谐波恢复中累量估计的强收敛问题 [1]

李宏伟 袁保宗 *

(中国地质大学数理系，武汉 430074)
*(北方交通大学信息科学研究所 北京 100044)

摘 要 本文讨论有噪声污染的谐波信号累量的单一记录估计. 证明了样本自相关函数的强收敛性, 并得到了强收敛速度。对于四阶矩估计, 给出了四阶遍历条件. 在这些遍历条件下, 建立了四阶矩和四阶累量样本估计的强收敛性, 并得到了强收敛速度. 最后给出了数值仿真结果.

关键词 谐波恢复, 四阶累量, 单一记录估计, 遍历条件, 收敛速度

中图号 TN911.7

1 引 言

加性噪声中谐波恢复是信号处理领域中的一个典型问题. 高阶统计量理论的发展和应用 [1,2] 使得有色噪声中谐波恢复方法在近年来发展得相当丰富. 大量的研究表明, 无论加性噪声是高斯有色的 [1,3−6] 还是非高斯有色的 [7−9], 累量都是讨论谐波恢复问题的一种有力的工具.

一般地, 加性噪声中的实谐波信号建模为

$$x(n) = s(n) + v(n), \tag{1}$$

$$s(n) = \sum_{k=1}^{p} A_k \cos(\omega_k n + \phi_k), \tag{2}$$

并且下列假设成立,

AS1 频率 ω_k 在 $(0, \pi)$ 内取互不相等的值;

AS2 相位 ϕ_k 是 $[-\pi, \pi)$ 上均匀分布的随机变量, 且是相互独立的;

AS3 加性噪声 $v(n)$ 是与 ϕ_k 独立的零均值平稳实过程, 其前八阶累量是绝对可和的.

累量绝对可和的条件是常用的 [10] . 这里对加性噪声 $v(n)$ 的分布和颜色未作要求, 只要求其累量是绝对可和的. 正态过程和线性过程均可满足 AS3[10], 特别地, 若 $v(n)$ 是由八阶矩有限的 i.i.d. 高斯噪声驱动的稳定线性时不变系统的输出 [11], 则 $v(n)$ 的前八阶累量是绝对可和的。

在条件 AS1–AS3 下, $x(n)$ 的自相关函数和四阶累量分别为 [2,4]

$$R_x(\tau) = R_s(\tau) + R_v(\tau) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} A_k^2 \cos(\omega_k \tau) + R_v(\tau), \tag{3}$$

$$c_{4x}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) = -\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{p} A_k^4 \Big\{\cos[\omega_k(\tau_1-\tau_2-\tau_3)] + \cos[\omega_k(\tau_2-\tau_1-\tau_3)] + \cos[\omega_k(\tau_3-\tau_1-\tau_2)]\Big\} + c_{4v}(\tau_1,\tau_2+\tau_3). \tag{4}$$

[1] 1997-08-01 收到, 1999-01-09 定稿

当 $s(n)$ 的相位是确定性的常数时，R_x 和 c_{4x} 分别表示二阶和四阶混合累量[11]。尽管 R_x 和 c_{4x} 在随机相位和常数相位情形表示不同的统计量 (累量和混合累量)，但它们的表达式却是一致的。

上述结果在基于累量的谐波恢复方法中是常用的[2,4]。在基于累量的算法的具体实现中，我们往往要从观测数据出发获得谐波信号累量的估计. 由此产生的一个基本问题是，谐波信号累量的估计是否收敛于其真值？或者说，累量估计是否相容？累量估计的收敛性是基于累量的谐波参数估计的基础，累量估计的收敛速度直接影响参数估计的精度.

由于随机相位的假设，累量的相容估计可以由多重记录的观测数据通过总体平均获得. 对于单一记录的观测数据，是否能获得累量的相容估计是值得考虑的. 在常数相位的假设下，文献 [11] 提出了混合累量的概念，并讨论了其相应的单一记录估计的强收敛性，但未讨论收敛速度. 另一方面，在实际应用中，往往并不知道相位是随机的还是确定性的，有时也只有单一记录可用，这就要求在一个关于相位统一的结构下来讨论累量的单一记录估计. 我们考虑如下的单一记录估计：

$$\hat{R}_x(\tau)\triangleq\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)x(n+\tau), \tag{5}$$

$$\hat{c}_{4x}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\triangleq\hat{m}_{4x}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)-\hat{R}_x(\tau_1)\hat{R}_x(\tau_3-\tau_2)-\hat{R}_x(\tau_2)\hat{R}_x(\tau_3-\tau_1)-\hat{R}_x(\tau_3)\hat{R}_x(\tau_2-\tau_1), \tag{6}$$

其中

$$\hat{m}_{4x}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\triangleq\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)x(n+\tau_1)x(n+\tau_2)x(n+\tau_3). \tag{7}$$

在随机相位情形下，(5) 和 (6) 式分别表示 $x(n)$ 的二阶和四阶累量的单一记录估计. 在常数相位情形下，(5) 和 (6) 式分别表示 $x(n)$ 的二阶和四阶混合累量的单一记录估计[11].

与文献 [11] 不同，本文在一类更为广泛的噪声假设下，讨论谐波信号的二阶和四阶累量 (或混合累量) 单一记录估计的强收敛性. 对于 $\hat{R}_x$，得到了其强收敛速度. 对于 $\hat{m}_{4x}$ 和 $\hat{c}_{4x}$，在遍历条件下，证明了其强收敛性，特别地，得到了相应的强收敛速度. 并且，通过数值仿真实例对上述结果进行了说明.

2 几个引理

在这一节，我们给出几个有关谐波信号和噪声过程样本平均的强收敛速度的引理，这些结果将在后面对累量样本估计的收敛性讨论中被应用.

引理 1 设 $v(n)$ 为零均值平稳实过程，且其前八阶累量是绝对可和的，则对于 $\gamma<1/4$ 有

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}v(n)v(n+\tau)-R_v(\tau)\right|\overset{\text{a.s.}}{=\!=}o\left(\frac{1}{N^\gamma}\right) \tag{8}$$

和

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}v(n)v(n+\tau_1)v(n+\tau_2)v(n+\tau_3)-m_{4v}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\right|\overset{\text{a.s.}}{=\!=}o\left(\frac{1}{N^\gamma}\right), \tag{9}$$

其中 a.s. 表示几乎处处收敛 (或强收敛), $m_{4v}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\triangleq E\{v(n)v(n+\tau_1)v(n+\tau_2)v(n+\tau_3)\}$ 为 $v(n)$ 的四阶矩。

引理 2 设 $v(n)$ 为零均值平稳实过程且满足 AS3, $s(n)$ 为满足 (2) 式的实谐波信号，则对于 $\gamma<1/4$ 有

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}v(n)s(n+\tau)\right| \overset{\text{a.s.}}{=} o\left(\frac{1}{N^\gamma}\right) \tag{10}$$

和

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}v(n)s(n+\tau_1)s(n+\tau_2)s(n+\tau_3)\right| \overset{\text{a.s.}}{=} o\left(\frac{1}{N^\gamma}\right). \tag{11}$$

(10) 式和 (11) 式在相位为常数时亦成立。

引理 3 设 $v(n)$ 为零均值平稳实过程且满足 AS3, $s(n)$ 为满足 (2) 式的实谐波信号，则对于 $\gamma<1/4$ 有

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}v(n)v(n+\tau_1)s(n+\tau_2)s(n+\tau_3)-R_v(\tau_1)R_s(\tau_3-\tau_2)\right| \overset{\text{a.s.}}{=} o\left(\frac{1}{N^\gamma}\right) \tag{12}$$

和

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}v(n)v(n+\tau_1)v(n+\tau_2)s(n+\tau_3)\right| \overset{\text{a.s.}}{=} o\left(\frac{1}{N^\gamma}\right). \tag{13}$$

(12) 式和 (13) 式在相位为常数时亦成立。

引理 1— 引理 3 的证明可以利用文献 [12] 的定理 1 完成，详细证明略去。

3 样本自相关的强收敛速度

本节讨论噪声中谐波信号自相关函数估计的强收敛性质，这些性质将在讨论四阶累量估计的强收敛性质时被应用。

设

$$D_N(\lambda,\lambda_0)\triangleq\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\cos(n\lambda+\lambda_0)=\begin{cases}\cos\left[\dfrac{(N-1)\lambda}{2}+\lambda_0\right]\dfrac{\sin[N\lambda/2]}{N\sin[\lambda/2]}, & \lambda\neq 0(\bmod 2\pi);\\ \cos\lambda_0, & \lambda=0(\bmod 2\pi).\end{cases} \tag{14}$$

注意到 (5) 式, $x(n)$ 的自相关函数估计可改写为

$$\hat{R}_x(\tau)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\Big\{s(n)s(n+\tau)+v(n)s(n+\tau)+s(n)v(n+\tau)+v(n)v(n+\tau)\Big\}. \tag{15}$$

由引理 1— 引理 2 可知，对于 $\gamma < 1/4$, 有

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s(n)v(n+\tau) \overset{\text{a.s.}}{=\!=} o\left(\frac{1}{N^{\gamma}}\right), \tag{16}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s(n+\tau)v(n) \overset{\text{a.s.}}{=\!=} o\left(\frac{1}{N^{\gamma}}\right), \tag{17}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} v(n)v(n+\tau) \overset{\text{a.s.}}{=\!=} R_v(\tau) + o\left(\frac{1}{N^{\gamma}}\right). \tag{18}$$

另一方面，注意到 $0 < \omega_{k_1} + \omega_{k_2} < 2\pi$, 由 (2) 式和 (14) 式 D_N 函数的性质可得

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s(n)s(n+\tau) \overset{\text{a.s.}}{=\!=} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} A_k^2\cos(\omega_k\tau) + O\left(\frac{1}{N}\right). \tag{19}$$

由 (15)-(19) 式和 (3) 式知，对于 $\gamma < 1/4$ 有

$$\hat{R}_x(\tau) - \{R_s(\tau) + R_v(\tau)\} \overset{\text{a.s.}}{=\!=} o\left(\frac{1}{N^{\gamma}}\right). \tag{20}$$

上式说明谐波信号的样本自相关函数是强收敛到其真值的，并且给出了强收敛速度。同时，由上述推导可知，(20) 式对于随机相位和常数相位情形均成立。

4　四阶累量的强收敛性质

本节讨论有噪声污染的谐波信号的累量估计的强收敛性质。在考虑四阶累量估计之前，我们首先考虑无噪声污染的谐波信号的四阶遍历性质。

4.1 $s(n)$ 的四阶遍历条件

在随机相位情形下，不难证明

$$\begin{aligned} m_{4s}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) &\triangleq E\Big\{s(n)s(n+\tau_1)s(n+\tau_2)s(n+\tau_3)\Big\} \\ &= R_s(\tau_1)R_s(\tau_3-\tau_2) + R_s(\tau_2)R_s(\tau_3-\tau_1) + R_s(\tau_3)R_s(\tau_2-\tau_1) \\ &\quad - \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{p} A_k^4\Big\{\cos[\omega_k(\tau_1-\tau_2-\tau_3)] + \cos[\omega_k(\tau_2-\tau_1-\tau_3)] \\ &\quad + \cos[\omega_k(\tau_3-\tau_1-\tau_2)]\Big\}. \end{aligned} \tag{21}$$

上式是随机相位情形下谐波信号 $s(n)$ 的四阶矩表达式。现在考虑单一记录估计 $\hat{m}_{4s}$,

$$\begin{aligned} \hat{m}_{4s}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) &\triangleq \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s(n)s(n+\tau_1)s(n+\tau_2)s(n+\tau_3) \\ &= \frac{1}{8}\sum_{k_1,k_2,k_3,k_4=1}^{p} A_{k_1}A_{k_2}A_{k_3}A_{k_4}\sum_{i=1}^{8}\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} T_i(n)\right\}, \end{aligned} \tag{22}$$

其中 $T_i(n)$ 是由四个函数 $\cos(\omega_{k_1}n+\phi_{k_1})$, $\cos(\omega_{k_2}(n+\tau_1)+\phi_{k_2})$, $\cos(\omega_{k_3}(n+\tau_2)+\phi_{k_3})$ 和 $\cos(\omega_{k_4}(n+\tau_3)+\phi_{k_4})$ 经过积化和差得到的八个函数.

在如下的遍历条件下:

C1 $\omega_k+\omega_l+\omega_m+\omega_n\neq 0(\bmod 2\pi)$,

C2 $\omega_k+\omega_l+\omega_m-\omega_n\neq 0(\bmod 2\pi)$,

C3 $\omega_k+\omega_l-\omega_m-\omega_n=0$ 当且仅当 $k=m, l=n$ 或者 $k=n, l=m$.

利用 (14) 式 D_N 函数的性质, 由 (22) 式经过详细推导不难得到

$$\hat{m}_{4s}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)=m_{4s}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)+O\left(1/N\right). \tag{23}$$

上式给出了 $s(n)$ 的四阶矩样本估计在遍历条件下的强收敛速度。我们注意到 $s(n)$ 的二阶矩 (相关函数) 的样本估计总是强收敛的 (见 (19) 式), 但其四阶矩的样本估计在遍历条件 C1–C3 下才是强收敛的。遍历条件 C1–C3 与常数相位情形下的遍历条件 [11] 是一致的。

4.2 $x(n)$ 的四阶遍历性

考虑有噪声污染的谐波信号 $x(n)$ 的四阶矩估计:

$$\hat{m}_{4x}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\triangleq\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)x(n+\tau_1)x(n+\tau_2)x(n+\tau_3), \tag{24}$$

其中乘积 $x(n)x(n+\tau_1)x(n+\tau_2)x(n+\tau_3)$ 可以分解成十六项, 每项含有 $s(n)$, $s(n+\tau_1)$, $s(n+\tau_2)$, $s(n+\tau_3)$ 和 $v(n)$, $v(n+\tau_1)$, $v(n+\tau_2)$, $v(n+\tau_3)$ 中的四个因子。利用引理 2 和引理 3 可知, 仅含一个 s 或一个 v 的项的样本平均几乎处处等于 $o(1/N^\gamma)$, $\gamma<1/4$. 另一方面, 由引理 3 和引理 1 可得, 对于 $\gamma<1/4$,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{n-1}s(t)s(t+\tau_1)v(t+\tau_2)v(t+\tau_3)\ \stackrel{\text{a.s.}}{=\!=}\ R_s(\tau_1)R_v(\tau_3-\tau_2)+o\left(\frac{1}{N^\gamma}\right), \tag{25}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}s(n)s(n+\tau_2)v(n+\tau_1)v(n+\tau_3)\ \stackrel{\text{a.s.}}{=\!=}\ R_s(\tau_2)R_v(\tau_3-\tau_1)+o\left(\frac{1}{N^\gamma}\right), \tag{26}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}s(n)s(n+\tau_3)v(n+\tau_1)v(n+\tau_2)\ \stackrel{\text{a.s.}}{=\!=}\ R_s(\tau_3)R_v(\tau_2-\tau_1)+o\left(\frac{1}{N^\gamma}\right), \tag{27}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}s(n+\tau_1)s(n+\tau_2)v(n)v(n+\tau_3)\ \stackrel{\text{a.s.}}{=\!=}\ R_s(\tau_2-\tau_1)R_v(\tau_3)+o\left(\frac{1}{N^\gamma}\right), \tag{28}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}s(n+\tau_1)s(n+\tau_3)v(n)v(n+\tau_2)\ \stackrel{\text{a.s.}}{=\!=}\ R_s(\tau_3-\tau_1)R_v(\tau_2)+o\left(\frac{1}{N^\gamma}\right), \tag{29}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}s(n+\tau_2)s(n+\tau_3)v(n)v(n+\tau_1)\ \stackrel{\text{a.s.}}{=\!=}\ R_s(\tau_3-\tau_2)R_v(\tau_1)+o\left(\frac{1}{N^\gamma}\right), \tag{30}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}v(n)v(n+\tau_1)v(n+\tau_2)v(n+\tau_3)\ \stackrel{\text{a.s.}}{=\!=}\ m_{4v}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)+o\left(\frac{1}{N^\gamma}\right). \tag{31}$$

因此，由 (24) 式， (23) 式和 (25)–(31) 式可得，在遍历条件 C1–C3 下，对于 $\gamma < 1/4$,

$$\begin{aligned}\hat{m}_{4x}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) = {} & m_{4s}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) + R_s(\tau_1)R_v(\tau_3-\tau_2) + R_s(\tau_2)R_v(\tau_3-\tau_1) + R_s(\tau_3)R_v(\tau_2-\tau_1) \\ & + R_v(\tau_1)R_s(\tau_3-\tau_2) + R_v(\tau_2)R_s(\tau_3-\tau_1) + R_v(\tau_3)R_s(\tau_2-\tau_1) \\ & + m_{4v}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) + o\left(1/N^{\gamma}\right). \end{aligned} \tag{32}$$

上式给出了遍历条件 C1–C3 下 $x(n)$ 的四阶矩估计的强收敛速度． (32) 式对于随机相位情形和常数相位情形均成立．

4.3 $x(n)$ 的四阶累量估计的强收敛性

在获得 $\hat{R}_x$ 和 $\hat{m}_{4x}$ 的强收敛结果后，我们来讨论 $\hat{c}_{4x}$ 的强收敛性质。由 (6) 式， (32) 式和 (20) 式可知，无论 $s(n)$ 的相位是随机的还是确定性的，在遍历条件 C1–C3 下，对于 $\gamma < 1/4$ 都有

$$\begin{aligned}\hat{c}_{4x}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) \overset{\text{a.s.}}{=\!=} {} & m_{4s}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) - R_s(\tau_1)R_s(\tau_3-\tau_2) - R_s(\tau_2)R_s(\tau_3-\tau_1) - R_s(\tau_3)R_s(\tau_2-\tau_1) \\ & + m_{4v}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) - R_v(\tau_1)R_v(\tau_3-\tau_2) - R_v(\tau_2)R_v(\tau_3-\tau_1) \\ & - R_v(\tau_3)R_v(\tau_2-\tau_1) + o\left(1/N^{\gamma}\right). \end{aligned} \tag{33}$$

由上式和 (21) 式可得，对于 $\gamma < 1/4$

$$\begin{aligned}\hat{c}_{4x}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) \overset{\text{a.s.}}{=\!=} {} & -\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{p} A_k^4 \Big\{\cos[\omega_k(\tau_1-\tau_2-\tau_3)] + \cos[\omega_k(\tau_2-\tau_1-\tau_3)] \\ & + \cos[\omega_k(\tau_3-\tau_1-\tau_2)]\Big\} + c_{4v}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) + o\left(\frac{1}{N^{\gamma}}\right). \end{aligned} \tag{34}$$

上式说明，在遍历条件 C1–C3 下，谐波信号 $x(n)$ 的四阶累量的单一记录样本估计 $\hat{c}_{4x}$ 是强收敛的，同时得到了遍历条件下的强收敛速度。

5 数值仿真结果

为了说明上面得到的理论结果，我们进行了以下的数值仿真实验．实谐波信号 $s(n)$ 由三个分量组成:

$$s(n) = \cos(0.62t + 0.5) + \cos(1.25t + 1.2) + \cos(1.38t - 0.85). \tag{35}$$

观测噪声 $v(n)$ 取为 MA(4) 过程:

$$v(n) = 1.5e(n) - 3.1e(n-1) + 2.375e(n-2) - 0.8e(n-3) + 0.1e(n-4), \tag{36}$$

其中 $e(n) \sim N(0,\sigma^2)$. $e(n)$ 的方差 σ^2 可调，用来调节信噪比。各谐波分量的信噪比定义为 $\mathrm{SNR(dB)} = 10\log_{10}(0.5/\sigma_v^2)$. 实验中，各谐波分量的信噪比取定为 SNR = 0dB. 对于数据长度为 $N = 512, 1024, 2048, 4096$ 四种情形，分别估计 $x(n) = s(n) + v(n)$ 的 10 个自相关函数和 10 个四阶累量的对角切片。表 1 和表 2 分别列出了四种数据长度情形下由 100 次 Monte Carlo 独立运算得到的自相关函数和四阶累量估计的统计结果 (均值和标准差), 其中的真值精确到 10^{-3}, 表 2 中 $\hat{c}_{4x}(\tau)$ 表示四阶累量对角切片的估计 $\hat{c}_{4x}(\tau,\tau,\tau)$ 。

表 1 自相关函数估计的统计结果

相关函数	$\hat{R}_x(0)$	$\hat{R}_x(1)$	$\hat{R}_x(2)$	$\hat{R}_x(3)$	$\hat{R}_x(4)$	$\hat{R}_x(5)$	$\hat{R}_x(6)$	$\hat{R}_x(7)$	$\hat{R}_x(8)$	$\hat{R}_x(9)$
$N = 512$	2.0213	0.2777	−0.5485	−0.8784	0.1284	0.4269	-0.4416	−1.0691	−0.2788	0.9963
	(0.0502)	(0.0426)	(0.0411)	(0.0400)	(0.0406)	(0.0431)	(0.0407)	(0.0417)	(0.0343)	(0.0375)
$N = 1024$	2.0018	0.2688	−0.5273	−0.8616	0.1187	0.4027	−0.4462	−1.0558	−0.2682	0.9903
	(0.0313)	(0.0281)	(0.0290)	(0.0239)	(0.0263)	(0.0289)	(0.0258)	(0.0277)	(0.0243)	(0.0259)
$N = 2048$	2.0087	0.2711	−0.5312	−0.8673	0.1139	0.4110	−0.4486	−1.0577	−0.2744	0.9964
	(0.0214)	(0.0187)	(0.0207)	(0.0186)	(0.0194)	(0.0202)	(0.0174)	(0.0212)	(0.0188)	(0.0179)
$N = 4096$	2.0078	0.2698	−0.5297	−0.8652	0.1139	0.4112	−0.4514	−1.0607	−0.2750	1.0005
	(0.0162)	(0.0134)	(0.0123)	(0.0135)	(0.0138)	(0.0129)	(0.0126)	(0.0142)	(0.0134)	(0.0126)
真值	2.0000	0.2739	−0.5292	−0.8652	0.1127	0.4080	−0.4519	−1.0585	−0.2747	1.0018

表 2 四阶累量估计的统计结果

四阶累量	$\hat{c}_{4x}(0)$	$\hat{c}_{4x}(1)$	$\hat{c}_{4x}(2)$	$\hat{c}_{4x}(3)$	$\hat{c}_{4x}(4)$	$\hat{c}_{4x}(5)$	$\hat{c}_{4x}(6)$	$\hat{c}_{4x}(7)$	$\hat{c}_{4x}(8)$	$\hat{c}_{4x}(9)$
$N = 512$	−1.2533	−0.4796	0.6006	0.6662	−0.1203	−0.3700	0.2950	0.8478	0.1984	−0.7881
	(0.5919)	(0.3027)	(0.3054)	(0.3357)	(0.2995)	(0.2244)	(0.2823)	(0.3835)	(0.3093)	(0.3407)
$N = 1024$	−1.1475	−0.4531	0.5475	0.6028	−0.1030	−0.3106	0.3413	0.7881	0.1713	−0.7631
	(0.3938)	(0.2012)	(0.2234)	(0.2314)	(0.2120)	(0.1543)	(0.2073)	(0.2468)	(0.2274)	(0.2284)
$N = 2048$	−1.1171	−0.4911	0.5312	0.6303	−0.0916	−0.3225	0.3530	0.8014	0.2142	−0.7544
	(0.2938)	(0.1597)	(0.1324)	(0.1830)	(0.1571)	(0.1309)	(0.1381)	(0.1710)	(0.1730)	(0.1629)
$N = 4096$	−1.1267	−0.4919	0.5255	0.6023	−0.0929	−0.2912	0.3510	0.7857	0.1908	−0.7544
	(0.2277)	(0.1062)	(0.0849)	(0.1337)	(0.1099)	(0.0939)	(0.0990)	(0.1359)	(0.1226)	(0.1174)
真值	−1.1250	−0.4945	0.5266	0.6177	−0.0814	−0.3060	0.3389	0.7939	0.2060	−0.7514

从表 1 和表 2 可知，自相关函数和四阶累量估计的精度和稳定性随数据长度的增加而相应提高，这与我们得到的理论结果是一致的。尽管自相关函数和四阶累量的估计都具有 $o(1/N^{\gamma})$ 的收敛速度，但这并不意味两者是绝对相等的。这一点反映在仿真实验中，即是对于同一数据长度，自相关函数的估计结果优于四阶累量的估计结果，因为高阶统计量的估计 (与二阶统计量比较) 具有较大的方差。

6 结束语

本文讨论了噪声中实谐波信号相关函数和四阶累量的单一记录样本估计的强收敛性问题. 对于相关函数的估计，证明了强收敛性，并给出了估计的强收敛速度. 对于四阶矩估计，给出了四阶遍历条件. 在这些遍历条件下，证明了四阶矩和四阶累量估计的强收敛性，并得到了强收敛速度. 同时，上述结果在常数相位情形亦成立. 因此，从理论上来说，在谐波恢复中应用 (3) 和 (4) 式时，可以由 (5) 和 (6) 式得到其单一记录的强相容估计，不必考虑相位是随机的还是确定性的，只要求遍历条件 C1–C3 成立即可.

在谐波恢复中，有时要用到三阶累量 [9], 本文的分析可以应用于讨论噪声中谐波信号三阶累量的单一记录样本估计的强收敛性质和收敛速度。

在基于累量的谐波恢复方法中，常常是由有限个累量估计值出发进行谐波参数估计 (例如求解线性代数方程) 。因此，利用本文得到的关于累量估计收敛速度的结果，我们可以讨论谐波参数估计的强收敛速度，从而从理论上来分析和评价参数估计方法的性能.

参 考 文 献

[1] Swami A, Mendel J M. Cumulant-based approach to the harmonic retrieval problem. Proc. ICASSP-88, New York, USA: 1988, 2264–2267.

[2] Mendel J M. Tutorial on higher-order statistics(spectra) in signal processing and system theory: Theoretical results and some applications. Proc. IEEE, 1991, 79(3): 278–305

[3] Ferrari A, Alengrin G. Estimation of the frequencies of a complex sinusoidal noisy signal using fourth order statistics. Proc. ICASSP-91, Toronto, Canada: 1991, 3457–3460.

[4] Swami A, Mendel J M. Cumulant-based approach to the harmonic retrieval and related problems. IEEE Trans. on ASSP, 1991, SP-39(5): 1099–1109.

[5] 梁应敞，王树勋，戴逸松．正弦参量的四阶累积量 ESPRIT 方法．电子学报，1994, 22(4): 6–12.

[6] Papadopoulos C K, Nikias C L. Parameter estimation of exponentially damped sinusoids using higher order statistics. IEEE Trans. on ASSP, 1990, ASSP-38(8): 1424–1435.

[7] Zhang X D, Li Y D. Harmonic retrieval in mixed Gaussian and non-Gaussian noises. IEEE Trans. on SP, 1994, SP-42(12): 3539–3543.

[8] Zhang X D, Liang Y C. Prefiltering-based ESPRIT for estimating sinusoidal parameters in non-Gaussian ARMA noise. IEEE Trans. on SP, 1995, SP-43(1): 349–353.

[9] Zhang X D, Liang Y C, Li Y D. A hybrid approach to harmonic retrieval in non-Gaussian noise. IEEE Trans. on IT, 1994, IT-40(4): 1220–1226.

[10] Rosenblatt M, Van Ness J W. Estimation of the bispectrum. Ann. Math. Stat., 1965, 36(4): 1120–1136.

[11] Anderson J M M, Giannakis G B, Swami A. Harmonic retrieval using higher order statistics: A deterministic formulation. IEEE Trans. on SP, 1995, SP-43(8): 1880–1889.

[12] Li H W, Cheng Q S. Almost sure convergence analysis of mixed time averages and k-th-order cyclic statistics. IEEE Trans. on IT, 1997, IT-43(4): 1265–1268.

STRONG CONVERGENCE PROBLEM FOR CUMULANT ESTIMATORS IN HARMONIC RETRIEVAL

Li Hongwei Yuan Baozong*

(*Dept. of Math. and Physics, China University of Geosciences, Wuhan* 430074)

*(*Institute of Information Science, Northern Jiaotong University, Beijing* 100044)

Abstract This paper considers the single record estimators for cumulants of sinusoids in additive noise. The strong convergence of sample autocorrelation is proved, and the convergence rate is obtained. Conditions for the fourth-order ergodicity are given. Under these conditions, the strong convergence of sample estimates of the fourth-order moment and cumulant is established, and the convergence rate is obtained. Finally, a numerical example is given to verify the results.

Key words Harmonic retrieval, Fourth-order cumulant, Single record estimator, Ergodicity condition, Convergence rate

李宏伟： 男，1965 年生，副教授，博士后．现主要从事非平稳信号处理和非线性时间序列分析方面的研究工作．

袁保宗： 男，1932 年生，教授，博士生导师．现主要从事语音信号处理，多媒体信息处理，数据通讯和信息融合等领域的研究工作．