans. on COM., 1989, COM-37(6): 572–577.

[6] Alan G K, Hanocb L, Mandyam M S. Descendant set: An efficient approach for the analysis of polling systems. IEEE Trans. on COM., 1994, COM-42(2,3,4): 1245–1253.

[7] Woo Y J, Chong K U. Analysis of a finite-buffer polling system with exhaustive service based on virtual buffering. IEEE Trans. on COM., 1994, COM-42(12): 3144–3149.

[8] 赵东风，郑苏民. 周期查询式门限服务排队系统中信息分组的延迟分析. 通信学报， 1994, 15(2): 18–23.

[9] 赵东风，郑苏民. 查询式完全服务排队模型分析. 电子学报， 1994, 22(5): 102–107.

[10] 赵东风，李必海，郑苏民. 周期查询式限定服务排队系统研究. 电子科学学刊， 1997, 19(1): 44–49.

[11] Lainchyr H, Chungju C. An exact analysis of an asymmetric polling system with mixed service discipline and general service order. Computer Communication, 1997, 20(5): 1292–1300.

[12] Zhao Dongfeng, Li Bihai, Zheng Sumin. Performance analysis of polling systems with limited service. Journal of Electronics (CHINA), 1998, 15(1): 43–49.

STUDY ON TWO POLLING SYSTEMS WITH EXHAUSTIVE SERVICE

Zhao Dongfeng

(*Department of Information and Electronic Sciences, Yunnan University, Kunming* 650091)

Abstract This paper presents the analysis of a continuous-time model of the asymmetric polling system with exhaustive service. Compared with the discrete-time model of the polling system with exhaustive service(by Zhao Dongfeng, 1994), the results of two polling systems are given.

Key words Asymmetric polling system, Exhaustive service, Continuous-time, Discrete-time

赵东风： 男， 1957 年生，副教授，中国电子学会高级会员，从事计算机网络、一点多址通信、 ATM 和 CIMS 的科研和教学工作.