

同轴波纹波导的高频特性数值分析¹

文光俊 李家胤 刘盛纲 谢甫珍*

(电子科技大学高能电子学研究所 成都 610054)

*(解放军后勤工程学院 重庆 400042)

摘 要 本文提出先用时域有限差分法计算含周期慢波结构的谐振腔的谐振频率和谐振场分布,再基于周期慢波电路色散关系的周期性质,由几个特殊色散点处的频率及波数数值组合出周期慢波线的完整色散关系的新方法。数值计算了同轴波纹波导中 TM_{0n} 模式的色散关系、耦合阻抗等特性参量。

关键词 同轴波纹波导,色散关系,时域有限差分法,耦合阻抗

中图分类号 TN128, TN125

1 引 言

同轴波纹波导是同轴相对论返波管、行波管等大功率微波源设计中首选的高频结构,准确地分析其高频特性,对研究和设计这类相对论器件是十分必要的。数值模拟是分析复杂慢波结构色散关系的一种有效方法,已得到广泛应用。现有的分析计算周期慢波结构色散关系的理论和程序^[1,2]是各有特点,文献[1]中二维高频场计算程序通常限于计算结构中低阶模式的色散关系;不易用于计算高阶模式;文献[2]中分析空心波纹波导色散特性的计算方法是无法类推来分析大直径同轴波纹波导高频特性的,因为其理论中涉及幅值很大的复宗量贝塞尔函数 $N_n(x)$ 的计算。为此,我们提出了一种分析同轴波纹波导高频特性的新方法:先用时域有限差分法(FD-TD)数值计算由 N 个周期的同轴波纹波导在两端恰当短路构成的谐振腔的谐振频率和谐振场分布;再将得到的谐振频率运用合成技术拟合出同轴波纹波导各模式的完整色散关系。利用谐振场分布,能计算同轴波纹波导模式场中各次谐波的耦合阻抗等参量。

2 原 理

将 N 个周期结构的慢波波导,在两端恰当处短路,则构成谐振腔。对于波导中每个传播模式,谐振腔都将支持 $N+1$ 个离散的纵向谐振模式。每个纵向模式的谐振频率分别对应电磁波在一个结构周期长度内的相移 KL 分布在 0 至 π 内。 K 是电磁波的相位常数, L 是结构周期长度。一旦用实验法或数值计算法得到这 $N+1$ 个谐振频率,就知道了该传播模式色散曲线上的 $N+1$ 个离散点,运用插值技术能由这 $N+1$ 个离散点拟合出该模式的完整色散曲线。

时域有限差分同离散傅里叶变换技术相结合的方法^[3]是高精度数值计算谐振腔的谐振频率和场分布最有效方法之一。下以分析含同轴波纹波导的谐振腔的谐振特性为例阐述时域有限差分法的原理。由 6 个周期同轴波纹波导封闭的谐振腔结构如图 1 所示。腔中 TM_{0n}

¹ 1997-08-01 收到, 1998-02-20 定稿
国家 863 激光技术领域资助项目

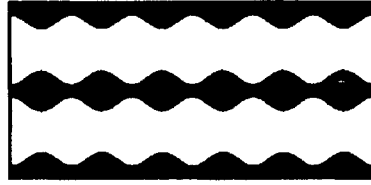


图 1 同轴波纹波导谐振腔

模式的三个场分量 $E_z(r, z, t)$, $E_r(r, z, t)$ 和 $H_\theta(r, z, t)$ 满足 Maxwell 方程:

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 \partial E_r / \partial t &= -\partial H_\theta / \partial z, \\ \varepsilon_0 \partial E_z / \partial t &= (1/r) \partial (r H_\theta) / \partial r, \\ \mu_0 \partial H_\theta / \partial t &= \partial (r E_z) / \partial r - \partial E_r / \partial z.\end{aligned}\quad (1)$$

各个场分量 $\Phi(r, z, t)$ 可以表示为空间谐振模的叠加:

$$\Phi(r, z, t) = \sum_m C_m \varphi_m(r, z) e^{j2\pi f_m t}, \quad (2)$$

式中 C_m 是复常数, φ_m 是所研究模式的空间分布函数, f_m 是相应模式的频率。若已知在 (r, z) 点上场时间序列值 Φ_i (时间步长为 Δt), 则应用离散傅里叶变换可以求得点 (r, z) 上的一组系数, 即

$$F_k(r, z) = \sum_{n=0}^{N_t-1} \Phi_n e^{-j\omega k n}, \quad \omega = 2\pi/N_t, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N_t/2. \quad (3)$$

使 $|F_k|$ 得到最大值的频率值 f_k 近似等于 (2) 式中的模式频率 f_m , 若频率 f_m 与其相邻值分离足够大时 (且 N_t 也足够大), f_m 可表示为

$$f_m = [1/(N_t \cdot \Delta t)] [(k F_k - k' F_k) / (F_k - F_k')], \quad (4)$$

k 是与 $|F_k|$ 最大值相联系的指数, 它对应于 f_m , k' 是相邻的一个指数 (前一个或下一个)。当求得模式的谐振频率 f_m 后, 傅氏系数即给出该模式的空间分布:

$$\Phi_m(r, z) / [\Phi_m(r_0, z_0)] = F_k(r, z) / [F_k(r_0, z_0)], \quad (5)$$

其中 (r_0, z_0) 是所选择用于归一化模式场分布的空间点。

FD-TD 法计算的谐振频率的精度主要依赖于空间网格的步长 Δr 和 Δz 。时间抽样点数, 曲线 (曲面) 边界条件的拟合程度也影响谐振频率的精度。

2.1 色散关系

任何周期结构的色散关系可表示为

$$f = f(\cos(KL), g) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(g) \cos(iKL) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(g) \cos i\psi, \quad (6)$$

式中 $a_0(g), a_1(g), a_2(g), \dots, a_i(g)$, 是依赖于慢波结构的展开系数. 这个级数收敛很快, 截取前七项的误差不超过万分之一^[4], 故周期结构的色散特性关系能由 (6) 式中截取前有限项和高精度地近似:

$$f \approx \sum_{i=0}^n a_i(g) \cos(iKL). \quad (7)$$

当已知色散曲线上一些离散点的坐标 $(f_0, \psi_0), (f_1, \psi_1), (f_2, \psi_2), \dots, (f_n, \psi_n)$ 时, 将它们代入 (7) 式, 得到关于 $a_0(g), a_1(g), \dots, a_n(g)$ 的 $n+1$ 个线性代数方程, 求解则得到前 n 项相应参数.

若已知 $\psi = 0, \pi/6, 2\pi/6, \dots, 6\pi/6$ 七个特殊点, 解出 $a_0(g), a_1(g), \dots, a_6(g)$ 的表达式为

$$\left. \begin{aligned} a_0(g) &= [f_0 + 2f_{\pi/2} + 2f_{\pi/3} + 2f_{2\pi/3} + 2f_{5\pi/6} + 2f_{\pi}] / 12, \\ a_1(g) &= [(f_0 + f_{\pi/3} - f_{2\pi/3} - f_{\pi}) + \sqrt{3}(f_{\pi/6} - f_{5\pi/6})] / 6, \\ a_2(g) &= [(f_0 + f_{\pi/6} + f_{5\pi/6} + f_{\pi}) - (f_{\pi/3} + f_{2\pi/3} + 2f_{\pi/2})] / 6, \\ a_3(g) &= [f_0 - f_{\pi} + 2f_{2\pi/3} - 2f_{\pi/3}] / 6, \\ a_4(g) &= [f_0 + f_{\pi} + 2f_{\pi/2} - (f_{\pi/6} + f_{\pi/3} + f_{2\pi/3} + f_{5\pi/6})] / 6, \\ a_5(g) &= [(f_0 + f_{\pi/3} - f_{2\pi/3} - f_{\pi}) + \sqrt{3}(f_{5\pi/6} - f_{\pi/6})] / 6, \\ a_6(g) &= [f_0 - 2f_{\pi/6} + 2f_{\pi/3} - 2f_{\pi/2} + 2f_{2\pi/3} - 2f_{5\pi/6} + f_{\pi}] / 12. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

代入 (7) 式, 得到特定模式的完整色散关系可近似表示为

$$f \approx \sum_{i=0}^6 a_i(g) \cos(iKL). \quad (9)$$

色散曲线上任一点的相速和群速由 (9) 式得到:

$$V_p = 2\pi \sum_{i=0}^6 a_i(g) \cos(iKL) / K, \quad (10)$$

$$V_g = - \sum_{i=1}^6 2\pi i L a_i(g) \sin(iKL). \quad (11)$$

2.2 耦合阻抗

慢波系统的耦合阻抗是一个重要参量, 它表征了电子注与电磁场相互作用的效能. 慢波结构中模式场的第 n 次空间谐波的耦合阻抗 R_{cn} 为

$$R_{cn} = |E_{zn}|^2 / (2K_n^2 P) = |E_{zn}|^2 L / (2K_n^2 W V_g), \quad (12)$$

式中 E_{zn} 是周期结构中轴向场第 n 次谐波的幅值, P 是传输总功率, W 是一个周期长度内电磁场能量, $K_n = K + 2\pi n/L$ 是 n 次谐波的轴向相位常数.

含 N 个周期结构的谐振腔在谐振态的电磁场储能和轴向场的幅值, 都是相同长度周期结构在行波态的量值的两倍. 对 (5) 式计算出的谐振场进行能量积分, 则能得到腔中电场能

量 W^s 。对谐振场轴向分量 E_z 沿轴向分布进行傅里叶展开, 得到展开系数 E_{zn}^s , 则耦合阻抗 R_{cn} 可表示为

$$R_{cn} = |E_{zn}^s|^2 NL^3 / [4(KL + 2\pi n)^2 W^s V_g]. \quad (13)$$

3 数值计算

我们用 FD-TD 法计算了由 6 个周期空心波纹波导两端短路构成的谐振腔中 TM_{01} 模式的谐振频率和谐振场分布。空心波纹波导壁半径 r_w 沿 z 轴周期变化:

$$r_w = r_0 + r_1 \sin(2\pi z/L) \quad (14)$$

其中 $r_0 = 1.5\text{cm}$, $r_1 = 0.41\text{cm}$, $L = 1.67\text{cm}$ 。计算结果见表 1, 频率值是通过变化空间网格步长, 时间步数, 最后收敛的稳定值。表 1 中同时给出了文献 [2] 分析计算出的和实验测定的谐振频率, 三者比较可见, FD-TD 法计算的谐振频率与 Swegle 法的结果 (准公认值) 的最大相对误差小于 1%。这表明 FD-TD 法能有效地分析含周期结构的谐振腔的谐振特性, 并具有高的数值计算精度。

表 1 空心波纹波导谐振腔中 TM_{01} 的谐振频率 (GHz)

谐振频率	f_0	$f_{\pi/6}$	$f_{2\pi/6}$	$f_{3\pi/6}$	$f_{4\pi/6}$	$f_{5\pi/6}$	f_{π}
FD-TD 法	7.401	7.413	7.728	8.032	8.340	8.646	8.734
Swegle 法 ^[2]	7.40	7.48	7.70	8.02	8.37	8.64	8.75
实验法	7.44	7.57	7.83	8.15	8.48	8.75	8.88

* $\Delta z = \Delta r$ $\Delta t = 1.67 \times 10^{-13}\text{s}$ $\Delta f = 1/(N_t \Delta t) = 0.034\text{GHz}$

取 Swegle 法计算出的三个谐振频率 $f_0, f_{\pi/2}, f_{\pi}$, 按 (7) 式中仅取前三项近似合成出空心波纹波导中 TM_{01} 模式的完整色散曲线同用 Swegle 法逐点计算出的色散曲线相比较, 得到在整个 $0 \leq KL \leq \pi$ 范围内, 最大相对误差小于 0.1%。表明了利用周期慢波电路色散关系的属性, 仅用三个特别的色散点就能拟合出高精度的完整色散关系。

基于上述两个数值检验结论, 表明作者提出的数值模拟法计算周期结构的完整色散关系是正确和有效的。据此, 我们计算了一个同轴波纹波导中 TM_{01} 、 TM_{02} 、 TM_{03} 模式的色散关系。结构见图 1, 内外两个同轴波导的壁半径 r_{in} 和 r_{out} 沿 Z 轴按余弦函数规律变化:

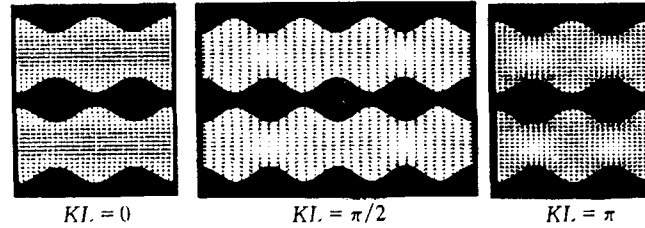
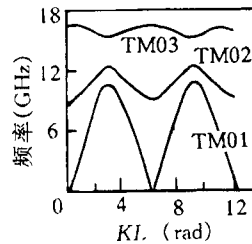
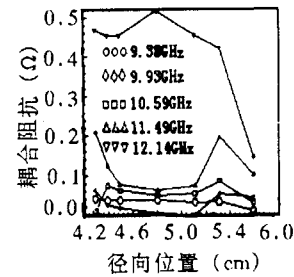
$$\begin{aligned} r_{out} &= r_{00} + r_{01} \cos(2\pi z/L), \\ r_{in} &= r_{i0} + r_{i1} \cos(2\pi z/L + \theta + \pi), \end{aligned} \quad (15)$$

式中 θ 为计及两同轴波导在 Z 轴上相对位置的影响引进的参数。

FD-TD 法计算出 TM_{0n} 模式的谐振频率列在表 2 中。在 TM_{02} 模式下, $KL = 0, \pi/2, \pi$ 三个谐振场分布如图 2 所示。由 (9) 式合成的各 TM_{0n} 模式的色散曲线如图 3 所示。表 2 中还给出了 TM_{02} 模式色散关系随 θ 的变化规律。

表 2 FD-TD 法计算的同轴波纹波导谐振腔中 TM_{0n} 模式的谐振频率 (GHz)

结构参数	谐振频率		f_0	$f_{\pi/6}$	$f_{2\pi/6}$	$f_{3\pi/6}$	$f_{4\pi/6}$	$f_{5\pi/6}$	f_{π}
	模式	θ							
$r_{00}=5.6\text{cm}$	TM_{01}	$\theta = 0$	0.053	2.134	4.281	6.410	8.351	10.430	10.920
$r_{01}=0.26\text{cm}$	TM_{02}	$\theta = 0$	9.202	9.382	9.930	10.592	11.493	12.142	12.571
$r_{10}=4.0\text{cm}$	TM_{02}	$\theta = \pi/4$	8.988	9.104	9.518	10.277	11.310	12.252	12.642
$r_{i1}=0.2\text{cm}$	TM_{02}	$\theta = \pi/2$	9.148	9.238	9.608	10.345	11.327	12.219	12.582
$L=1.1\text{cm}$	TM_{02}	$\theta = 3\pi/4$	9.043	9.183	9.565	10.254	11.329	12.302	12.652
$\Delta t = 2.316 \times 10^{-13}$	TM_{02}	$\theta = \pi$	9.127	9.258	9.673	10.421	11.313	12.217	12.562
$\Delta f = 0.034\text{GHz}$	TM_{03}	$\theta = 0$	16.328	16.468	16.588	16.720	16.020	15.376	14.710

图 2 含同轴波纹波导谐振腔中 TM_{02} 模式的三个谐振态的场分布图 3 同轴波纹波导中 TM_{0n} 模式的色散曲线图 4 同轴波纹波导中 TM_{02} 模式的负一次谐波耦合阻抗随频率、径向位置的分布

从计算出的各 TM_{0n} 模式谐振场分布可见, 同轴波纹波导中 TM_{0n} 模式可分为奇模式 (n 为奇数) 和偶模式 (n 为偶数), 奇模式的场分布关于 $r_s = (r_{00} + r_{i0})/2$ 轴反对称, 偶模式的场分布关于 r_s 轴对称的。

利用谐振场分布, 计算出同轴波纹波导中 TM_{02} 模式的负一次谐波耦合阻抗 R_{c-1} 随频率、径向位置变化的关系曲线如图 4 所示。

4 结束语

我们提出了先用时域有限差分法分析含周期慢波结构的谐振腔的谐振频率和场分布, 再基于周期慢波电路色散关系的周期性质, 用几个已计算的频率拟合出周期慢波电路的完整色散关系的二步数值模拟法, 成功地模拟了同轴波纹波导中 TM_{0n} 模式的色散关系。利用已获得的谐振场分布, 计算了同轴波纹波导中 TM_{02} 模式场的负一次谐波耦合阻抗。该方法具有计算精度高, 普适范围广等特点, 它适用于模拟分析任何具有空间周期性的, 复杂结构的慢波电路的高频特性。

参 考 文 献

- [1] Bromborsky B A. Calculation of TM_{0n} dispersion relations in a corrugated cylindrical waveguide. IEEE Trans. on MTT, 1985, MTT-32(6): 600-605.
- [2] Swegle J A, Poukey J W, Leifeste G T. Backward wave oscillator with rippled wall resonators: Analytic theory and numerical simulation. Phys. Fluid, 1985, 28(9): 2882-2894.
- [3] Navarro A, Nunez M J, Martin E. Finite difference time domain FFT method applied to axially symmetrical electromagnetic resonant devices. IEE Proc.-H., 1990, 137(3): 193-182.
- [4] 张兆镗. 微波管高频系统的测量. 北京: 国防工业出版社, 1982, 181-182.

NUMERICAL ANALYSIS OF HIGH FREQUENCY CHARACTERISTICS
OF COAXIAL CORRUGATED WALL WAVEGUIDE

Wen Guangjun Li Jiayin Liu Shenggang Xie Fuzhen*

*(University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054)**(Logistical Engineering Institute, Chongqing 400042)*

Abstract A novel numerical modeling technique, based on FD-TD and the intrinsic characteristic of spatial periodic structure, is used to analyze the high frequency characteristics of the slow wave structure of arbitrary geometry. The method was successfully applied to calculate the complete dispersion relation and couple impedance of TM_{0n} modes in a coaxial corrugated wall waveguide.

Key words Dispersion relation, Coaxial corrugated wall waveguide, FD-TD, Couple impedance

文光俊: 男, 1964 年生, 博士, 从事微波电子学, 高功率微波技术, 通信对抗等领域的研究工作.

李家胤: 男, 1944 年生, 教授, 主要从事电磁场理论和高功率微波技术等领域的研究工作.

刘盛纲: 男, 1933 年生, 教授, 博士生导师, 中科院院士, 主要从事电磁场理论, 微波电子学, 相对论电子学, 等离子体电子学等领域的研究工作.

谢甫珍: 女, 1965 年生, 硕士, 讲师, 主要从事大学物理教学和微波电子学领域的研究工作.