

自偶置换滤波器¹

宋焕生 吴成柯 刘春阳* 梁德群*

(西安电子科技大学综合业务网理论及关键技术国家重点实验室 西安 710071)

*(西安交通大学图像研究所 西安 710049)

摘要 制约置换滤波器实用的关键是其参数数量过于庞大。文中提出具有自偶特性的置换滤波器结构。该滤波器较一般置换滤波器的参数数量减半,但实验表明,它们的性能却非常接近。

关键词 非线性滤波器, 统计滤波, 顺序统计

中图分类号 TN713

1 引言

置换滤波器 (Permutation filter, 简记为 PF) 是 Baner^[1] 等最近提出的一种新的滤波器结构。由于它包含了几乎所有的基于秩排序操作的非线性滤波器, 从而使得它具有非常重要的理论和实际价值^[2]。对于大小为 N 的滤波窗口, PF 滤波器由一个包含 $N!$ 个项的查找表描述。这意味着当滤波窗口较大时, PF 滤波器的优化设计和存储会变得非常困难甚至不现实。因此, 合理地减少用以描述 PF 滤波器的参数数量就具有非常重要的实际意义。

为了减少 PF 滤波器的参数数量, 可以使其满足一些限制条件。本文令其满足自偶特性, 从而给出一种自偶置换滤波器结构。之所以给置换滤波器施加自偶限制, 主要启发于实际应用中许多非常成功的秩排序滤波器 (如中值滤波器、多级中值滤波器和中心加权中值滤波器等^[3]) 都满足这个特性。自偶置换滤波器可以比置换滤波器的参数数量减少一半, 但实验显示, 它与置换滤波器的性能却非常接近。

2 置换滤波器

对于大小为 N 的滤波窗口中的 N 个数据抽样 x_1, x_2, \dots, x_N (常称为观察数据), 有如下 2 种排序方法:

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N), \quad (1)$$

$$\underline{x}_p = (x_{p_1}, x_{p_2}, \dots, x_{p_N}); \quad x_{p_1} \geq x_{p_2} \geq \dots \geq x_{p_N}. \quad (2)$$

显然 $\underline{x}, \underline{x}_p$ 构成 1 对置换关系, 这种置换关系可以用向量 $\underline{q} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ 描述。

以上置换关系是对观察数据特征的一个重要描述, 所以 \underline{q} 被称作观察数据的特征向量, 由特征向量构成的空间称为特征空间, 标记为 Ω_N 。由于 \underline{q} 是自然数 $\{1, 2, \dots, N\}$ 的某种排列, 而自然数 $\{1, 2, \dots, N\}$ 的任何 1 种排列都对应 1 个 \underline{q} , 所以 $\Omega_N = \{\text{自然数 } \{1, 2, \dots, N\} \text{ 的所有排列}\}$, 而特征空间的体积 (特征空间中包括的元素数量) 为 $O(\Omega_N) = N!$ 。

置换滤波器 (简记为 PF) 的输出 y_{PF} 定义为^[1]

$$y_{PF} = F_{PF}(\underline{q}) = x_{p_l(\underline{q})}. \quad (3)$$

置换滤波器被特征空间 Ω_N 向自然数空间 $\{1, 2, \dots, N\}$ 的映射 l 完全确定, 然而直接描述这种映射关系是不方便的, 为此, 首先建立 Ω_N 与自然数集 $\{1, 2, \dots, N\}$ 的一一对应关

¹ 1997-09-02 收到, 1998-04-24 定稿

系 (用 χ 表示), 然后再确定 $\{1, 2, \dots, N!\}$ 到 $\{1, 2, \dots, N\}$ 的映射 (用 ψ 表示). χ 可以取为许多种具体形式, 文献 [1] 采用如下一种:

$$i = \chi(\underline{q}) = \sum_{j=1}^{N-1} (\theta_j(N-j)!) + 1, \quad (4)$$

其中 $\theta_j = q_j - \sum_{k=1}^j U(q_j - q_k)$, $U(\cdot)$ 为阶跃函数.

有了关于 χ 的封闭表示, 置换滤波器就由定义域为 $\{1, 2, \dots, N!\}$, 值域为 $\{1, 2, \dots, N\}$ 的函数关系 $\psi(\cdot)$ 完全确定. 文献 [1] 中, 当自变量 i 取属于 $\{1, 2, \dots, N!\}$ 的不同的值时, 函数 $\psi(i)$ 的取值完全独立地被考虑. 这时 $\psi(\cdot)$ 只能用它的所有函数值 (总共有 $N!$ 个, 即 $\{\psi(1), \psi(2), \dots, \psi(N!)\}$) 来描述. 因此, 描述滤波窗口大小为 N 的置换滤波器需要一个包含 $N!$ 个项的查找表. 这意味着当滤波窗口较大时 (例如当 $N > 9$ 时) PF 滤波器的优化和存储会变得非常困难甚至不现实. 因此合理地减小特征空间的体积是 PF 滤波器实用的关键.

3 自偶置换滤波器

为了简化置换滤波器的复杂度, 可以使其满足一些限制条件, 这里我们限制其满足下面定义的自偶特性. 之所以给置换滤波器施加这一限制, 主要考虑到实际应用中许多非常成功的秩排序滤波器 [3], 都满足这个特性, 如标准中值滤波器, 多级中值滤波器以及加权中值滤波器 [3] 等.

定义 1 对于任意空间序观察向量 $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ 及其相对于任意实常数 C 的补向量,

$$\hat{\underline{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N) = C - \underline{x} = (C - x_1, C - x_2, \dots, C - x_N), \quad (5)$$

如果

$$F_{\text{PF}}(\underline{x}) = C - F_{\text{PF}}(\hat{\underline{x}}), \quad (6)$$

那么, 我们称置换滤波器 $F_{\text{PF}}(\cdot)$ 满足自偶特性, 并称之为自偶置换滤波器.

定理 1 置换滤波器 $F_{\text{PF}}(\underline{x}) = x_{p_i(q)} = x_{\psi(\chi(q))}$ 满足自偶特性的充要条件是

$$\psi(i) = N + 1 - \psi(N! + 1 - i), \quad i = 1, 2, \dots, N!, \quad (7)$$

其中 q 为 \underline{x} 的特征向量.

证明

(1) 充分性 对于定义 1 中任意的观察向量 $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ 及其相对于常数 C 的补向量 $\hat{\underline{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N)$, 如果 \underline{x} 的特征向量记为 $\underline{q} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$, 那么很显然, $\hat{\underline{x}}$ 的特征向量为

$$\hat{\underline{q}} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_N) = (N + 1 - p_1, N + 1 - p_2, \dots, N + 1 - p_N). \quad (8)$$

由 (4) 式可得

$$i = \chi(\underline{q}) = 1 + \sum_{j=1}^{N-1} \theta_j(N-j)!, \quad (9)$$

其中

$$\theta_j = p_j - \sum_{k=1}^j U(p_j - p_k); \quad (10)$$

$$\hat{i} = \chi(\hat{q}) = 1 + \sum_{j=1}^{N-1} \hat{\theta}_j (N-j)!, \quad (11)$$

其中

$$\hat{\theta}_j = \hat{p}_j - \sum_{k=1}^j U(\hat{p}_j - \hat{p}_k) = N+1 - p_j - \sum_{k=1}^j U(p_k - p_j). \quad (12)$$

注意到 $p_j \neq p_k \Leftrightarrow j \neq k$, 所以有 $\sum_{k=1}^j U(p_k - p_j) + \sum_{k=1}^j U(p_j - p_k) = j+1$, 所以

$$\hat{\theta}_j = N-j - (p_j - \sum_{k=1}^j U(p_j - p_k)) = N-j - \theta_j. \quad (13)$$

(13)(9)(10) 式代入 (11)(12) 式得

$$\hat{i} = \chi(\hat{q}) = N! - \chi(q) = N! + 1 - i, \quad (14)$$

所以

$$F_{\text{PF}}(\hat{\underline{x}}) = \hat{x}_{p_{\psi(\hat{i})}} = \hat{x}_{p_{\psi(N!+1-i)}}. \quad (15)$$

(7) 式代入 (15) 式得 $F_{\text{PF}}(\hat{\underline{x}}) = \hat{x}_{p_{N+1-\psi(i)}} = C - x_{p_{\psi(i)}} = C - F_{\text{PF}}(\underline{x})$, 也就是 (6) 式, 所以得到 $F_{\text{PF}}(\underline{x}) = x_{p_{\lambda(q)}} = x_{p_{\psi(\lambda(q))}}$ 满足自偶特性.

(2) 必要性 对于任意的 $i \in \{1, 2, \dots, N!\}$, 由于 $\chi(\cdot)$ 是 Ω_N 向 $\{1, 2, \dots, N!\}$ 的一一映射, 所以可以找到一个 $\underline{q} \in \Omega_N$, 使得 $i = \chi(\underline{q})$. 如果 $F_{\text{PF}}(\underline{x}) = x_{p_{\lambda(q)}} = x_{p_{\psi(\lambda(q))}}$ 满足自偶特性, 由定义 1 我们有

$$C - F_{\text{PF}}(\underline{x}) = F_{\text{PF}}(\hat{\underline{x}}), \quad (16)$$

而

$$C - F_{\text{PF}}(\underline{x}) = C - x_{p_{\psi(i)}} = \hat{x}_{p_{N+1-\psi(i)}}, \quad (17)$$

又由 (14) 式得

$$F_{\text{PF}}(\hat{\underline{x}}) = \hat{x}_{p_{\psi(\hat{i})}} = \hat{x}_{p_{\psi(N!+1-i)}}, \quad (18)$$

(17), (18) 式代入 (16) 式并比较两端, 马上得到 (9) 式. 因此, 定理 1 得证. 证毕

定理 1 说明, 自偶置换滤波器的前面 $N!/2$ 个参数 $\psi(1), \psi(2), \dots, \psi(N!/2)$ 可以完全确定另外的 $N!/2$ 个参数 $\psi(N!+1), \psi(N!+2), \dots, \psi(N!)$, 所以自偶置换滤波器的描述、设计和实现就可以仅涉及 $N!/2$ 个参数, 比一般的置换滤波器减少了一半.

4 对比实验和结论

学习信号采用“Lena”图象和其加噪的退化图象, 其分辨率和量化级为 $256 \times 256 \times 8$, 噪声为出现概率都为 3%、幅值分别为 255 和 0 的正负脉冲. 这里采用如图 1(a) 所示的大小为 5 的十字形滤波窗口, 图 1(a) 中的数字指示由观察数据构造空间序观察向量时采用的排序方式. 比如当滤波窗口内的数据如图 1(b) 时, 那么对应的空间序观察向量为 $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.

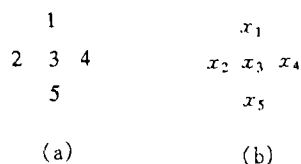


图 1 滤波窗口及其观察数据的空间排序方式

基于 MAE 准则 ($\gamma = 1$), 由文献 [1] 中的穷举算法得到全局最优的置换滤波器如图 2 所示, 其中横坐标为 $i = \chi(q)$, 纵坐标为 $\psi(i)$ 。我们看到该实例中得到的全局最优的 $\psi(i)$ 非常好地符合 (9) 式。为了更清楚地显示这一点, 图中我们同时用虚线画出了 $5 + 1 - \psi(5! + 1 - i)$ 的曲线, 可见 $\psi(i)$ 与 $5 + 1 - \psi(5! + 1 - i)$ 的曲线几乎完全重合, 也就是说本实例得到的全局最优的置换滤波器本质上比较好地满足自偶限制。这也说明了给置换滤波器加自偶限制的合理性。

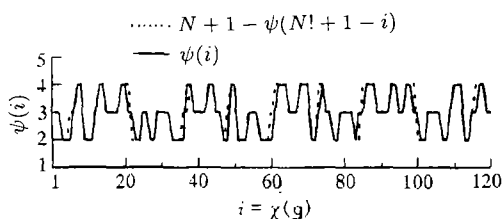


图 2 最优置换滤波器

利用同样的学习样本和优化准则, 同样由穷举算法得到的自偶置换滤波器的全局最优解如图 3 所示, 其中实线部分由优化计算得到, 虚线部分是实线部分根据 (9) 式的延拓。我们看到与图 2 的结果几乎完全相同。以上实验说明, 自偶置换滤波器比置换滤波器的参数减少一半, 但二者的性能却非常接近。

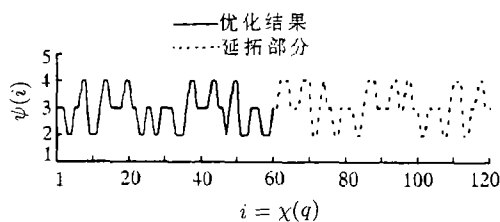


图 3 最优自偶置换滤波器

参 考 文 献

- [1] Barner K E, Arce G R. Permutation filters: A class of nonlinear filters based on set permutation. IEEE Trans. on SP, 1994, SP-42(4): 782-798.
- [2] Arce G A, Hall T A, Barner K E. Permutation weighted order statistic filter lattices. IEEE Trans. on IP, 1995, IP-4(8): 1070-1083.

- [3] Gabbouj M, Coyle E J, Gallagher Jr. N C. An overview of median and stack filtering. *Circuits System Signal Processing*, 1992, 11(1): 7-45.

PERMUTATION FILTERS AND SELF-DUAL PERMUTATION FILTERS

Song Huansheng Wu Chengke Liu Chunyang* Liang Dequn*

(*Xidian University, Xi'an 710071*)

(*Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049*)

Abstract A key problem of permutation filters is its too many parameters. In this paper, modified permutation filters called self-dual permutation filters are proposed. The new class filters need half of the permutation filters' parameters, but they give almost equal performances with permutation filters experimentally.

Key words Nonlinear filters, Statistic filtering, Order statistic

宋焕生: 男, 1964年生, 博士, 博士后, 主要研究方向为非线性图象处理.

吴成柯: 男, 1938年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为图象通信, 计算机视觉.

刘春阳: 男, 1962年生, 博士, 主要研究方向为图象压缩编码.

梁德群: 男, 1938年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为工业图象处理.