

# 曲线矩不变性的研究

李炳成 沈俊

(东南大学生物医学工程系, 南京 210018)

**摘要** 本文提出一种新的矩和矩的不变性。它不仅适合于封闭轮廓线的识别和匹配,而且可以用来进行任意曲线段以任意方式组合所构成的物体的识别和匹配,从而拓展了前人平面矩、付里叶描述子等方法的应用范围。同时运用本文方法更正了前人方法的错误。最后,为了有效地使用曲线矩,本文提出了曲线矩计算的快速算法。新算法几乎不需要乘法,因此实现简单,速度快。

**关键词** 模式识别;不变矩;轮廓矩;曲线矩;Pascal 变换

## 一、引言

不变矩由于具有平移、旋转和比例不变性,自 M. K. Hu 在 1962 年提出以来已经在模式识别领域里得到广泛的应用<sup>[1-8]</sup>。目前,人们主要使用图象的平面矩和矩的不变性进行识别。然而,我们知道,具有广泛应用的二值图象的主要信息集中在轮廓,因此使用轮廓信息进行识别可能更有效。据此,人们提出了使用付里叶描述子 (Fourier Descriptor, FD) 来描述二值图象的特征<sup>[10]</sup>。Hu 的矩(本文将其称为平面矩以便与我们的曲线矩相区别)方法和 FD 方法目前被认为是相互独立的方法。它们均存在一定的缺点,即仅能用来识别和匹配封闭轮廓线构成的物体,而对非封闭的曲线或多个曲线段构成的物体上述方法均失效。本文首先利用质点运动理论从理论上统一了在学术界一直认为是相互独立的两种方法——矩方法和 FD 方法;然后,提出了曲线矩和不变曲线矩的概念,并验证了它们的不变性。所提出的曲线矩及其不变性不仅适用于封闭轮廓线,而且适用于各种曲线以任意方式组合的物体,从而拓展了前人方法的应用范围;最后,本文提出了几乎不需乘法的曲线矩快速计算方法——Pascal 变换方法。该方法实现简单,速度快。

## 二、平面矩和付里叶描述子

2-D 图象  $f(x, y)$  矩定义如下:

$$m_{pq} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^p y^q f(x, y) dx dy$$

这里  $p$  和  $q$  表示矩的阶数。若  $f(x, y)$  是区域为  $D$ 、边界为  $l$  的二值图象,见图 1,则矩的定义可化简为

$$m_{pq} = \iint_D x^p y^q dx dy \quad (1)$$

由于复连域可以分解成多个单连域, 不失一般性, 仅考虑单连域情况. 对于单连域  $D$ , 运用格林定理可得

$$m_{pq} = \frac{1}{p+1} \int_l x^{p+1} y^q dy \quad (2)$$

$$m_{pq} = -\frac{1}{q+1} \int_l x^p y^{q+1} dx \quad (3)$$

付里叶描述子是通过轮廓的付里叶变换描述物体特征的. 将轮廓  $l$  表示为  $z(s) = x(s) + jy(s)$ , 这里  $j = \sqrt{-1}$ , 则  $z(s)$  的付里叶展开为

$$\begin{aligned} g_n &= \int_l (x(s) + jy(s)) \exp(-j2\pi ns) ds \\ &= \int_0^L (x(s) + jy(s)) \exp(-j2\pi ns) ds \end{aligned} \quad (4)$$

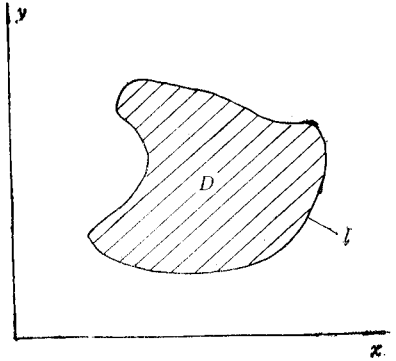


图 1

这里  $L$  为轮廓线的长度.

为在理论上统一平面矩和付里叶描述子, 考虑质量为 1 的质点在曲线  $l$  上的运动. 设曲线(轮廓)上的力场为  $\mathbf{v}(x, y)$ , 则质点绕轮廓运动一周所做的功为

$$W(\mathbf{v}) = \int_l \mathbf{v}(x, y) \cdot d\mathbf{l} \quad (5)$$

如果力场  $\mathbf{v}$  选择为

$$\mathbf{v} = x^{p+1} y^q \hat{x} / (p+1) \quad (6)$$

则(5)式变为

$$W(\mathbf{v}) = \frac{1}{p+1} \int_l x^{p+1} y^q \hat{x} \cdot d\mathbf{l} \quad (7)$$

这里,  $\hat{x}$  表示坐标轴  $x$  方向上的单位向量, 因此(7)式变为

$$W(\mathbf{v}) = \frac{1}{p+1} \int_l x^{p+1} y^q dx = m_{pq} \quad (8)$$

同样, 若力场  $\mathbf{v}$  选择为

$$\text{则有} \quad \mathbf{v} = -x^p y^{q+1} \hat{y} / (q+1) \quad (9)$$

$$W(\mathbf{v}) = -\frac{1}{q+1} \int_l x^p y^{q+1} dy = m_{pq} \quad (10)$$

由(5)式到(10)式可得如下结论:

**结论 1** 平面矩  $m_{pq}$  是单位质量的质点沿区域  $D$  的边界  $l$  运动时, 力场所做的功. 力场的大小与矩的阶  $p$  和  $q$  有关, 而力场的方向平行于  $x$  轴或  $y$  轴.

**结论 2** 平面矩力场的方向是确定性的, 它不随质点在轮廓线上运动而改变.

如果轮廓线上的力场  $\mathbf{v}$  选择为

$$\mathbf{v} = [x(s) + jy(s)] \exp(-j2\pi ns) \hat{i}_1 \quad (11)$$

则有

$$W(\mathbf{v}) = \int_l [x(s) + jy(s)] \exp(-j2\pi ns) \hat{z}_l \cdot d\mathbf{l} \quad (12)$$

这里  $\hat{z}_l$  表示质点的运动方向,它与  $l$  的正向切线方向一致,因此(12)式变为

$$W(\mathbf{v}) = \int_0^L [x(s) + jy(s)] \exp(-j2\pi ns) ds = g_n \quad (13)$$

由(11)式到(13)式,可以得出如下结论:

**结论 3** 付里叶描述子也是单位质量的质点沿轮廓线运动一周时力场所做的功。力场是一个复力场,其大小与质点在轮廓线上的位置、谐波系数  $n$  和弧长  $s$  有关,而力场的方向为正向轮廓线的切线方向。

由上述讨论,可得以下结论:

**结论 4** 平面矩和付里叶描述子均是单位质量的质点沿轮廓线运动一周时,力场所做的功。它们的区别仅仅在于力场的选取不同。平面矩力场是一个确定方向( $x$  或  $y$  轴方向)的实力场,而付里叶描述子的力场则是方向不断改变的复力场。

平面矩和付里叶描述子方法自 60 年代和 70 年代出现并应用到模式识别领域里以来,人们已经就这两个问题做了大量的工作。尽管人们已经在实验中发现,这两种方法识别的效果较接近,但还没人考虑它们之间的联系和区别。运用质点运动理论,我们首次建立了平面矩与付里叶描述子之间的联系和区别。

### 三、曲线矩和不变曲线矩

在字符和汉字识别中,除了碰到构成二值图象的封闭轮廓线外,常常碰到非封闭的曲线或由若干条曲线段组成的整体。现将经常碰到的问题分为 3 种情况:

(1) 封闭曲线 封闭曲线是二值图象的轮廓线。

(2) 非封闭一笔画曲线 非封闭一笔画曲线是一条非封闭但能够一笔画出的曲线。

(3) 非一笔画的曲线 非一笔画曲线通常是由若干个曲线段组成,一笔(即不抬笔)画不出所有曲线段的曲线。

图 1 的  $l$  是典型的封闭曲线。非封闭一笔画曲线和非一笔画曲线分别见图 2 和图 3。很显然,平面矩和付里叶描述子仅能应用于(1),而不能用来解决(2)和(3)的识别问题。为解决该问题,我们建立新的矩和不变矩。

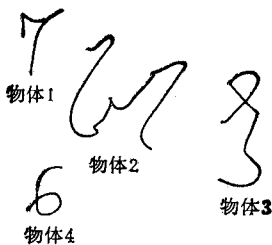


图 2 非封闭一笔画曲线

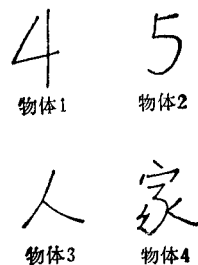


图 3 非一笔画曲线

### 1. 曲线矩和不变曲线矩的建立

我们知道, 封闭曲线也是一笔画曲线, 而非一笔画曲线可以分解成若干个一笔画曲线的组合. 因此, 先考虑一笔画曲线. 对于一笔画曲线, 选择(5)式的力场  $\boldsymbol{v}$  为

$$\boldsymbol{v} = x^p y^q \boldsymbol{i}_l \quad (14)$$

则质点在曲线上运动时力场所做的功为

$$W(\boldsymbol{v}) = \int_l x^p y^q \boldsymbol{i}_l \cdot d\boldsymbol{l} = \int_{l(s)} x^p y^q ds = u_{pq} \quad (15)$$

(15)式的  $u_{pq}$  定义为曲线  $l$  的  $p+q$  阶矩.

比较(14)式、(6)式和(9)式知, 曲线矩和平面矩的力场具有相同的形式, 力的大小均为曲线上点的单项式, 所不同的是, 平面矩力场方向是确定的, 平行于  $x$  或  $y$  轴, 而曲线矩力场的方向与质点运动方向一致.

有了一笔画曲线矩的定义, 很容易给出非一笔画曲线矩的定义. 设非一笔画曲线可以分解成  $N$  个一笔画曲线  $l_1, l_2, \dots, l_N$ , 则该非一笔画曲线矩可以定义如下:

$$u_{p,q} = \sum_{i=1}^N \int_{l_i(s)} x^p y^q ds \quad (16)$$

当  $N=1$  时, (16)式与(15)式等价. 有了曲线矩, 很容易得到不变曲线矩.

比较(1)式和(16)式, 可以看出, 曲线矩和平面矩的被积函数相同, 同时微分项 ( $ds$  或  $dx dy$ ) 在旋转变换时的雅可比行列式均为 1. 这就使得我们可以运用 Hu 推导平面矩不变性的方法导出不变曲线矩. 下面直接给出结果.

#### (1) 曲线的质心

$$\bar{x} = u_{10}/u_{00} \quad (17)$$

$$\bar{y} = u_{01}/u_{00} \quad (18)$$

则中心曲线矩为

$$c_{pq} = \sum_{i=1}^N \int_{l_i(s)} (x - \bar{x})^p (y - \bar{y})^q ds \quad (19)$$

很显然, 中心曲线矩具有如下性质:

**定理 1** 中心曲线矩具有平移不变性.

(2) 比例归一化 为处理问题方便, 我们使用  $c_{20} + c_{02}$  对曲线矩进行归一:

$$\eta_{pq} = (c_{20} + c_{02})^{-(p+q+1)/3} c_{pq} \quad (20)$$

#### (3) 不变曲线矩

$$\varphi_1 = \eta_{00}$$

$$\varphi_2 = (\eta_{20} - \eta_{02})^2 + 4\eta_{11}$$

$$\varphi_3 = (\eta_{30} - 3\eta_{12})^2 + (3\eta_{21} - \eta_{03})^2$$

$$\varphi_4 = (\eta_{30} + \eta_{12})^2 + (\eta_{03} + \eta_{21})^2$$

$$\varphi_5 = (\eta_{30} - 3\eta_{12})(\eta_{30} + \eta_{12})[(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - 3(\eta_{21} + \eta_{03})^2] \\ + (3\eta_{21} - \eta_{03})(\eta_{21} + \eta_{03})[3(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2]$$

$$\varphi_6 = (\eta_{20} - \eta_{02})[(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2] \\ + 4\eta_{11}(\eta_{30} + \eta_{12})(\eta_{21} + \eta_{03})$$

(21)

$$\varphi_7 = \left. \begin{aligned} &(3\eta_{21} - \eta_{03})(\eta_{30} + \eta_{12})[(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - 3(\eta_{21} + \eta_{03})^2] \\ &- (\eta_{30} - 3\eta_{12})(\eta_{21} + \eta_{03})[3(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2] \end{aligned} \right\}$$

**2. 不变曲线矩的实验验证**

我们分别对数字 3, 4, 5 的不变矩进行了计算。图 4 是数 3, 4 和 5 在不同位置和方向上的照片。这里考虑原图、绕质心旋转 45° 和 135° 的情况。所得到的不变矩结果见表 1。由表 1 可见, 不管数字在什么位置和方向, 所得的不变矩几乎保持不变, 这就从实验上验证了  $\varphi_1 \sim \varphi_7$  的不变性。由于  $\varphi_1 \sim \varphi_7$  是表示曲线物体的不变性特征, 因此可用其进行模式识别, 而且这种识别方法具有平移、旋转不变性。

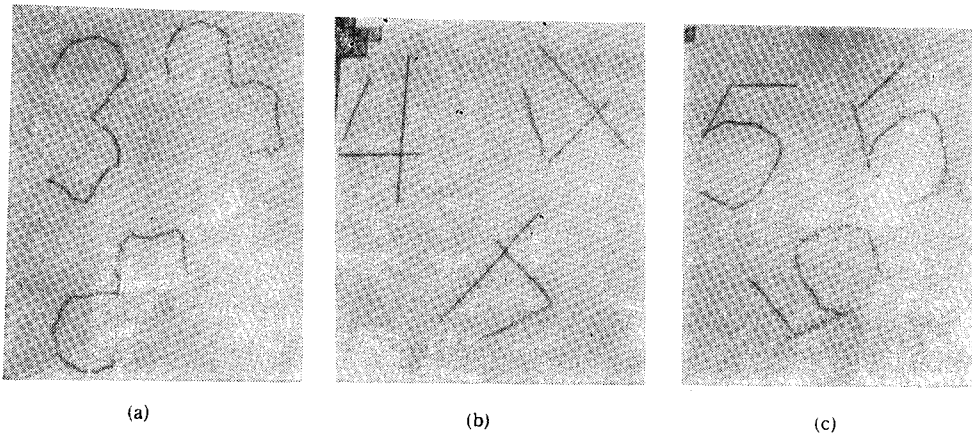


图 4 (a), (b) 和 (c) 分别对应数字 3, 4 和 5 的原图、绕质心旋转 45° 和绕质心旋转 135° 后的照片。各图中左上角为原数字, 右上角为旋转 45° 后的数字, 下方为旋转 135° 后的数字。

表 1 不变曲线矩的实验验证

类别		$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$	$\varphi_6$	$\varphi_7$
数字 3	原图	3.288832	0.554385	0.023244	0.003984	-0.000036	-0.002486	-0.000003
	45°	3.124712	0.544139	0.022152	0.003918	-0.000028	-0.001982	0.000033
	135°	3.150907	0.533540	0.023609	0.004230	-0.000036	-0.002409	-0.000040
数字 4	原图	3.918400	0.046338	0.082736	0.006691	0.000136	0.000884	-0.000049
	45°	4.341873	0.046548	0.087825	0.010352	0.000174	0.002056	-0.000306
	135°	4.402390	0.047191	0.084514	0.009566	0.000129	0.001960	0.000248
数字 5	原图	3.933134	0.153426	0.010370	0.006735	0.000056	0.002631	0.000053
	45°	3.970394	0.156342	0.015541	0.013169	0.000187	0.005002	0.000029
	135°	4.033072	0.152261	0.015757	0.013940	0.000205	0.005274	-0.000045

**3. 与前人轮廓矩的比较**

M. Zhu 等人提出了轮廓矩<sup>[9]</sup>, 定义如下:

$$m_{pq} = \sum_{(x_i, y_i) \in l} x_i^p y_i^q \tag{22}$$

若将(15)式离散化,则有

$$u_{pq} = \sum_{(x_i, y_i) \in l} x_i^p y_i^q \Delta s_i \quad (23)$$

这里,

$$\Delta s_i = \begin{cases} \sqrt{2}, & (x_i, y_i) \text{ 处轮廓 Freeman 编码为 } 1, 3, 5, 7 \\ 1, & (x_i, y_i) \text{ 处轮廓 Freeman 编码为 } 0, 2, 4, 6 \end{cases} \quad (24)$$

可见,前人的轮廓矩((22)式)与我们的方法((23)式)形式上较接近,但前人方法没有修正因子  $\Delta s_i$ , 所给出的矩不是真实的矩,不具有旋转不变性,因此得到的结果是错误的. 例如,对于长度为 100 的直线,使用 Zhu 的方法计算矩时,在  $x$  轴方向上  $\varphi_0 = 100$ ,而转到  $45^\circ$  方向上时  $\varphi_0 = 70$ ,因此不具有旋转不变性,我们方法具有这种不变性. 所以,我们给出的曲线矩更正了前人方法的错误,所得到的不变曲线矩能够保证平移及旋转的不变性.

#### 四、曲线矩的快速计算

由于非一笔画曲线可以分解为一笔画曲线的组合,不失一般性,仅考虑一笔画曲线矩的计算问题.

一笔画曲线矩由(23)式计算. 根据(24)式,(23)式可化为

$$u_{pq} = \sum_{(x_i, y_i) \in l_e} x_i^p y_i^q + \sqrt{2} \sum_{(x_i, y_i) \in l_o} x_i^p y_i^q \quad (25)$$

这里,  $l_e$  表示  $l$  上 Freeman 编码为偶数 (0, 2, 4, 6) 的点集,而  $l_o$  表示  $l$  上 Freeman 编码为奇数 (1, 3, 5, 7) 的点集. 显然有  $l = l_e + l_o$ .

观察(25)式可以发现,曲线矩  $u_{pq}$  的计算量主要是  $l$  上各点单项式  $x_i^p y_i^q$  的计算. 化简单项式的计算是改进曲线矩计算的重要途径,而曲线的连续性使得化简单项式的计算成为可能.

设需要计算所有  $P+Q$  阶曲线矩,即需要计算如下的矩阵阵:

$$M_{PQ} = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0Q} \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1Q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{P0} & u_{P1} & \cdots & u_{PQ} \end{bmatrix} \quad (26)$$

为了计算  $M_{PQ}$ , 我们需要计算下列单项式矩阵:

$$A_{PQ}(x_i, y_i) = \begin{bmatrix} 1 & y_i & y_i^2 & \cdots & y_i^Q \\ x_i & x_i y_i & x_i y_i^2 & \cdots & x_i y_i^Q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_i^P & x_i^P y_i & x_i^P y_i^2 & \cdots & x_i^P y_i^Q \end{bmatrix} \quad (27)$$

由(25)到(27)式知,  $M_{PQ}$  可以通过下式计算:

$$M_{PQ} = \sum_{(x_i, y_i) \in l_e} A_{PQ}(x_i, y_i) + \sqrt{2} \sum_{(x_i, y_i) \in l_o} A_{PQ}(x_i, y_i) \quad (28)$$

由(28)式知,若已求出  $l$  上的  $A_{PQ}(x_i, y_i)$ , 仅需要  $(P+1) \times (Q+1)$  次乘法和

$(P+1) \times (Q+1)N$  次加法就可以计算出  $M_{PQ}$ 。这里  $N$  为曲线上的象素点数。为了计算  $A_{PQ}(x_i, y_i)$ , 先给出几个定义。

**定义 1**  $\alpha$  阶正 Pascal 矩阵 (PPTM) 和  $\alpha$  阶正 Pascal 变换 (PPTT)  $\alpha$  阶 PPTM 是一个  $\alpha \times \alpha$  三角矩阵, 其系数由 Pascal 三角形系数组成。  $\alpha$  阶 PPTM  $P_\alpha^+$  为

$$P_\alpha^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ c_{\alpha-1}^0 & c_{\alpha-1}^1 & \cdots & & & c_{\alpha-1}^{\alpha-1} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$P_\alpha^+$  与  $\alpha$  维矢量(或  $\alpha \times \alpha$  维矩阵)的乘积称为该矢量(或矩阵)的正 Pascal 三角变换 (PPTT)。

**定义 2**  $\alpha$  阶负 Pascal 变换矩阵  $P_\alpha^-$  (NPTM) 和  $\alpha$  阶负 Pascal 三角变换(NPTT)  $P_\alpha^-$  定义为

$$P_\alpha^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ c_{\alpha-1}^0 & -c_{\alpha-1}^1 & \cdots & \cdots & \cdots & (-1)^{\alpha-1} c_{\alpha-1}^{\alpha-1} \end{bmatrix} \quad (30)$$

相应地,  $P_\alpha^-$  与  $\alpha$  维矢量(或  $\alpha \times \alpha$  维矩阵)乘积称为该矢量(或矩阵)的负 Pascal 三角变换 (NPTT)。上述定义中,  $c_i$  表示组合。

用  $P_\alpha^0$  表示  $\alpha \times \alpha$  阶单位矩阵,  $P_\alpha^0$  与矢量(或矩阵)的乘积不需要做任何运算, 称之为恒等变换。

有了上述准备之后, 可以给出  $A_{PQ}$  的迭代计算方法。

由于曲线的连续性, 当前点  $(x_i, y_i)$  与下一点  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  有如下关系:

$$(x_{i+1}, y_{i+1}) = (x_i + \alpha, y_i + \beta) \quad (31)$$

这里  $\alpha$  和  $\beta$  的可能取值为 1, 0 或 -1。

假设当前点  $(x_i, y_i)$  的单项式矩阵  $A_{PQ}(x_i, y_i)$  已知, 则下一点的单项式矩阵  $A_{PQ}(x_{i+1}, y_{i+1})$  可以通过下式计算。

$$A_{PQ}(x_{i+1}, y_{i+1}) = P_{P^1} \cdot A_{PQ}(x_i, y_i) \cdot (P_{Q^2})^t \quad (32)$$

这里

$$u_1 = \begin{cases} +, & \alpha = 1 \\ 0, & \alpha = 0 \\ -, & \alpha = -1 \end{cases}, \quad u_2 = \begin{cases} +, & \beta = 1 \\ 0, & \beta = 0 \\ -, & \beta = -1 \end{cases} \quad (33)$$

(32) 式中的  $t$  表示转置。(32) 式可以写成另一种形式

$$A_{PQ}(x_{i+1}, y_{i+1}) = [P_{Q^2} \cdot (P_{P^1} \cdot A_{PQ}(x_i, y_i))]^t \quad (34)$$

(32)式到(34)式表明, 单项式矩阵可以通过 PPTT, NPTT 和恒等变换来实现。由于恒等变换不需要做任何运算, 因此仅考虑 PPTT 和 NPTT 的实现, 即考虑  $P_\alpha^+$  和  $P_\alpha^-$  与矩阵的乘积。很幸运, PPTT 和 NPTT 可以用我们提出的一种简单的 Systolic 结构来实

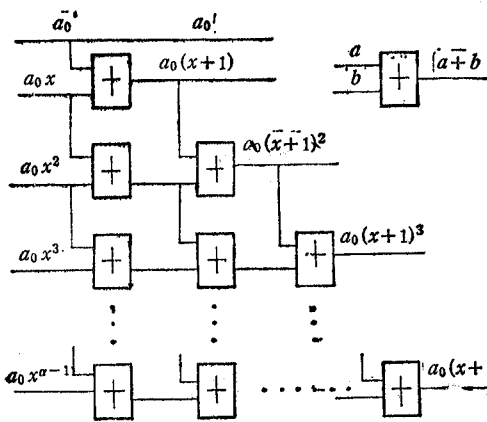


图 5 实现 PPTT 的框图

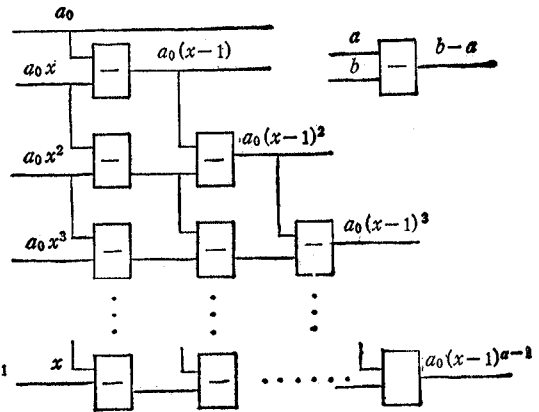


图 6 实现 NPTT 的框图

现<sup>[7]</sup>。实现结构见图 5 和图 6。

由(32)式到(34)式以及图 5 和图 6 知,只要曲线上起始点单项式矩阵已知,则所有点的单项式矩阵可以仅通过加法计算出来。

最后分析一下计算复杂度。设曲线上象素点数为  $N$ , 从曲线的起点走到终点, 在  $x, y$  方向上变化的象素数分别为  $N_x, N_y$ , 同时为简单起见设  $P = Q$ 。

计算矩分为两步: (1) 单项式矩阵  $A_{P,Q}$  的计算; (2) 在  $A_{P,Q}(x, y)$  求出后, 求矩的求和计算。  $A_{P,Q}$  计算需要  $P^2 - 1$  次乘法(计算初始矩阵  $A_{P,Q}(x_0, y_0)$ ) 和  $(1/2) P^2(P - 1)(N_x + N_y)$  次加法(进行 Pascal 变换(迭代计算)), 而求矩的求和运算需  $P^2 N$  次加法, 同时(28)式中的乘  $\sqrt{2}$  需要  $P^2$  次乘法。由于  $N_x \leq N, N_y \leq N$ , 因此总的计算复杂度为

$$\text{加法次数: } P^2(P - 1)N + P^2 N = P^3 N$$

$$\text{乘法次数: } 2P^2 - 1$$

通常, 仅需要计算低阶矩, 因此  $P$  较小, 所需要的乘法次数与曲线上象素点数  $N$  比较(直接计算曲线矩的方法所需要的乘法次数正比于象素数  $N$ ) 可以忽略。所以, 计算曲线矩几乎不需要乘法。这使得我们的算法实现简单, 速度快。

## 五、结 束 语

本文从理论上统一了平面不变矩和付里叶描述子识别方法, 然后提出了曲线矩及其不变性, 并给出了实验验证。曲线不变矩不仅能够用来识别由封闭曲线构成的二值图象, 同时可以用来识别任意曲线段构成的物体, 从而使其在汉字和其它字符识别中有着广泛的应用潜力。最后, 本文给出了曲线矩计算的巧妙算法, 它使得曲线矩计算十分简单, 非常易于实现。

## 参 考 文 献

[1] M. K. Hu, *IRE Trans. on IT*, IT-8(1962)2, 179—187.



- [ 2 ] Y. S. Abu-Mostafa et al., *IEEE Trans. on PAMI*, **PAMI-6**(1984)5, 698—706.
- [ 3 ] Y. S. Abu-Mostafa et al., *IEEE Trans. on PAMI*, **PAMI-7**(1985)1, 46—55.
- [ 4 ] C. H. Lo et al., *IEEE Trans. on PAMI*, **PAMI-11**(1989)10, 1053—1064.
- [ 5 ] M. Hatamian, *IEEE Trans. on ASSP*, **ASSP-34**(1986)3, 546—553.
- [ 6 ] D. Cyganski, Solving for the General Linear Transformation Relating 3-D Objects from the Minimum Moments, SPIE Vol. -1002, Intel Robots and Computer Vision, Boston, (1988), pp. 204—211.
- [ 7 ] B. C. Li (李炳成), Jun Shen (沈俊), *Pattern Recognition*, **24**(1991)8, 807—813.
- [ 8 ] L. Gupta et al., *Pattern Recognition*, **20**(1987)3, 267—272.
- [ 9 ] M. Zhu et al., *Pattern Recognition Letter*, **9**(1989)2, 175—180.
- [ 10 ] C. S. Lin et al., *Pattern Recognition*, **23**(1990)8, 535—545.

## CURVE MOMENT AND ITS INVARIANTS

Li Bingcheng    Shen Jun

(Southeast University, Nanjing 210018)

**Abstract**        The curve moment and curve moment invariants are proposed, which are suitable to be used not only in the pattern recognition of closed shapes, but also in that of any curved objects. By using the proposed moments, some errors of the known methods are corrected. Finally, a simple algorithm is proposed to calculate curve moments.

**Key words**        Pattern recognition; Moment invariants; Contour moment; Curve moment; Pascal transform