第 21 卷 第 6 期
1999 年 11 月
电子科学学刊
JOURNAL OF ELECTRONICS
Vol.21 No.6
Nov. 1999

功能险象的简化快速算法研究 [1]

童永承　　李国屏

(湖北师范学院计算机科学系　黄石　435002)

摘　要　本文利用参与逻辑函数和逻辑函数余式的理论，得到了一系列重要的规律，使用导出的等效二变量逻辑余式状态变化过程可对功能冒险精确定位，避免了繁琐沉重的计算，为数字电路和计算机设计奠定了基础.

关键词　数字险象，等效状态变化过程，功能冒险

中图号　TN79

1 引　言

数字电路组合险象可以分为静态冒险和动态冒险 [1−3]; 静态冒险又分为逻辑冒险和功能冒险. 功能冒险再分为 0 型功能冒险: 1→0→1 ， 1 型功能冒险: 0→1→0 . 只要逻辑函数 $F(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \cdots, \tilde{X}_n)$ 之一变量逻辑余式为: $\tilde{X}_i + \tilde{\tilde{X}}_i$ 或 $\tilde{X}_i\tilde{\tilde{X}}_i$, 则 F 必然发生逻辑冒险. $\tilde{X}$ 可为 X 或 $\overline{X}$, $i = 1, 2, \cdots, n$[4] . 数字险象是组合险象和时序险象的统称. 它是数字电路和计算机设计中长期未解决的难题. 而功能冒险是数字险象的核心问题.

文献 [4] 给出了二变量逻辑函数 $F(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ 的基本项，复合项的 0 型和 1 型功能冒险. 由于逻辑函数的逻辑结构的任意性，三变量，四变量， $\cdots$， n 变量逻辑函数复合项功能冒险并没有导出. 为不失一般，逻辑函数可以表示成 $M = AABB$ 形式. 其中 $A_1 = \tilde{X}_1\tilde{X}_2\cdots\tilde{X}_i$, $A_2 = \tilde{X}_1\tilde{X}_2\cdots\tilde{X}_j$, $B_1 = \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \cdots + \tilde{X}_i$, $B_2 = \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \cdots + \tilde{X}_j$, $i = 1, 2, \cdots, n$, $j = 1, 2, \cdots, n$. 这种形式的三变量逻辑函数有 11 万项，四变量逻辑函数有 160 多万项. 不仅如此. 而且还可表示为 $ABAB$ ， $ABBA$ ， $BABA$ ， $BAAB$ ， $BBAA$ 形式. 所以函数项总数要比上述大得多. 要从中筛选出产生功能冒险的函数项是很困难的. 如果利用有效全部最短状态变化过程路径数 L'' 验算功能冒险，有效全部最短状态变化过程路径数为: $L'' = L'/2 = 2^{n-1}n!$[5], 无法进行验算. 比较简单的方法是在文献 [4] 的基础上，由二变量逻辑函数 0 型和 1 型功能冒险函数项来推得三变量逻辑函数产生功能冒险的情况，但这仅是一种凑合的办法，必然要丢失产生功能冒险的逻辑函数项. 是否存在一种既简单又快捷的途径可以确定功能冒险，这是本文要解决的问题.

2 快速算法基础

逻辑函数若发生功能冒险，必须至少涉及到一个中间逻辑状态. 任意逻辑函数 $F(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \cdots, \tilde{X}_n)$ 任意初态 $\tilde{X}_1\tilde{X}_2\cdots\tilde{X}_n$ 开始的状态变化过程，如果仅考虑与功能冒险相关的状态变化过程，则是: $\tilde{X}_1\tilde{X}_2\cdots\tilde{X}_n \to \tilde{X}_1\cdots\tilde{\tilde{X}}_j\cdots\tilde{X}_n \to \tilde{X}_1\cdots\tilde{\tilde{X}}_i\,\tilde{\tilde{X}}_j\cdots\tilde{X}_n$, 即第一状态 → 第二状态 → 第三状态，相邻状态仅有一个变量不同. 每一状态均有 2^n 个取值可能，要确定功能冒险须验算 3×2^n 次，计算量是相当繁重的. 但 2^n 个可能状态对应的逻辑赋值状态为 0 或 1 ，仅有两个，如果由逻辑赋值状态进行上述工作，无疑计算工作会大大简化.

定理 1　逻辑函数 $F(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \cdots, \tilde{X}_n)$ 的初始状态 $\tilde{X}_1\tilde{X}_2\cdots\tilde{X}_n$ 经若干中间态转移到最终状态 $\tilde{\tilde{X}}_1\tilde{\tilde{X}}_2\cdots\tilde{\tilde{X}}_n$ 的状态变化过程，必有唯一确定的逻辑赋值状态变化过程与之对应.

[1] 1997-03-03 收到， 1999-06-28 定稿

定理 2　逻辑函数 $F(\tilde{X}_1,\tilde{X}_2,\cdots,\tilde{X}_n)$ 的初态 $\tilde{X}_1\tilde{X}_2\cdots\tilde{X}_n$ 转移到终态 $\bar{\tilde{X}}_1\bar{\tilde{X}}_2\cdots\bar{\tilde{X}}_n$ 之最短状态变化过程经三状态划分后，所得任一三状态变化过程，在逻辑赋值后，若第一状态 = 第三状态，且第二状态 $\neq$ 第一状态，则逻辑函数 F 发生功能冒险．

证明　逻辑函数 $F(\tilde{X}_1,\tilde{X}_2,\cdots,\tilde{X}_n)$ 的初态 $\tilde{X}_1\tilde{X}_2\cdots\tilde{X}_n$ 转移到终态 $\bar{\tilde{X}}_1\bar{\tilde{X}}_2\cdots\bar{\tilde{X}}_n$ 之最短状态变化过程是数字电路信息传递，处理最重要的过程．最短状态变化过程为

$$\tilde{X}_1\tilde{X}_2\cdots\tilde{X}_n\to\tilde{X}_1\tilde{X}_2\cdots\bar{\tilde{X}}_n\to\tilde{X}_1\cdots\bar{\tilde{X}}_{n-1}\bar{\tilde{X}}_n\to\cdots\to\tilde{X}_1\cdots\bar{\tilde{X}}_i\cdots\bar{\tilde{X}}_n\to\tilde{X}_1\bar{\tilde{X}}_2\cdots\bar{\tilde{X}}_n\to\bar{\tilde{X}}_1\bar{\tilde{X}}_2\cdots\bar{\tilde{X}}_n,$$

$$\begin{array}{l}
S_1 \longrightarrow \\
\qquad S_2 \longrightarrow \\
\qquad\qquad S_3 \longrightarrow \\
\qquad\qquad\qquad \cdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad S_{n-1} \longrightarrow
\end{array}$$

有 $n-1$ 个三状态子状态变化过程，任意子状态变化过程为

$$S_J:\quad \tilde{X}_1\cdots\tilde{X}_j\cdots\bar{\tilde{X}}_n\to\tilde{X}_1\cdots\bar{\tilde{X}}_j\cdots\bar{\tilde{X}}_n\to\bar{\tilde{X}}_1\cdots\bar{\tilde{X}}_j\cdots\bar{\tilde{X}}_n,\qquad 1\le J\le n-1.\tag{1}$$

相邻状态仅有一变量不同．第一状态为 $\tilde{X}_1\cdots\tilde{X}_j\cdots\bar{\tilde{X}}_n$，其逻辑赋值为 0 或 1，第二状态为 $\tilde{X}_1\cdots\bar{\tilde{X}}_j\cdots\bar{\tilde{X}}_n$ 逻辑赋值为 0 或 1，第三状态 $\bar{\tilde{X}}_1\cdots\bar{\tilde{X}}_j\cdots\bar{\tilde{X}}_n$ 逻辑赋值为 0 或 1．三状态逻辑赋值状态全变化过程如下：

$$\begin{array}{llll}
0\to0\to0, & 0\to0\to1, & 0\to1\to0, & 0\to1\to1,\\
1\to0\to0, & 1\to0\to1, & 1\to1\to0, & 1\to1\to1.
\end{array}\tag{2}$$

其中仅 $0\to1\to0$, $1\to0\to1$ 为功能冒险，其余逻辑赋值状态变化过程不产生功能冒险．逻辑函数 $F(\tilde{X}_1,\tilde{X}_2,\cdots,\tilde{X}_n)$ 的初态 $\tilde{X}_1\tilde{X}_2\cdots\tilde{X}_n$ 转移到终态 $\bar{\tilde{X}}_1\bar{\tilde{X}}_2\cdots\bar{\tilde{X}}_n$ 有效全部最短状态变化过程路径数为 $L''=2^{n-1}n!$，任一最短状态变化过程进行三状态划分后，必与上述逻辑赋值状态变化过程之一对应．第一状态 = 第三状态，且第一状态 $\neq$ 第二状态，那么任意子状态变化过程 S_J 之逻辑赋值状态变化过程仅为下述逻辑赋值状态变化过程之一：

$$0\to1\to0,\quad 1\to0\to1.\tag{3}$$

故逻辑函数 F 发生功能冒险．很显然，验算工作从 $L''=2^{n-1}n!$ 次减少到验算 8 次，而功能冒险仅在逻辑赋值状态变化过程 $0\to1\to0$ 或 $1\to0\to1$ 下发生，再减少到只验算 2 次．

定理 3　逻辑函数 $F(\tilde{X}_1,\tilde{X}_2,\cdots,\tilde{X}_n)$ 的初态 $\tilde{X}_1\tilde{X}_2\cdots\tilde{X}_n$ 转移到终 $\bar{\tilde{X}}_1\bar{\tilde{X}}_2\cdots\bar{\tilde{X}}_n$ 之最短状态变化过程任意子三状态变化过程均可用二变量逻辑余式状态变化过程等效．

证明　逻辑函数 $F(\tilde{X}_1,\tilde{X}_2,\cdots,\tilde{X}_n)$ 的初态 $\tilde{X}_1\tilde{X}_2\cdots\tilde{X}_n$ 转移到终态 $\bar{\tilde{X}}_1\bar{\tilde{X}}_2\cdots\bar{\tilde{X}}_n$ 之最短状态变化过程任意子三状态变化过程为 S_J: $\tilde{X}_1\cdots\tilde{X}_j\cdots\bar{\tilde{X}}_n\to\tilde{X}_1\cdots\bar{\tilde{X}}_j\cdots\bar{\tilde{X}}_n\to\bar{\tilde{X}}_1\cdots\bar{\tilde{X}}_j\cdots\bar{\tilde{X}}_n$，其相邻状态仅一变量不同，即第一状态，第二状态只 $\tilde{X}_j$ 不同，其余相同；如果仅考虑 $\tilde{X}_1\tilde{X}_j$，其余变量均为 1 或 0 时，那么第一状态与二变量逻辑余式 $\tilde{X}_1\tilde{X}_j$ 等价，第二状态与二变量逻辑余式 $\tilde{X}_1\bar{\tilde{X}}_j$ 等价；同样，第三状态与二变量逻辑余式 $\bar{\tilde{X}}_1\bar{\tilde{X}}_j$ 等价；即子三状态变化过程 S_J: $\tilde{X}_1\cdots\tilde{X}_j\cdots\bar{\tilde{X}}_n\to\tilde{X}_1\cdots\bar{\tilde{X}}_j\cdots\bar{\tilde{X}}_n\to\bar{\tilde{X}}_1\cdots\bar{\tilde{X}}_j\cdots\bar{\tilde{X}}_n$，等效于二变量逻辑余式状态变化过程：

$$\tilde{X}_1\tilde{X}_j\to\tilde{X}_1\bar{\tilde{X}}_j\to\bar{\tilde{X}}_1\bar{\tilde{X}}_j.\tag{4}$$

这个状态变化过程称为逻辑函数 F 的初态 $\tilde{X}_1\tilde{X}_2\cdots\tilde{X}_n$ 转移到终态 $\bar{\tilde{X}}_1\bar{\tilde{X}}_2\cdots\bar{\tilde{X}}_n$ 的最短状态变化过程之等效子二变量逻辑余式状态变化过程 S'_J．

定理 4　逻辑函数 $F(\tilde{X}_1,\tilde{X}_2,\cdots,\tilde{X}_n)$ 的初态 $\tilde{X}_1\tilde{X}_2\cdots\tilde{X}_n$ 转移到终态 $\bar{\tilde{X}}_1\bar{\tilde{X}}_2\cdots\bar{\tilde{X}}_n$ 之最短状态变化过程任意等效子二变量逻辑余式状态变化过程 S'_J: $\tilde{X}_i\tilde{X}_j\to\tilde{X}_i\bar{\tilde{X}}_j\to\bar{\tilde{X}}_i\bar{\tilde{X}}_j$, $i\neq j$,

$i=1,2,\cdots,n$, $j=1,2,\cdots,n$. 逻辑变量 $\tilde{X}_i,\tilde{X}_j$ 若赋相同逻辑值，则逻辑函数 F 不发生功能冒险。

证明 逻辑函数 $F(\tilde{X}_1,\tilde{X}_2,\cdots,\tilde{X}_n)$ 任意等效子二变量逻辑余式状态变化过程 S'_j: $\tilde{X}_i\tilde{X}_j \to \tilde{X}_i\bar{\tilde{X}}_j \to \bar{\tilde{X}}_i\bar{\tilde{X}}_j$ 逻辑变量 $\tilde{X}_i,\tilde{X}_j$ 同为 0, $\tilde{X}_i\tilde{X}_j=00$, 状态逻辑值为[6] $V(\tilde{X}_i\tilde{X}_j)=0$, $\bar{\tilde{X}}_i\bar{\tilde{X}}_j=\bar{0}\,\bar{0}=11$; 状态逻辑值为 $V'(\bar{\tilde{X}}_i\bar{\tilde{X}}_j)=1$, 有 $V(\tilde{X}_i\tilde{X}_j)\neq V'(\bar{\tilde{X}}_i\bar{\tilde{X}}_j)$; $\tilde{X}_i,\tilde{X}_j$ 同为 1， $\tilde{X}_i\tilde{X}_j=11$, 状态逻辑值为 $V(\tilde{X}_i\tilde{X}_j)=1$, $\bar{\tilde{X}}_i\bar{\tilde{X}}_j=\bar{1}\,\bar{1}=00$, 状态逻辑值为 $V'(\bar{\tilde{X}}_i\bar{\tilde{X}}_j)=0$; 亦有 $V(\tilde{X}_i\tilde{X}_j)\neq V'(\bar{\tilde{X}}_i\bar{\tilde{X}}_j)$ 。也就是说，只要 $\tilde{X}_i,\tilde{X}_j$ 同时赋相同逻辑值，第一状态 $\neq$ 第三状态，第二状态无须考虑就能断定逻辑函数 F 不发生功能冒险。仅 $\tilde{X}_i,\tilde{X}_j$ 同时赋不同逻辑值时，第一状态 = 第三状态，逻辑函数 F 能否发生功能冒险则由第二状态决定，且功能冒险类型则由状态逻辑值 $V(\tilde{X}_i\tilde{X}_j)$ 或 $V'(\bar{\tilde{X}}_i\bar{\tilde{X}}_j)$ 给出。

推论 1 逻辑函数 $F(\tilde{X}_1,\tilde{X}_2,\cdots,\tilde{X}_n)$ 的初态 $\tilde{X}_1\tilde{X}_2\cdots\tilde{X}_n$ 转移到终态 $\bar{\tilde{X}}_1\bar{\tilde{X}}_2\cdots\bar{\tilde{X}}_n$ 的最短状态变化过程之等效子二变量逻辑余式状态变化过程：

$$\tilde{X}_i\bar{\tilde{X}}_j \to \tilde{X}_i\tilde{X}_j \to \bar{\tilde{X}}_i\tilde{X}_j. \tag{5}$$

逻辑变量 $\tilde{X}_i,\bar{\tilde{X}}_j$ 同时赋相同逻辑值，逻辑函数 F 可能发生功能冒险。最终断定则由关系式 $V(\tilde{X}_i\bar{\tilde{X}}_j)=V'(\bar{\tilde{X}}_i\tilde{X}_j)$ 给出。

推论 2 逻辑函数 $F(\tilde{X}_1,\tilde{X}_2,\cdots,\tilde{X}_n)$ 的初态 $\tilde{X}_1\tilde{X}_2\cdots\tilde{X}_n$ 转移到终态 $\bar{\tilde{X}}_1\bar{\tilde{X}}_2\cdots\bar{\tilde{X}}_n$ 的最短状态变化过程之等效子二变量逻辑余式状态变化过程还有两种形式：

$$\tilde{X}_i\tilde{X}_j \to \bar{\tilde{X}}_i\tilde{X}_j \to \bar{\tilde{X}}_i\bar{\tilde{X}}_j, \tag{6}$$

$$\bar{\tilde{X}}_i\tilde{X}_j \to \bar{\tilde{X}}_i\bar{\tilde{X}}_j \to \tilde{X}_i\bar{\tilde{X}}_j, \tag{7}$$

(6),(7) 两式就是逻辑函数 F 发生功能冒险之判断关系式。

3 算法步骤

根据上述结果，我们可以得到快速简化算法步骤如下：

(1) 从最短状态变化过程路径 $L=2^n n!$ 中确定可能发生组合险象的路径。此步骤是算法的关键，原则为：使逻辑函数 F 之二变量逻辑余式为其基本形式 $\tilde{X}_i+\tilde{X}_j$, $\tilde{X}_i+\bar{\tilde{X}}_j$ 或 $\tilde{X}_i\tilde{X}_j$, $\tilde{X}_i\bar{\tilde{X}}_j$, $i\neq j$ 或使其二变量逻辑余式为最简。如：三变量逻辑函数 $F=\tilde{X}_1\tilde{X}_3+\tilde{X}_2\bar{\tilde{X}}_3$, 全部可能状态为 8，都可作为初态，最短状态变化过程为 6，全部最短状态变化过程路径为 24 。若以 $\tilde{X}_1\tilde{X}_2\tilde{X}_3$ 为初态，终态为 $\bar{\tilde{X}}_1\bar{\tilde{X}}_2\bar{\tilde{X}}_3$， $\tilde{X}_1\tilde{X}_2\tilde{X}_3 \to \bar{\tilde{X}}_1\bar{\tilde{X}}_2\tilde{X}_3 \to \bar{\tilde{X}}_1\bar{\tilde{X}}_2\bar{\tilde{X}}_3$ 为最短状态变化过程路径，可省去计算其余 23 条路径。

(2) 确定的最短状态变化过程路径由若干个三状态子状态变化过程代替。上例中的最短状态变化过程路径可划分为三状态子状态变化过程： $S_1:\tilde{X}_1\tilde{X}_2\tilde{X}_3 \to \tilde{X}_1\bar{\tilde{X}}_2\tilde{X}_3 \to \bar{\tilde{X}}_1\bar{\tilde{X}}_2\tilde{X}_3$, $S_2:\tilde{X}_1\bar{\tilde{X}}_2\tilde{X}_3 \to \bar{\tilde{X}}_1\bar{\tilde{X}}_2\tilde{X}_3 \to \bar{\tilde{X}}_1\bar{\tilde{X}}_2\bar{\tilde{X}}_3$ 。

(3) 划分的三状态子状态变化过程用二变量逻辑余式状态变化过程等效。 $S_1:\tilde{X}_1\tilde{X}_2\tilde{X}_3 \to \tilde{X}_1\bar{\tilde{X}}_2\tilde{X}_3 \Rightarrow S'_1:\tilde{X}_1\tilde{X}_2 \to \tilde{X}_1\bar{\tilde{X}}_2 \to \bar{\tilde{X}}_1\bar{\tilde{X}}_2$ 。这种等效说明：逻辑函数 $F=\tilde{X}_1\tilde{X}_3+\bar{\tilde{X}}_2\tilde{X}_3$ 在 $\tilde{X}_3=1$ 时，若 $\tilde{X}_1,\tilde{X}_2$ 按 S'_1 所示路径变化，则 F 发生组合险象。同时，险象类型也可确定。

例 1 三变量或基本逻辑函数 $F=\tilde{X}_1+\tilde{X}_2+\tilde{X}_3$ 。

初态为 $\tilde{X}_1\tilde{X}_2\tilde{X}_3$, 终态为 $\bar{\tilde{X}}_1\bar{\tilde{X}}_2\bar{\tilde{X}}_3$, 二变量逻辑余式为： $\tilde{X}_1+\tilde{X}_2$, 即 $\tilde{X}_3=0$, 二变量逻辑余式状态变化过程路径为 $\tilde{X}_1\tilde{X}_2 \to \tilde{X}_1\bar{\tilde{X}}_2 \to \bar{\tilde{X}}_1\bar{\tilde{X}}_2$， $\tilde{X}_1,\tilde{X}_2$ 的逻辑值不同时发生组合险象。

取 $\tilde{X}_1=0$, $\tilde{X}_2=1$, 则逻辑值状态变化过程为 $0+1\rightarrow 0+\bar{1}\rightarrow \bar{0}+\bar{1}\Rightarrow 1\rightarrow 0\rightarrow 1$. 该例说明：$\tilde{X}_3=0$ 时，$\tilde{X}_1,\tilde{X}_2$ 按上述过程变化，$F=\tilde{X}_1+\tilde{X}_2+\tilde{X}_3$ 发生 0 型功能冒险：$1\rightarrow 0\rightarrow 1$.

不难确定四变量逻辑函数 $F=\tilde{X}_1+\tilde{X}_2+\tilde{X}_3+\tilde{X}_4$, 在 $\tilde{X}_3=\tilde{X}_4=0$ 时，亦发生 0 型功能冒险.

例 2　三变量与基本逻辑函数 $F=\tilde{X}_1\tilde{X}_2\bar{\tilde{X}}_3$.

初态为 $\tilde{X}_1\tilde{X}_2\tilde{X}_3$, 终态为 $\bar{\tilde{X}}_1\bar{\tilde{X}}_2\bar{\tilde{X}}_3$, 二变量逻辑余式为 $\tilde{X}_1\tilde{X}_2$ ，即 $\bar{\tilde{X}}_3=1$ 时，二变量逻辑余式状态变化过程路径为 $\tilde{X}_1\tilde{X}_2\rightarrow\tilde{X}_1\bar{\tilde{X}}_2\rightarrow\bar{\tilde{X}}_1\bar{\tilde{X}}_2$，$\tilde{X}_1,\tilde{X}_2$, 逻辑值不同时，$F$ 发生组合险象. 取 $\tilde{X}_1=1$, $\tilde{X}_2=0$, 则逻辑值状态变化过程为 $10\rightarrow 1\bar{0}\rightarrow\bar{1}\,\bar{0}\Rightarrow 0\rightarrow 1\rightarrow 0$. 此例说明：$\tilde{X}_3=0$ 时，$\tilde{X}_1,\tilde{X}_2$ 按上述过程变化，$F=\tilde{X}_1\tilde{X}_2\bar{\tilde{X}}_3$ 发生 1 型功能冒险：$0\rightarrow 1\rightarrow 0$.

不难验算四变量逻辑函数 $F=\tilde{X}_1\tilde{X}_2\bar{\tilde{X}}_3\tilde{X}_4$, 在 $\tilde{X}_3=0$, $\tilde{X}_4=1$ 时，要发生 1 型功能冒险.

4 计算结果

形如 M=AABB 的逻辑函数 F 全部函数项，即便是变量数 n 相当小时，也是一个极其庞大的数字. 为篇幅考虑，本文仅计算形为如下的基本逻辑函数项：

$$\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i+\sum_{j=1}^{n}\tilde{X}_j,\qquad \sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i\cdot\sum_{j=1}^{n}\tilde{X}_j,\qquad i\neq j. \tag{8}$$

4.1 计算过程

二变量逻辑函数基本项：$\tilde{X}_1\tilde{X}_2$. 初态为 $\tilde{X}_1\tilde{X}_2$, 终态为 $\bar{\tilde{X}}_1\bar{\tilde{X}}_2$, 状态变化过程：$\tilde{X}_1\tilde{X}_2\rightarrow\tilde{X}_1\bar{\tilde{X}}_2\rightarrow\bar{\tilde{X}}_1\bar{\tilde{X}}_2$. 仅 $\tilde{X}_1=1$, $\tilde{X}_2=0$ 时，为 $10\rightarrow 1\bar{0}\rightarrow\bar{1}\,\bar{0}$, 等效逻辑赋值状态变化过程为 $0\rightarrow 1\rightarrow 0$ 即 1 型功能冒险. $\tilde{X}_1,\tilde{X}_2$ 赋其他逻辑值时不发生功能冒险.

4.2 计算结果

(1) 二变量逻辑函数：1 型功能冒险：$0\rightarrow 1\rightarrow 0$. 二变量逻辑函数为 $\tilde{X}_1\tilde{X}_2,\tilde{X}_1\bar{\tilde{X}}_2$. 0 型功能冒险：$1\rightarrow 0\rightarrow 1$. 二变量逻辑函数为 $\tilde{X}_1+\tilde{X}_2,\tilde{X}_1+\bar{\tilde{X}}_2$.

(2) 三变量逻辑函数：1 型功能冒险：$0\rightarrow 1\rightarrow 0$. 三变量逻辑函数为 $\tilde{X}_1\tilde{X}_2,\tilde{X}_2\tilde{X}_3,\tilde{X}_3\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_1\bar{\tilde{X}}_2,\tilde{X}_2\bar{\tilde{X}}_3,\tilde{X}_3\bar{\tilde{X}}_1$; $\tilde{X}_1\tilde{X}_2\tilde{X}_3,\tilde{X}_1\tilde{X}_2\bar{\tilde{X}}_3,\tilde{X}_1\bar{\tilde{X}}_2\tilde{X}_3,\bar{\tilde{X}}_1\tilde{X}_2\bar{\tilde{X}}_3$. 0 型功能冒险：$1\rightarrow 0\rightarrow 1$. 三变量逻辑函数为 $\tilde{X}_1+\tilde{X}_2,\tilde{X}_2+\tilde{X}_3,\tilde{X}_3+\tilde{X}_1,\tilde{X}_1+\bar{\tilde{X}}_2,\tilde{X}_2+\bar{\tilde{X}}_3,\tilde{X}_3+\bar{\tilde{X}}_1$; $\tilde{X}_1+\tilde{X}_2+\tilde{X}_3$, $\tilde{X}_1+\tilde{X}_2+\bar{\tilde{X}}_3,\tilde{X}_1+\bar{\tilde{X}}_2+\tilde{X}_3,\bar{\tilde{X}}_1+\tilde{X}_2+\tilde{X}_3$.

(3) 四变量逻辑函数：1 型功能冒险：$0\rightarrow 1\rightarrow 0$. 四变量逻辑函数为 $\tilde{X}_1\tilde{X}_2,\tilde{X}_1\tilde{X}_3,\tilde{X}_1\tilde{X}_4$, $\tilde{X}_2\tilde{X}_3,\tilde{X}_2\tilde{X}_4,\tilde{X}_3\tilde{X}_4,\tilde{X}_1\bar{\tilde{X}}_2,\tilde{X}_1\bar{\tilde{X}}_3,\tilde{X}_1\bar{\tilde{X}}_4$; $\tilde{X}_2\bar{\tilde{X}}_3,\tilde{X}_2\bar{\tilde{X}}_4,\tilde{X}_3\bar{\tilde{X}}_4$; $\tilde{X}_1\tilde{X}_2\tilde{X}_3,\tilde{X}_1\tilde{X}_2\bar{\tilde{X}}_3,\tilde{X}_1\bar{\tilde{X}}_2\tilde{X}_3$, $\bar{\tilde{X}}_1\tilde{X}_2\tilde{X}_3$, $\tilde{X}_1\tilde{X}_2\tilde{X}_4$, $\tilde{X}_1\tilde{X}_2\bar{\tilde{X}}_4$, $\tilde{X}_1\bar{\tilde{X}}_2\tilde{X}_4$, $\bar{\tilde{X}}_1\tilde{X}_2\tilde{X}_4$, $\tilde{X}_1\tilde{X}_3\tilde{X}_4$, $\tilde{X}_1\tilde{X}_3\bar{\tilde{X}}_4$, $\tilde{X}_1\bar{\tilde{X}}_3\tilde{X}_4$, $\bar{\tilde{X}}_1\tilde{X}_3\tilde{X}_4$, $\tilde{X}_2\tilde{X}_3\tilde{X}_4$, $\tilde{X}_2\tilde{X}_3\bar{\tilde{X}}_4$, $\tilde{X}_2\bar{\tilde{X}}_3\tilde{X}_4$, $\bar{\tilde{X}}_2\tilde{X}_3\tilde{X}_4$; $\tilde{X}_1\tilde{X}_2\tilde{X}_3\tilde{X}_4$, $\tilde{X}_1\tilde{X}_2\tilde{X}_3\bar{\tilde{X}}_4$, $\tilde{X}_1\tilde{X}_2\bar{\tilde{X}}_3\tilde{X}_4$, $\tilde{X}_1\bar{\tilde{X}}_2\tilde{X}_3\tilde{X}_4$, $\bar{\tilde{X}}_1\tilde{X}_2\tilde{X}_3\tilde{X}_4$, $\tilde{X}_1\tilde{X}_2\bar{\tilde{X}}_3\bar{\tilde{X}}_4$, $\tilde{X}_1\bar{\tilde{X}}_2\tilde{X}_3\bar{\tilde{X}}_4$, $\bar{\tilde{X}}_1\tilde{X}_2\tilde{X}_3\bar{\tilde{X}}_4$.

0 型功能冒险：$1\rightarrow 0\rightarrow 1$. 四变量逻辑函数为 $\tilde{X}_1+\tilde{X}_2,\tilde{X}_1+\tilde{X}_3,\tilde{X}_1+\tilde{X}_4,\tilde{X}_2+\tilde{X}_3$, $\tilde{X}_2+\tilde{X}_4,\tilde{X}_3+\tilde{X}_4,\tilde{X}_1+\bar{\tilde{X}}_2,\tilde{X}_1+\bar{\tilde{X}}_3,\tilde{X}_1+\bar{\tilde{X}}_4$; $\tilde{X}_2+\tilde{X}_2\bar{\tilde{X}}_3,\tilde{X}_2+\bar{\tilde{X}}_4,\tilde{X}_3+\bar{\tilde{X}}_4$; $\tilde{X}_1+\tilde{X}_2+\tilde{X}_3$, $\tilde{X}_1+\tilde{X}_2+\bar{\tilde{X}}_3,\tilde{X}_1+\bar{\tilde{X}}_2+\tilde{X}_3,\bar{\tilde{X}}_1+\tilde{X}_2+\tilde{X}_3,\tilde{X}_1+\tilde{X}_2+\tilde{X}_4,\tilde{X}_1+\tilde{X}_2+\bar{\tilde{X}}_4,\tilde{X}_1+\bar{\tilde{X}}_2+\tilde{X}_4$, $\bar{\tilde{X}}_1+\tilde{X}_2+\tilde{X}_4,\tilde{X}_1+\tilde{X}_3+\tilde{X}_4,\tilde{X}_1+\tilde{X}_3+\bar{\tilde{X}}_4,\tilde{X}_1+\bar{\tilde{X}}_3+\tilde{X}_4,\bar{\tilde{X}}_1+\tilde{X}_3+\tilde{X}_4,\tilde{X}_2+\tilde{X}_3+\tilde{X}_4$, $\tilde{X}_2+\tilde{X}_3+\bar{\tilde{X}}_4$, $\tilde{X}_2+\bar{\tilde{X}}_3+\tilde{X}_4$, $\bar{\tilde{X}}_2+\tilde{X}_3+\tilde{X}_4$; $\tilde{X}_1+\tilde{X}_2+\tilde{X}_3+\tilde{X}_4$, $\tilde{X}_1+\tilde{X}_2+\tilde{X}_3+\bar{\tilde{X}}_4$, $\tilde{X}_1+\tilde{X}_2+\bar{\tilde{X}}_3+\tilde{X}_4,\tilde{X}_1+\bar{\tilde{X}}_2+\tilde{X}_3+\tilde{X}_4,\bar{\tilde{X}}_1+\tilde{X}_2+\tilde{X}_3+\tilde{X}_4,\tilde{X}_1+\tilde{X}_2+\bar{\tilde{X}}_3+\bar{\tilde{X}}_4,\tilde{X}_1+\bar{\tilde{X}}_2+\tilde{X}_3+\bar{\tilde{X}}_4$, $\bar{\tilde{X}}_1+\tilde{X}_2+\tilde{X}_3+\bar{\tilde{X}}_4$.

产生功能冒险的非逻辑函数基本项可依照写出.

$n \geq 5$ 之逻辑函数可仿上述过程算出.

简单复合逻辑函数由基本逻辑函数跟 $\tilde{X}$ 或 $\bar{\tilde{X}}$ 的"与"、"或"运算构成, 复杂复合逻辑函数则是基本逻辑函数跟 $\tilde{X}$ 或 $\bar{\tilde{X}}$ 有限次"与"、"或"运算构成 [7].

简单复合逻辑函数, 复杂复合逻辑函数功能冒险遵循下列规律:

定理 5 逻辑函数

$$F(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \cdots, \tilde{X}_n) = F_1(\tilde{X}_i, \tilde{X}_j) + F_2(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \cdots, \tilde{X}_n), \tag{9}$$

若基本逻辑函数 $F_1(\tilde{X}_i, \tilde{X}_j)$ 发生功能冒险, 且 $V[F_2(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \cdots, \tilde{X}_n)] = 0$, 则逻辑函数 F 发生功能冒险. $i \neq j, i = 1, 2, \cdots, n, j = 1, 2, \cdots, n$.

定理 6 逻辑函数

$$F(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \cdots, \tilde{X}_n) = F_1(\tilde{X}_i, \tilde{X}_j) \cdot F_2(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \cdots, \tilde{X}_n), \tag{10}$$

若基本逻辑函数 $F_1(\tilde{X}_i, \tilde{X}_j)$ 发生功能冒险且 $V[F_2(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \cdots, \tilde{X}_n)] = 1$, 则逻辑函数 F 发生功能冒险. $i = 1, 2, \cdots, n, j = 1, 2, \cdots, n$.

5 险象定位计算实例

半加器是构成全加器, 快速进位链四位全加器, 多功能 SN74181 十六位算术逻辑运算器等的核心电路. 半加器可表示为

$$\left.\begin{aligned} S &= A\overline{B} + \overline{A}B, \\ C &= AB, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

式中 A 为被加数 B 为加数, S 本位和, C 为向高位的进位数, S 即为"异或"电路. 文献 [8] 中同"或"电路, $S' = AB + \overline{A}\overline{B}$ 即符合电路之险象问题已经确定, 而 S 为 S' 之反演电路, 用类似方法可对 S 进行险象定位.

$C = AB$ 之险象定位计算可用本文提出的理论进行.

A, B 异号时, 状态变化过程为

状态变化过程 1: $\begin{cases} 01 \to 00 \to 10, \\ 01 \to 11 \to 10, \end{cases}$ 对应逻辑值状态变化过程: $\begin{cases} 0 \to 0 \to 0, \\ 0 \to 1 \to 0. \end{cases}$

状态变化过程 2: $\begin{cases} 10 \to 00 \to 01, \\ 10 \to 11 \to 01, \end{cases}$ 对应逻辑值状态变化过程: $\begin{cases} 0 \to 0 \to 0, \\ 0 \to 1 \to 0. \end{cases}$

A, B 同号时, 状态变化过程:

状态变化过程 3: $\begin{cases} 00 \to 01 \to 11, \\ 00 \to 10 \to 11, \end{cases}$ 对应逻辑值状态变化过程: $\begin{cases} 0 \to 0 \to 1, \\ 0 \to 0 \to 1. \end{cases}$

状态变化过程 4: $\begin{cases} 11 \to 01 \to 00, \\ 11 \to 10 \to 00, \end{cases}$ 对应逻辑值状态变化过程: $\begin{cases} 1 \to 0 \to 0, \\ 1 \to 0 \to 0. \end{cases}$

半加器之进位数 $C = AB$ 之全部状态变化过程如上. 仅 A、B 取不同逻辑值时, 即按状态变化过程 1, 状态变化过程 2 转换才发出冒险竞争, 其类型为 1 型功能冒险: $0 \to 1 \to 0$. 至此半加器险象问题已全部解决.

6 结 论

文中导出的规律使得逻辑函数初态转移到终态的最短状态变化过程路径 $L = 2^n n!$，每个状态 2^n 个逻辑赋值，以及 $n+1$ 个逻辑状态的功能冒险计算简化为等效二变量逻辑余式状态变化过程计算．这种简化计算方法仅验算三状态划分的状态变化过程，且其中每个状态只含两个逻辑变量，另外，状态变化过程路径也仅计算两条便能确定逻辑函数功能冒险类型，产生冒险条件及发生位置．

参 考 文 献

[1] Hurst S. L. The Logical Processing of Digital Signals, New York: Crane, Russak & Company, Inc, 1978, 180-269.

[2] Hill F. J, Peterson G. R. Introduction to Switching Theory and Logical Design, New York: John Wiley & Sons, Inc, 1981, 138-230.

[3] Armstrong D B, Friedman A D. Realization of anychronous circuits without inserred delay elemeut, IEEE Trans. on Computers, 1968, C-17(2): 129-134.

[4] 童永承．组合险象逻辑余式判据，计算机学报， 1994(6): 429-434.

[5] 童永承．多输入变量组合险象精确定位，计算机学报， 1997(5): 433-440.

[6] 李建勋著，罗银芳，刘启业译．数字电路与逻辑设计，北京：科学出版社， 1981, 16, 7-225.

[7] 王玉龙编，数字逻辑，北京：高等教育出版社， 1987， 243-281.

[8] 王爱英编，计算机组成与结构，北京：清华大学出版社， 1995.9， 161-225.

STUDY OF SIMPLIFIED HIGH-SPEED ALGORITHM FOR FUNCTIONAL HAZARDS

Tong Yongcheng Li Guoping

(*Hubei Normal University, Huangshi* 435002)

Abstract The theory of participating logical function and logical function complementary formula are used in this paper, a series of importent laws are obtained, the state change process of guessed equivalant two variables logical complementary formula is used to accurate location of functional hazard, avoided heavy and complicated calculations. It is established strong foundtion for digital circuits and computer design.

Key words Digital hazards, Equivalent state change process, Function hazards

童永承： 男， 1945 年生，教授，主要从事数字险象，人工智能方面的研究.

李国屏： 副教授，主要从事数据结构，计算方法方面的研究.