第 21 卷 第 5 期
1999 年 9 月

电子科学学刊
JOURNAL OF ELECTRONICS

Vol.21 No.5
Sept. 1999

非线性连续神经网络平衡态的吸引域及收敛指数的估计 [1]

王利生　　谈　正　　黄榕盛

(西安交通大学电信学院信息工程研究所　西安　710049)

摘　要　给出一种新的简单方法分析非线性连续神经网络的指数稳定性. 得到了最优化计算神经网络全局指数稳定的一些判定条件，以及联想记忆神经网络各平衡态的吸引域与收敛速度估计. 所得结论推广了某些文献中已有结果.

关键词　神经网络，全局指数稳定性，局部指数稳定性

中图号　TN-052

1 引　言

神经网络可用于智能控制及模式识别等信息处理系统，主要是因为神经网络的动态行为具有稳定的吸引子。其中，联想记忆神经网络有多个分别对应于不同记忆模式的平衡态，因而稳定性分析的目的是判断在何种条件下平衡态是局部渐进稳定以及估计平衡态的吸引域。由于神经网络的容错能力及恢复能力与各平衡态的吸引域密切相关，因此这是一个非常重要的问题。本文将讨论非线性连续神经网络平衡态的吸引域及吸引域内轨道的收敛速度。考虑最常见的一类网络模型：

$$\tau \mathrm{d}x_i/\mathrm{dt} = -x_i + \sum_j \overline{w}_{ij} y_j + s_i, \quad y_i = f_i(x_i). \tag{1}$$

$\tau > 0$, f_i 连续可微且 $0 < f_i'(z) \le \sup f_i'(z) = r_i < \infty$ 。设 $w_{ij} = \overline{w}_{ij} r_j$, $g_i(z) = f_i(z)/r_i$ ，不失一般性，设 $\tau = 1$, 则网络模型 (1) 式可写为

$$\mathrm{d}x_i/\mathrm{dt} = -x_i + \sum_j w_{ij} \cdot g_j(x_j) + s_i, \tag{2}$$

其中 $0 < \sup g_i'(z) \le 1$ 。 (2) 式的矩阵表示为 $\mathrm{d}x/\mathrm{dt} = -x + WG(x) + s$, s 为常向量.

设 u^* 为网络模型 (2) 式的平衡态， $-u^* + WG(u^*) + s = 0$ 。本文证明只要在平衡态 u^* 的球形邻域 $B_\delta(u^*) = \{z \in R^n : \|z - u^*\| \le \delta\}$ 内神经元输入输出特性函数 $g_i(x_i)$ 变化平缓，即 $|g_i(x_i) - g_i(u_i^*)| < ((1-\varepsilon)/\|W\|)|x_i - u_i^*|$, ε 为充分小正数，则 u^* 为局部指数渐近稳定， $B_\delta(u^*)$ 为 u^* 的吸引域的一个不变子集。这里， $\|\bullet\|$ 可取任一单调范数 [6]，例如 $\|x\|_p = (\sum_i |x_i|^p)^{1/p}$, $p \in \{1, 2, 3, \cdots, \infty\}$ 。

文献 [1, 2] 中证明当 $\|W\|_p < 1$, $p \in \{1, 2, \cdots, \infty\}$ 时， (2) 式全局指数稳定。本文推广文献 [1, 2] 中结果，证明了只要 $\|\bullet\|$ 为单调范数，则由 $\|W\| < 1$ 推出 (2) 式全局指数稳定。许多已有文献在讨论中均假定 $g_i(x_i)$ 连续可微，但实际应用中 $g_i(x_i)$ 不一定满足可微条件，如在文献 [3] 、 [4] 构造的最优化计算神经网络中， $g_i(x_i)$ 为单调非减的分段线性函数。本文结论即使在 $g_i(x_i)$ 不可微 (如，分段线性函数) 时仍然成立，而且推广了文献 [4] 中结果。

[1] 1998-02-24 收到， 1998-12-11 定稿

2　联想记忆神经网络的吸引域及局部收敛指数的估计

设 $T:D\subset R^n\to R^n$ 为非线性算子，$u^*\in D$ 。记 $|T|=\sup\limits_{x\neq u^*}(\|Tx-Tu^*\|/\|x-u^*\|)$ ，则 $|T|$ 为凸函数，极限 $\lim\limits_{t\to 0+}(|I+tT|-1)/t$ 存在。这里 I 为恒等算子。记 $N(T,u^*)=\lim\limits_{t\to 0+}(|I+tT|-1)/t$ ，则函数 $N(T,u^*)$ 被 u^*,T,D 唯一确定。易知 $N(T,u^*)\le |T|$ ，而且在 Hilbert 空间，$N(T,u^*)=\sup\limits_{x\neq u^*}<Tx-Tu^*,x-u^*>/\|x-u^*\|^2$ 。

定理 1　设 u^* 为初值问题 $\dot{x}(t)=T(x(t)), x(0)\in R^n$ 的临界点，$T(u^*)=0$ 。若在 u^* 的球形邻域 $B_\delta(u^*)$ 内 $N(T,u^*)<0$, 则当 $x(0)\in B_\delta(u^*)$ 时，初值问题决定的 $x(t)$ 渐近稳定且依几何级数收敛于 u^*, 即 $\|x(t)-x^*\|\le L\|x(0)-x^*\|e^{tN(T,u^*)}$ 。

证明　令 $x(t)$ 为 $x(0)\in B_\delta(u^*)$ 时初值问题的解，则 $v(t)=x(t)-u^*$ 满足：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\|v\|/\mathrm{d}t&=\lim_{h\to 0+}(\|v(t+h)\|-\|v(t)\|)/h=\lim_{h\to 0+}(\|v(t)+h\dot{v}(t)\|-\|v(t)\|)/h\\&=\lim_{h\to 0+}(\|x(t)-u^*+h(\dot{x}(t)-0)\|-\|x(t)-u^*\|)/h\\&=\lim_{h\to 0+}(\|x(t)-u^*+h(Tx(t)-T(u^*)\|-\|x(t)-u^*\|)/h\\&=\lim_{h\to 0+}(|I+hT)-1)/h\|x(t)-u^*\|\le N(T,u^*)\|v\|.\end{aligned}$$

因此，$\|v\|\le\|v(0)\|e^{tN(T,u^*)}$, $\|x(t)-u^*\|\le\|x(0)-u^*\|e^{tN(T,u^*)}$ 。显然，$x(t)\in B_\delta(u^*)$, $\lim_{t\to\infty}\|x(t)-u^*\|=0$ 。　　证毕

推论 1　设 u^* 为初值问题 $\dot{x}(t)=T(x(t)), x(0)\in R^n$ 的临界点，若在 R^n 上 $N(T,u^*)<0$, 则 u^* 为全局指数渐进稳定。

网络模型 (2) 式可看作初值问题的一个特例。设 u^* 是 (2) 式的平衡态。令 $T=-I+WG+s_0$ ，则 $N(T,u^*)\le -1+N(WG,u^*)\le -1+|WG|\le -1+\|W\||G|$ ，因此只要在 u^* 的球形邻域 $B_\delta(u^*)$ 内 $|G|<1/\|W\|$ ，则 u^* 局部指数渐进稳定。

对于任意 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$ ，记 $|x|=(|x_1|,|x_2|,\cdots,|x|_n)$, R^n 上向量范数 $\|\bullet\|$ 称为是单调范数，若从 $|x|\le|y|$ 可得 $\|x\|\le\|y\|$ 。$\|\bullet\|$ 为单调范数当且仅当 $\|x\|=\||x|\|$[6] 。R^n 上常用的向量范数 $\|\bullet\|_p$, $p\in\{1,2,3,\cdots,\infty\}$ 均为单调范数。矩阵 W 的范数定义为 $\|W\|=\sup\{\|Wx\|:\|x\|=1\}$ 。以下均取向量范数为单调范数。

定理 2　记 u^* 为网络模型 (2) 式的平衡态，$B_\delta(u^*)$ 为 u^* 的球形邻域。若对于任意 $x\in B_\delta(u^*)$, $|g_i(x_i)-g_i(u_i^*)|<(1-\varepsilon)/\|W\|\cdot|x_i-u_i^*|$, ε 为充分小正数，则 u^* 局部指数稳定，$B_\delta(u^*)$ 为 u^* 的吸引域。$x(0)\in B_\delta(u^*)$ 时，$\|x(t)-u^*\|\le\|x(0)-u^*\|e^{-t\varepsilon}$ 。

证明　因为向量范数单调，所以 $\|Gx-Gu^*\|\le(1-\varepsilon)/\|W\|\|x-u^*\|$ 。这推出 $|G|\le(1-\varepsilon)/\|W\|<1/\|W\|$, $N(T,u^*)<-\varepsilon<0$ 。因此 u^* 局部指数稳定，$B_\delta(u^*)$ 为 u^* 的吸引域。从 $B_\delta(u^*)$ 出发的轨道指数收敛，收敛指数为 $-\varepsilon$ 。　　证毕

推论 2　若对于任意 x, $|g_i(x_i)-g_i(u_i^*)|<((1-\varepsilon)/\|W\|)|x_i-u_i^*|$, ε 为充分小正数，则 u^* 全局指数渐进稳定。

定理 3　设 $\|\bullet\|_2$ 范数下的对数范数 $\mu(-I+WG'(u^*))<0$ 。则 u^* 为 (2) 式的局部指数渐近稳定的平衡态。如果在 u^* 的闭球形邻域 $B_\delta(u^*)$ 内，当 $x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\in B_\delta(u^*)$ 时，$\max\limits_i\{|g_i'(x_i)-g_i'(u_i^*)|\}<|\mu(-I+WG'(u^*))|/\|W\|_2$ ，则 $B_\delta(u^*)$ 为 u^* 的吸引域。令

$C = \max\limits_{x \in B_\delta(u^*)} \max\limits_i |g_i'(x_i) - g_i'(u_i^*)|$, $\alpha = \mu(-I + WG'(u^*)) + \|W\|_2 C$, $x(0) \in B_\delta(u^*)$，则从 $B_\delta(u^*)$ 出发的轨道指数收敛，$\|x(t) - u^*\|_2 \le x(0) - u^*\|_2 e^{t\alpha}$。

证明 $\forall x, \mu(T'(x)) = \mu(-I + WG'(x))$。因为 T 连续可微，对数范数 $\mu(T'(x))$ 为连续函数，所以一定存在 u^* 的闭球形邻域 $B_\delta(u^*)$，当 $x \in B_r(u^*)$ 时，$\mu(T'(x)) \le \mu(T'(u^*)) + \varepsilon < 0$，$\varepsilon$ 为充分小正数。由积分中值定理，$\forall x, \exists t \in (0,1), < Tx - Tu^*, x - u^* > = < T'(u^* + t(x - u^*))(x - u^*), x - u^* > \le \sup\limits_{z \in B_\delta(u^*)} \mu(T'(z))\|u^* - x\|$，因此 $N(T, u^*) < \sup\limits_{z \in B_r(u^*)} \mu(T'(z)) < 0$。由定理 1 知，$u^*$ 为 (2) 式的局部渐近稳定的平衡态。

因为 $B_\delta(u^*)$ 为紧集，$g_i(x_i)$ 连续可微，所以 $C < -\mu(T'(u^*))/\|W\|$。$\forall x, \mu(T'(x)) - \mu(T'(u^*)) = \mu(WG'(x)) - \mu(WG'(u^*)) \le \|WG'(x) - WG'(u^*)\| \le \|W\|\|G'(x) - G'(u^*)\| \le \max_i |g_i'(x_i) - g_i'(u_i^*)|\|W\|, \mu(T'(x)) \le \mu(T'(u^*)) + C\|W\| < 0$。因此 $N(T, u^*) \le \mu(T'(u^*)) + C\|W\| < 0$。由定理 1 知，$B_\delta(u^*)$ 为 u^* 的吸引域，从 $B_\delta(u^*)$ 出发的轨道按指数收敛，$\|x(t) - u^*\| \le \|x(0) - u^*\| e^{t\alpha}$。 证毕

3 最优化计算神经网络的全局指数稳定性

设 $T(u^*) = 0$。显然只要证明在 R^n 上 $N(T, u^*) < 0$，则在 (2) 式中 u^* 为全局指数渐进稳定。

定理 4 设 $g_i(x_i)$ 满足 Lipschitz 条件：$|g_i(x_i) - g_i(u_i^*)| \le |x_i - u_i^*|$，$\|\bullet\|$ 为单调向量范数，则当 $\|W\| = \sup\{\|Wx\| : \|x\| = 1\} < 1$ 时，(2) 式全局指数渐近稳定，收敛指数为 $\|W\| - 1$。

证明 $\forall x, G(x) - G(u^*) = (g_1(x_1) - g_1(u_1^*), g_2(x_2) - g_2(u_2^*), \cdots, g_n(x_n) - g_n(u_n^*))^T$，因为 $|g_i(x_i) - g_i(u_i^*)| \le |x_i - u_i^*|$，所以 $\|Gx - Gu^*\| \le \|x - u^*\|$，这推出 $|G| \le 1$。$N(T, u^*) \le -1 + \|W\|$。据定理 1，当 $\|W\| < 1$ 时，$N(T, u^*) \le \|W\| - 1 < 0$，(2) 式全局指数稳定且收敛指数为 $\|W\| - 1$。 证毕

易知，当 $g_i(x_i)$ 连续可微且 $\sup g_i'(z) \le 1$，或当 $g_i(x_i)$ 为单调非减的分段线性函数时，它都满足定理 4 中 Lipschitz 条件。注意到 R^n 上向量范数 $\|x\|_p = (\sum_i |x_i|^p)^{1/p}$, $p \in \{1, 2, 3, \cdots, \infty\}$，均为单调向量范数，因此定理 4 推广了文献 [1,2] 中结果。文献 [4] 在 $g_i(x_i)$ 为单调非减的分段线性函数且 $\|W\|_2 < 1$ 的条件下证明上述结论，因此定理 3 也推广了文献 [4] 中结果。

下三角神经网络模型的矩阵表示为 [5]：$\dot{x} = Ax + G(x)$, 其中，A 为下三角矩阵，$G(x) = \mathrm{diag}(g_1(x), g_2(x), \cdots, g_n(x))^T$ 为多元连续函数。其中，$g_i(x) = g_i(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1})$, $g_1(x) = C$, C 为常数，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n$。当 A 为稳定矩阵时，文献 [5] 证明网络全局渐近稳定。下面我们证明 $g_i(x)$ 连续可微时，任一网络轨道按指数收敛。记 $T = A + G$。

定理 5 设下三角神经网络中，$g_i(x)$ 连续可微。如果下三角阵 A 为稳定矩阵，则下三角神经网络全局渐近稳定，而且任一网络轨道按指数收敛。

证明 设 u^* 为唯一平衡态。令 $\Lambda = \mathrm{dig}(a_{11}, \cdots, a_{nn})$, 则 $B = A - \Lambda$ 为严格下三角矩阵。令 $B(u^*, r) = \{z \in R^n : \|z - u^*\| \le r\}$ 为半径为 r 的球形邻域，则 $\{B + G'(x) : x \in B(u^*, r)\}$ 为有界的严格下三角矩阵集合，等价范数下可同时逼近谱半径。这里，$\forall \varepsilon > 0$，定义等价向量范数为 $\|u\|_\varepsilon = \|Pu\|_1$, $u \in R^n$, $P = \mathrm{diag}(1, \delta, \cdots, \delta^{n-1})$, δ 为充分小的正数。在等价范

数 $\|\bullet\|_\varepsilon$ 下， $\sup\limits_{x\in B(u^*,r)}\|B+G'(x)\|_\varepsilon = \sup\limits_{x\in B(u^*,r)}\|P(B+G'(x))P^{-1}\| \le \varepsilon$ 。由中值定理，$\forall x\in B(u^*,r)$, $\|(B+G)x-(B+G)u^*\|_\varepsilon \le \sup\limits_{z\in B(u^*,r)}\|B+G'(z)\|_\varepsilon\|x-u^*\|_\varepsilon$ ，因而 $|B+G|\le\varepsilon$, $N(T,u^*)\le N(\Lambda,u^*)+|B+G|\le \max\{a_{ij}\}+\varepsilon$ 。对角元 $a_{ii}, i=1,\cdots,n$ 为的 A 特征值，如果 A 为稳定矩阵，则 $a_{ii}<0$ ，因此 $N(T,u^*)<0$ 。这推出从 $B(u^*,r)$ 出发的任一网络轨道按指数收敛。因为半径 r 可任意选取，所以任一网络轨道按指数收敛。

4 仿真讨论

将本文定理 4 用于文献 [4] 中的优化计算神经网络，容易得出文献 [4] 中的全局指数稳定结论及收敛指数估计。在模型 (2) 式中，令 $n=2$, $g_1(x_1)=\sin(x_1)$, $g_2(x_2)=\cos(x_2)$, $s=\{0,0\}$, $W=\begin{pmatrix}1 & \pi/2-1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, 则 $x^*=\{\pi/2,0\}$ 为 (2) 式的平衡点。因 $\|W\|_\infty\le 2$ ，由定理 2 知，当 $\delta<\pi/6$ 时， x^* 局部指数稳定， $B_\delta(x^*)$ 为吸引域， $1-2\sin\delta$ 为收敛指数。

参 考 文 献

[1] Killy D G. Stability in contractive nonlinear neural networks. IEEE Trans. on Biomedical Engineering, 1990, BME-37: 231–242.

[2] Sugawara K, Harao M. On the stability of equilibrium states of analogue neural networks. Transactions of the Institute of Electronics and Communication Engineers, 1983, J-66-A: 258–265.

[3] Subhrsanan S I, Sundareshan M K. Exponential stability and a systematic synthesis of a neural network for quadratic minimization. Neural Networks, 1991, 4: 599–613.

[4] Bouzerdoum A, Pattison T R. Neural network for quadratic optimization with bound constraints. IEEE Trans. on Neural Networks, 1993, NN-4: 293–303.

[5] Avitabile G, Forti M, *et al.* On a class of nonsymmetrical neural networks with application to ADC. IEEE Trans. on Circuits and Syst, 1991, CAS-38(2): 202–208.

[6] Bauer F, Stoer J, Witzgall C. Absolute and monotonic norms. Numer. Math, 1961, 3: 257–264.

THE ESTIMATES OF CONVERGENT RATE AND ATTRACTIVE DOMAIN OF NONLINEAR CONTINUOUS NEURAL NETWORK

Wang Lisheng Tan Zheng Huang Rongsheng

(*The School of Electric and Information, Xi'an Jiaotong University, Xi'an* 710049)

Abstract The estimates of attractive domain and convergent rate of nonlinear continuous memory neural network are obtained, and some sufficient conditions for the network to be globally exponentially stable are developed. these results generalize ones in references.

Key words Neural network, Exponential stability, Attractive domain, Convergent rate

王利生： 男， 1968 年生，博士生，主要研究方向：数据可视化，神经网络.
谈 正： 男， 1939 年生，教授，主要研究领域：图像分析，图像图形融合.
黄榕盛： 男， 1974 年生，硕士，感兴趣的方向为：图像处理，多媒体.