

## 基于多谱图叠加阈值的抑制 WVD 交叉项的新方法

李雨青<sup>①</sup> 水鹏朗<sup>②</sup> 林 英<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(西安电子科技大学理学院数学系 西安 710071)

<sup>②</sup>(西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室 西安 710071)

**摘要** 本文提出了一种抑制Wigner-Ville分布(WVD)交叉项的新方法。首先对多幅具有不同时-频分辨率的谱图进行叠加,然后对叠加结果进行阈值处理,确定WVD自项在时频平面的支撑区域。最后,用该区域的示性函数乘以WVD得到一个新的时频分布。不同于传统的抑制交叉项的核函数方法,该方法抑制交叉项的同时,保持WVD了高时频聚集性。实验结果表明,该方法对由多个LFM信号构成的多分量信号和非线性调频信号都非常有效。

**关键词** Wigner-Ville 分布, 谱图, 交叉项, 自项, 阈值处理

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2006)08-1435-04

## A New Method to Suppress Cross-Terms of WVD via Thresholding Superimposition of Multiple Spectrograms

Li Yu-qing<sup>①</sup> Shui Peng-lang<sup>②</sup> Lin Ying<sup>③</sup>

<sup>①</sup>(Department of Mathematics, Science School, Xidian University, Xi'an 710071, China)

<sup>②</sup>(Key Lab. for Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071, China)

**Abstract** In this paper, a new method is proposed to suppress the cross-terms of Wigner-Ville Distribution (WVD), which is based on thresholding the superimposition of multiple spectrograms. First, the spectrograms with different time-frequency resolutions are superimposed and then the superimposition is thresholded to localize the auto-term support region of the WVD. Secondly, the WVD is multiplied by the indication function of the region. In this way, a new Time-Frequency Distribution (TFD) is obtained. Unlike the traditional kernel function methods to suppress cross terms, our method not only reduces the interfering cross-terms but also preserves the superb time-frequency concentration of the WVD. The experimental results show that the method is very effective for both the multicomponent signals consisted of the LFM's and nonlinear frequency modulation chirp signals.

**Key words** Wigner-Ville Distribution(WVD), Spectrogram, Cross-terms, Auto-terms, Thresholding

### 1 引言

相对于平稳信号,非平稳信号的存在更为普遍,应用也更为广泛,时频分析是分析、处理非平稳信号的重要工具之一。非平稳信号的时频分析工具主要包括两类:以短时 Fourier 变换和小波变换为代表的线性方法和以 Wigner-Ville 分布和 Cohen 类时频分布为代表的二次(或双线性)方法。短时 Fourier 变换通过对信号加窗、Fourier 变换得到信号在不同时间段各频率分量的强度。时间窗越窄,时间分辨率越高而频率分辨率越低;反之亦然。短时 Fourier 变换的模平方,谱图,描述了信号在时频平面上的能量分布。然而,谱图的时频联合分辨率受到的测不准原理的限制,也不可能同时得到高的时间和频率分辨率。Wigner-Ville 分布(WVD)是一个重要的双线性时频分布,对线性调频信号(LFM)提供了最高的时频联合分辨率并且具有许多好的数学性质。但由于双

线性,多分量信号的 WVD 存在严重的交叉项干扰,阻碍了对信号有效分析、解释和各分量参数的提取。因此,抑制 WVD 交叉项、研究新的时频分布一直是时频分析研究中的一个活跃的领域。

抑制交叉项的主要方法是核函数方法,等价于时频域用二维低通滤波器平滑WVD。这是由于WVD的自项和交叉项有完全不同特点,自项是正的和慢变的,而交叉项是震荡型的。但平滑滤波抑制交叉项的同时也降低了时频分辨率和聚集性<sup>[1,2]</sup>。Baraniuk and Jones<sup>[3,4]</sup>提出了自适应核函数方法,抑制交叉项的同时保留了较高的时频分辨率和聚集性,但计算量较大。短时Fourier变换是线性变换,满足叠加原理,没有交叉项。谱图的时频分辨率有限,用单幅谱图确定自项支撑区域而去除交叉项的方法有一定的局限性,主要表现在:可以消除远离自项的交叉项,但对自项附近的交叉项效果差。另一个很少引起注意的事实是:谱图也存在交叉项干扰<sup>[5]</sup>,但表现方式与WVD完全不同,交叉项位于自项支撑区域内并可以形成比较明显的“洞”。为了弥补以上两个不足,我

2004-12-16 收到, 2005-06-13 改回  
国家自然科学基金(60272058), 国家优秀博士学位论文作者专项基金(200139)和教育部高校青年教师奖基金资助课题

们利用多个具有不同时频分辨率的谱图叠加和阈值处理去确定 WVD 的自项支撑区域, 然后用支撑区域的示性函数乘以 WVD。从而得到了一个具有很少交叉项的时频分布。这种分布与 WVD 具有相同的时频分辨率和聚集性但 WVD 分布所具有的一些数学性质的严格性可能被破坏。但对于多分量信号分析, 关键在于提取各分量的信息, 而不在于严格恢复各分量和保持严格的数学性质。

## 2 谱图的时频性质

短时 Fourier 变换是一种常用的线性时频分析方法, 由一个具有时频局部特性的窗函数确定, 表达式为

$$S_f(t, \omega) = \int f(u)g^*(t-u)e^{-i\omega u} du \quad (1)$$

$S_f(t, \omega)$  的模平方是谱图, 即  $P_f(t, \omega) = |S_f(t, \omega)|^2$ 。短时 Fourier 变换的时间、频率和时-频分辨率由窗函数的时宽  $\sigma_t$ 、带宽  $\sigma_\omega$  和时宽-带宽积确定。由于时宽-带宽积  $\sigma_t \sigma_\omega$  受不确定原理<sup>[6]</sup>的制约 ( $\sigma_t \sigma_\omega > 1/2$ ), 谱图不能同时达到高的时间和频率分辨率。窄的窗函数提供了高的时间分辨率, 频率分辨率低, 而宽的窗函数正好相反。然而, 对一些信号, 如瞬时频率为  $\omega(t) = \omega_0 + \gamma t$  线性调频信号, 窗函数的时宽、带宽和时宽-带宽积不能完全刻画谱图对它的时频分辨率。信号等于信号的 WVD 与窗函数的 WVD 的卷积:

$$P_f(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \iint W_f(u, \xi) W_g(t-u, \omega-\xi) du d\xi \quad (2)$$

而纯线性调频信号的 WVD 是线脉冲, 谱图将信号能量扩散到一个瞬时频率线为中心的带形区域上, 区域的宽度描述了谱图对信号的时频分辨率, 它依赖于直线和窗函数 WVD 等高线的相对位置。一般情况下,  $W_g$  的等高线是一组同心椭圆。椭圆长轴与调频斜率相近时, 带形区域窄, 分辨率高。为了有效表示由不同调频率信号构成的多分量信号, 多参数的 Chirplet 变换<sup>[6,7]</sup>被提出, 这些参数包括时移、频移、尺度因子和调频率。当尺度参数和调频率固定时, Chirplet 变换的二维切片相当于一个高斯包络的调制窗的短时傅里叶变换。窗函数的形式和它的 WVD 如下<sup>[1]</sup>:

$$g_{\sigma_t, \beta}(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma_t^2} + j\frac{\beta}{2}t^2\right) \quad (3)$$

$$W_{g_{\sigma_t, \beta}}(t, \omega) = \frac{1}{\pi} \exp\left\{-\left[\frac{t^2}{\sigma_t^2} + \sigma_t^2(\omega - \beta t)^2\right]\right\} \quad (4)$$

于是, 对于调频率接近于  $\beta$  的 LFM 信号,  $\sigma_t$  越大, 谱图中能量越集中在瞬时频率附近。取  $\beta=1$  和  $\sigma_t=2$ , LFM 信号  $x_1(t) = \exp(0.55t^2 j)$  和  $x_2(t) = \exp(-0.5t^2 j)$ , 相应的谱图如图 1 所示。前者的能量很集中, 而后的能量严重扩散。

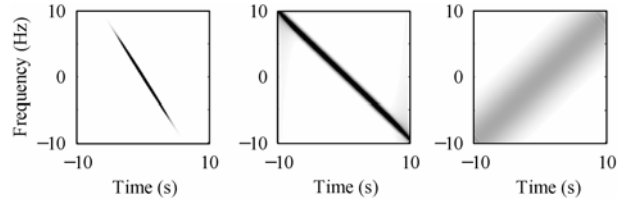


图 1 窗函数的 WVD 和两个 LFM 信号的谱图

## 3 WVD 交叉项的抑制新方法

WVD 中, 自项是恒正和慢变的, 而交叉项是振荡型和快变的。交叉项的核函数抑制技术充分利用了这一差别, 利用模糊域乘积核或者时频域低通滤波抑制交叉项, 并且可以通过选取合适的乘积核保证时频分布严格满足一些数学性质。然而, 低通滤波也明显降低了时频分辨率和时频聚集性。本文考虑先对多个谱图进行叠加、阈值处理确定信号 WVD 的自项的支撑区域, 消除支撑区域外的交叉项干扰。该方法明显的优点在于: 抑制交叉项干扰的同时保证了原来 WVD 的高时频分辨率和聚集性, 但得到的时频分布不再严格满足一些数学性质。

### 3.1 多谱图叠加分布的性质

短时 Fourier 变换作为一种有效的线性时频变换, 虽然时频分辨率受到限制, 但在对多分量信号进行分析时, 满足叠加原理, 不产生交叉项。相应的谱图描述了信号的能量分布。像 WVD 一样, 谱图同样存在干扰项(或交叉项)<sup>[5]</sup>但表现方式与 WVD 的交叉项不同。WVD 的交叉项在时频平面上的支撑区域一般与自项的支撑区域是分离的; 而谱图的交叉项位于自项支撑区域内, 典型的表现是在自项支撑区域内形成“洞”。这些“洞”的来源源于各分量短时 Fourier 变换的耦合。为了说明这点, 考虑两分量信号  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$  的谱图

$$P_x(t, \omega) = |S_{x_1}(t, \omega) + S_{x_2}(t, \omega)|^2$$

如果  $(t_0, \omega_0)$ ,  $|S_{x_1}(t, \omega)| = |S_{x_2}(t, \omega)|$  较大但相位正好相反, 谱图在该点的值为零, 但两个信号分量在该点明显分布着能量。这种耦合形成了谱图自项支撑区域内明显的“洞”, 但耦合对窗函数的变化很敏感。具有不同窗函数的多幅谱图叠加后, 这种由耦合形成的“洞”可以避免, 这对确定自项的支撑区域是有利的。多分量信号常常包含了不同调频率的 LFM 信号分量, 一些复杂的非线性调频信号(Chirp 信号)也可以用多段不同调频率 LFM 信号组合近似。按照前面的分析, 单幅谱图仅能对部分调频率的 LFM 信号提供高分辨率, 而不同调频率窗函数的多幅谱图的叠加可以对各种调频率的信号提供高的时频分辨率。

下面主要考虑离散信号的谱图和 WVD 分布, 相应的结果很容易扩展到连续时间情况。采样值  $f(n) = s(n\Delta t)$ ,  $0 \leq n < N$  是信号  $s(t)$  的离散采样值, 相应的离散短时 Fourier 变换

$$S_{f, L_t, \beta}(n, k) = \sum_{m=0}^{N-1} f(m) g_{L_t, \beta}^*(m-n) \exp\left(-\frac{2\pi mk}{N}\right) \quad (5)$$

其中

$$g_{L_i, \beta}(n) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi L_i^2}} \exp\left(-\frac{n^2}{2L_i^2} + j\frac{\beta}{2}n^2\right) \quad (6)$$

是连续时间窗函数的离散采样形式,  $L_i = \sigma_i / \Delta t$ ,  $\beta = \eta \Delta t^2$ , 相应的谱图记作  $P_{f, \sigma_i, \beta}(n, k)$ 。

很多应用中, 信号中各分量的调频率在某一个固定的动态范围内变化。例如, 在雷达信号中, 回波信号的调频率由目标的径向加速度确定, 而最大的径向加速度与发动机的最大推力有关。因此, 可以从问题背景确定回波信号中调频率的变化范围。不失一般性, 假设信号  $f(n)$  各分量的调频率的变化范围是  $\gamma \in [-\alpha, \alpha]$ 。多幅谱图中, 窗函数的调频率在该区间上等间隔取值, 即

$$\beta_i = -\alpha + i\Delta\beta, \quad \Delta\beta = 2\alpha/I, \quad i = 0, 1, \dots, I \quad (7)$$

而  $L_i$  可以预先给定。这样可以得到信号的  $I+1$  幅谱图, 每幅谱图对部分的信号分量提供了高的时频分辨率。叠加这  $I+1$  幅谱图, 得到信号的一个新时频能量分布图, 表示为

$$D_f(n, k) = \frac{1}{I+1} \sum_{i=0}^I |S_{f, L_i, \beta_i}(n, k)|^2 \quad (8)$$

窗函数的能量等于 1 时, 叠加是保持信号能量的, 因此它也描述了信号在时频平面的能量分布。并且与单幅谱图相比, 能量更集中分布在各分量瞬时频率附近。按照式(2), 也可以解释叠加谱图的高分辨特性, 叠加谱图等于信号的 WVD 与一个叠加核的卷积, 即

$$D_f(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \iint W_f(u, \xi) \left\{ \frac{1}{I+1} \sum_{i=0}^I W_{g_{L_i, \beta_i}}(t-u, \omega-\xi) \right\} du d\xi$$

如图 2 所示, 单个窗函数的 WVD 的能量分布在一个长椭圆区域上, 而多幅谱图叠加的核呈“图钉”状, 能量分布很集中。

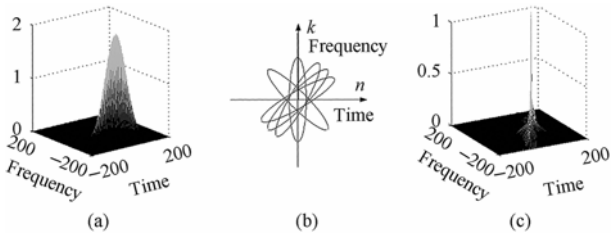


图 2 (a)单个窗函数的 WVD

(b) 6 个不同窗函数的叠加示意图 (c) 6 个窗函数的叠加核

### 3.2 WVD 自项支撑区域估计

因此, 通过对  $D_f(n, k)$  的简单阈值处理, 很容易确定 WVD 中各信号分量自项在时频平面上的支撑区域。不失一般性, 假定信号由  $P$  个分量构成并且含有加性观测噪声, 即

$$f(n) = \sum_{p=1}^P f_p(n) + w(n) \quad (9)$$

其中  $w(n)$  一般假定为零均值高斯白噪声, 方差为  $\sigma_w^2$ 。自项支撑区域由下面的阈值过程确定:

$$\Omega = \{(n, k) : D_f(n, k) \geq \eta\} \quad (10)$$

$\eta$  是一个阈值门限, 门限大小与信号和信噪比有关。具体确

定方法如下:

$$\eta = \max\left\{\mu : \sum_{D_f(n, k) \geq \mu} D_f(n, k) \geq \gamma \sum_{n=0}^{N-1} |f(n)|^2\right\}$$

这个公式的意义在于阈值门限使得信号  $100\gamma\%$  的能量位于所确定的区域内, 并且在满足该条件情况下使区域尽可能小, 以便消除 WVD 中的交叉项。数值实验中  $\gamma$  一般选在 0.70 和 0.98 之间。另外, 考虑到噪声的影响

$$\eta = \max\{\eta_1, 9\sigma_w^2\} \quad (11)$$

也就是说, 按照对正态分布的  $3-\sigma$  原则, 消除了纯噪声引起的系数对确定区域的影响。但注意, 当信噪比较低时, 由于门限过高, 一些能量分布不集中的小分量将被漏检。同样, 当  $\gamma$  取值偏小时, 一些小分量可能漏检; 当  $\gamma$  取值很接近 1 时, 由于得到的支撑区域过大, 对后面的抑制交叉项不利。虽然目前还没有确定  $\gamma$  的更有效方法, 但除了个别极端情况(如一个信号分量很强, 一个信号分量很弱), 取  $\gamma$  在 0.70 和 0.98 之间, 都可以获的较为满意的结果。

### 3.3 WVD 分布交叉项的抑制

离散信号的 WVD 的计算可以通过数据插值, 离散 DFT(或 FFT)快速实现<sup>[8]</sup>。具体过程如下: 设  $f(n), 0 \leq n < N$  是一个长度为  $N$  的离散信号, 对信号通过插值扩展为长度  $2N$  的信号  $f_i(n)$ , 插值通过 DFT 和逆变换 IDFT 实现。于是, 信号的离散 WVD 分布为

$$W_f(n, k) = \sum_{p=-N}^{N-1} f_i(2n+p) f_i^*(2n-p) \exp\left(-\frac{j2\pi kp}{N}\right) \quad (12)$$

这样可以避免 WVD 离散化所产生的混叠<sup>[8]</sup>。

由式(10), 确定了信号各分量自项的支撑区域, 用该支撑区域的示性函数乘以 WVD 分布, 即

$$MW_f(n, k) = \chi_\Omega(n, k) W_f(n, k), \quad \chi_\Omega(n, k) = \begin{cases} 1, & (n, k) \in \Omega \\ 0, & (n, k) \notin \Omega \end{cases} \quad (13)$$

这样在分布  $MW_f$  中, 区域  $\Omega$  外的交叉项被完全剔除, 而 WVD 所具有的高分辨特性和时频聚集性没有受到影响。但由于阈值处理的非线性特征, 诸如边缘分布等一些 WVD 所具有的数学性质只能近似成立。

## 4 数值实验

下面用两个不同的测试信号验证方法的有效性。一个测试信号是由 3 个 LFM 信号构成的多分量信号; 一个是瞬时频率服从正弦规律变化的非线性调频信号。为了说明效果, Cohen 类时频分布中 Choi-Williams<sup>[1]</sup> 分布也被画出, Choi-Williams 分布是一个典型的交叉项减少的分布。

测试信号 1 的表达式为  $y(t) = e^{2\pi j(391t-145t^2)} + e^{2\pi j(50t+100t^2)} + e^{2\pi j(200t+120t^2)} + n(t), t \in [0, 1]$ 。两种方法的处理结果如图 3 所示。Chio-Williams 分布抑制了交叉项, 但分辨率明显下降。而本文方法去掉了所有远离自项的交叉项, 并且自项能量很紧密地集中在各分量瞬时频率的附近, 效果良好。在数据计

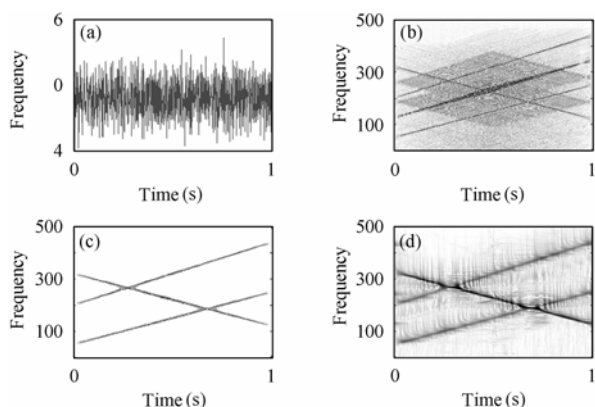


图 3 待分析信号的实部, WVD 分布,

叠加谱图交叉项抑制结果和 Chio-Williams 分布

- (a) 待分析信号的实部 (b) 信号的 WVD 分布  
(c) 叠加谱图交叉项抑制结果 (d) Chio-Williams 分布

算中, 平均信噪比为 8.06dB, 频率范围在 0-500Hz, 采样频率 1000Hz, 调频率范围  $(-0.002, 0.002)$ ,  $I = 15$ ,  $\Delta\beta = 0.00027$ ,  $L_t = 51$ ,  $\gamma = 0.74$ 。

测试信号 2 的表达式为  $y(t) = e^{2\pi j(-32\sin(7t) + 239t)} + n(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ 。平均信噪比 9.24dB, 频率范围 0-500Hz, 采样频率 1000Hz, 调频率范围  $(-0.0098, 0.0098)$ ,  $I = 15$ ,  $\Delta\beta = 0.0013$ ,  $L_t = 28$ 。处理结果如图 4 所示。可以看出, 本文方法的效果也非常明显。

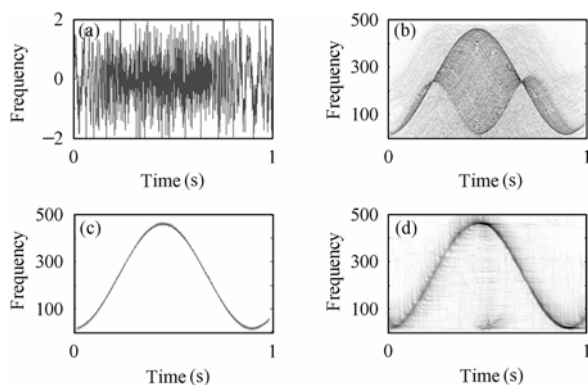


图 4 测试信号 2 的实部, WVD 分布,

叠加谱图抑制交叉项的结果和 Chio-Williams 分布

- (a) 测试信号 2 的实部 (b) 测试信号 2 的 WVD 分布  
(c) 叠加谱图抑制交叉项的结果 (d) Chio-Williams 分布

## 5 结果与讨论

本文给出了一种抑制 WVD 交叉项的新方法——多幅谱图叠加阈值方法。这种方法采用了简单的非线性阈值处理确

定 WVD 中各信号分量自项支撑区域, 这与传统的核函数方法中利用线性平滑滤波平滑交叉项的方法不同。本文方法的优点在于可以完全去掉大部分交叉项并保持了 WVD 的高分辨特性。但由于非线性处理, 很难严格满足时频分布的一些数学性质。另外, 在一个多分量信号中, 如果强分量比弱分量强得多, 必须采用接近于 1 的参数  $\gamma$  防止弱分量被漏掉, 这使确定的自项支撑区域比较大, 交叉项抑制性能下降。因此, 这种方法如何有效处理由强分量、弱分量组成的多分量信号仍是一个有待进一步研究的问题。

## 参考文献

- [1] Cohen L. Time-Frequency Analysis. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1995:136-148.
- [2] Jeong J, Williams W J. Kernel design for reduced interference distributions. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1992, 40(2): 402-412.
- [3] Baraniuk R G, Jones D L. A signal-dependent time-frequency representation: Optimal kernel design. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1993, 41(4): 1589-1602.
- [4] Baraniuk R G, Jones D L. A signal-dependent time-frequency representation: Fast algorithm for optimal kernel design. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1994, 42(1): 134-146.
- [5] Jeong J-C, Williams W J. Mechanism of the cross-terms in spectrograms. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1992, 40(10): 2608-2613.
- [6] Mann S, Haykin S. The chirplet transform: Physical considerations. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1995, 43(11): 2745-2761.
- [7] Bultan A. A four-parameter atomic decomposition of chirplets. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1999, 47(3): 731-745.
- [8] Clasen T C, Mecklenbrauker W F. The aliasing problem in discrete-time Wigner distribution. *IEEE Trans. on Acoust., Speech, and Signal Processing*, 1983, 31(6): 1067-1072.

李雨青: 女, 1980 年生, 硕士生, 研究方向为小波分析及其在信号处理中的应用。

水鹏朗: 男, 1967 年生, 博士生导师, 研究方向为小波理论、多速率滤波器组设计和图像处理。

林英: 女, 1982 年生, 硕士生, 研究方向为小波分析及其在信号处理中的应用。