

电场积分方程矩量法中具有局部连续性的 基函数积分奇异性降阶处理¹

华夷和 徐金平*

(南京航空航天大学信息科学与技术学院 南京 210016)

*(东南大学毫米波国家重点实验室 南京 210096)

摘 要 三维散射与辐射问题常基于电场积分方程 (EFIE), 运用矩量法求解。该文证明了只要所选择的屋顶基函数 (rooftop basis functions) 具有局部连续性, 无论对于平面或者曲面单元, 都能将求解阻抗矩阵元素的积分函数写成一种对称形式, 使得其奇异性降为 $O(1/R)$, 从而避免了现有文献中因处理源点和观察点重合时出现的 $O(1/R^2)$ 奇异性所导致的积分复杂性。数值计算结果表明了简化后计算公式的有效性和可靠性。

关键词 屋顶基函数, 局部连续性, 矩量法, 电场积分方程

中图分类号 O441

1 引言

矩量法是一种求解三维散射和辐射问题的经典方法, 自 60 年代 J.H.Richmond^[1] 成功使用以来, 已经经历了从线栅网格 (wire grid) 到面元 (surface patch) 的转变。近 20 年来, 人们对面元的形状和电流基函数的形式进行了广泛研究。1982 年, S.M.Rao 等^[2] 使用三角形面元和一种三角屋顶基函数 (triangle rooftop basis functions) 来模拟任意形状的金属物体在外界电磁波激励下的电磁散射特性取得了很好的效果。同年 E.H.Newman^[3] 等用平面四边形单元和正弦屋顶基函数也获得相仿的结果, 并且在模拟平面散射体时, 在相同的精度要求下, 它所需要的未知元素的个数更少。但是如果要对具有曲面的三维物体进行比较精确的模拟, 采用平面单元势必要将网格划分得很细, 因而未知元素的个数也会相应增多。1991 年, D.L.Wilkes 等^[4] 将平面三角单元拓展到了曲面上; 1994 年, L.Valle 等人使用 Nurbs 曲面与参数曲面相结合, 使得现代 CAD 技术融入电磁领域。90 年代中后期, J.M.Song^[5] 与 Kolundzija 等学者^[6] 分别提出了两种类似的定义在参数表面上的线性屋顶基函数, 由于这两种基函数同三角屋顶基函数一样^[2] 具有局部连续性, 又能应用在曲面的四边形单元上, 因而能够用更少的基函数对曲面物体进行更精确的模拟。其后, 国内学者姚海英、聂在平等^[7,8] 针对在 J.M.Song 方法中出现的 $O(1/R^2)$ 奇异性使用积分区域分割法^[8] 解决了阻抗矩阵中自耦元素的求解。近十年来, 求解矩量方程广泛采用快速多极子方法 (FMM)^[9] 和多层快速多极子算法 (MLFMA)^[10], 但在使用这些技术时, 阻抗矩阵中代表临近电流元相互作用的元素 (包括自阻抗元素) 仍然需要用直接方法求得, 即不能回避上述奇异性问题。本文深入分析了电场积分方程在使用矩量法求解时的表达形式, 指出当所选择的基函数具有局部连续性时, 就能去掉这种 $O(1/R^2)$ 的奇异性, 从而将大大简化数值积分的复杂度并提高其精度。

2 具有局部连续性的基函数与矩量法公式的化简

在电磁散射和辐射问题中, 由于电场积分方程 (EFIE) 可同时适用于开放或闭合物体表面而广为使用。完全导电金属物体表面的 EFIE 可表示为

$$\hat{n} \times \mathbf{E}^i = \hat{n} \times \left[jk\eta \int_S \mathbf{J}(r') G(r, r') dS' + j \frac{\eta}{k} \int_S \nabla' \cdot \mathbf{J}(r') \nabla G(r, r') dS' \right] \quad (1)$$

¹ 2002-05-13 收到, 2002-10-24 改回

国防科技重点实验室基金 (No.51447030101HK0201) 资助

式中 \mathbf{E}^i 为入射场, S 为物体表面, $\hat{\mathbf{n}}$ 为 S 的单位外法线, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}/(4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$ 是三维空间的格林函数, k 为波数, η 为真空中波阻抗.

将电流用分域基函数 \mathbf{J}_n 展开, 令 I_n 为展开系数, 即 $\mathbf{J} = \sum_n I_n \mathbf{J}_n (n = 1, \dots, N)$, 若使用 Galerkin 方法求解, 则检验函数和基函数形式相同, 最后可得到线性系统 $[Z_{mn}^E][I_n] = [V_m] (n, m = 1, \dots, N)$, 其中 $V_m = \frac{4\pi j}{k\eta} \int_{\Delta S} \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{E}^i dS$, 而

$$Z_{mn}^E = \int_{\Delta S} \int_{\Delta S'} \mathbf{J}_m(\mathbf{r}) \cdot \left[\mathbf{J}_n(\mathbf{r}') + \frac{1}{k^2} \nabla' \cdot \mathbf{J}_n \nabla \right] G dS' dS \quad (2)$$

式中 $\nabla G = -(jk + 1/R)G\hat{\mathbf{R}}$, $\hat{\mathbf{R}} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$.

仔细考察 (2) 式, 对于其中的 $O(1/R)$ 积分奇异性, 文献 [5, 7] 采用奇异转移和解析积分技术完成计算. 对于 $O(1/R^2)$ 积分奇异性部分, 文献 [7, 8] 先证明其在奇点附近积分贡献为 0, 然后运用区域分割的概念使用数值积分积出其余部分的值, 由于被积函数在奇点附近变化剧烈, 分割后每部分的积分仍然需要较多积分点, 计算复杂. 下面我们证明当所选择的基函数具有局部连续性时, 可以将 (2) 式写成不含 $O(1/R^2)$ 奇异性的形式, 从而避免了文献 [7, 8] 中不得不付出的代价.

图 1 示出了建立电流基函数常用的 3 种不同网格单元, 屋顶基函数定义在由 2 个相邻的面元组成的一个面元对 (doublet) 上 [2,5,6], 在自由边 AB 和 EF 上, 其值为 0, 在侧边 BD, CA 与 EC, DF 上, 只有切向分量. 若函数具有局部连续性, 则在公共边 CD 上, 还满足每一点的法向分量连续, 即 $J_{\perp}^+ = J_{\perp}^-$.

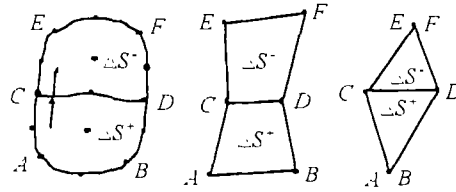


图 1 三种不同的网格单元

观察 (2) 式右端第二项, $\Delta S = \Delta S^+ + \Delta S^-$, 运用矢量恒等式 $\nabla \cdot (\psi \mathbf{A}) = \psi \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \psi \cdot \mathbf{A}$ 和高斯面散度定理 [11], 可知,

$$\int_{\Delta S} \nabla_S \cdot (G \mathbf{J}_m) dS = \oint_{l^+} (G \mathbf{J}_m^+) \cdot \hat{\mathbf{t}}^+ dl + \oint_{l^-} (G \mathbf{J}_m^-) \cdot \hat{\mathbf{t}}^- dl - \int_{\Delta S} G \nabla_S \cdot \mathbf{J}_m dS \quad (3)$$

式中 $\hat{\mathbf{l}} = \hat{\mathbf{l}}^{\pm}$, $\hat{\mathbf{t}}^{\pm} = \hat{\mathbf{l}}^{\pm} \times \hat{\mathbf{n}}^{\pm}$, $l^+ = BD + DC + CA + AB$, $l^- = EC + CD + DF + FE$, 因为在 l^{\pm} 上, $\mathbf{J}_m^{\pm} \cdot \hat{\mathbf{t}}^{\pm}$ 即表示 \mathbf{J}_m^{\pm} 在其上的垂直分量, 由前面对屋顶基函数的定义可知 $\mathbf{J}_m \cdot \hat{\mathbf{t}}$ 在 BD, CA, AB 及 EC, DF, FE 上为 0, 若屋顶基函数具有局部连续性, 在公共边 DC 上有 $\mathbf{J}_m^+ \cdot \hat{\mathbf{t}}^+ = -\mathbf{J}_m^- \cdot \hat{\mathbf{t}}^-$, 这样, (3) 式右端前 2 项值都为 0. 代回 (2) 式便得:

$$Z_{mn}^E = \int_{\Delta S} \int_{\Delta S'} [\mathbf{J}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}_n(\mathbf{r}') - \frac{1}{k^2} \nabla_S \cdot \mathbf{J}_m \nabla'_S \cdot \mathbf{J}_n] G dS' dS \quad (4)$$

至此, 我们完成了对 (2) 式的改造, 消除了原积分中的 $O(1/R^2)$ 奇异性. 上式对 \mathbf{J}_m 和 \mathbf{J}_n 是对称的. 从物理概念上来看, 当权函数和基函数形式相同时, Z_{mn}^E 代表电流基之间的互耦, 因而这种对称表达式更能反映物理本质.

3 数值计算结果与分析

将定义在参数曲面上的电流基函数具体表出^[5], 为了便于分析, 以 $\partial r/\partial u_1$ 方向为例, 若令 $0 \leq u_1, u_2 \leq 1$, 则有

$$\mathbf{J}_{u_{1m}} = \sqrt{\frac{g_{22}(u_{1m}, u_{2m})}{g(u_1, u_2)}} T_{u_{1m}}(u_1) P_{u_{2m}}(u_2) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} = \sqrt{\frac{g_{22}(1, 1)}{g(u_1, u_2)}} u_1 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} = \frac{\sqrt{g_{22}(1, 1)}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \right|} u_1 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \quad (5)$$

式中 $T_{u_{1m}}(u_1)$ 为 u_1 方向上是线性函数, $P_{u_{2m}}(u_2)$ 为 u_2 方向上的脉冲函数. g_{22} 为曲面的第一类基本量, $g = \det(g_{ij})$ ^[5,7].

(5) 式与文献[6]中提出的基函数 $\mathbf{J}_s(u, v) = \frac{1}{|a_u \times a_v|} \rho$ 实际仅相差一个常数系数 $\sqrt{g_{22}(1, 1)}$. 后者定义在一次参数曲面上, 可以由二次参数曲面退化得到. 再考察三角屋顶基函数^[2]:

$$\mathbf{J}_n = \frac{l_n}{2A_n} \rho_n = \frac{\sqrt{g_{22}(1, 1)}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \right| / u_1} u_1 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}$$

可以看到上式与前述两种基函数非常相像, 除了常数系数外仅相差一个 u_1 , 原因是在四边形单元中 $\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \right|$ 近似常数, 而在三角形单元中, 三角形的面积 $2A_n = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \right| / u_1$ 是常数, 在两种不同形状的单元上做不同的定义才能保证电流基函数的线性性质 (从而进一步保证电荷 $\sigma = (j/\omega) \nabla \cdot \mathbf{J}$ 均匀分布特性). 参考相应的文献或继续作简单的推导, 可知这三种基函数都具有局部连续性, 因而阻抗矩阵元素都能使用 (4) 式求解.

本文计算了 $ka = 0.5$ 的金属球的 E 面双站 RCS, 结果示于图 2 中. 在二次参数曲面网格单元上使用本文提出的不含 $O(1/R^2)$ 的计算公式求互耦得到的 RCS (48 个未知元) 和 Mie 级数法^[12] 的结果进行对比, 可以看出, 本文计算结果是可靠的. 图 3 是针对图 2 中的问题考察各种不同形式的网格单元和相应的基函数对计算结果的收敛情况, 可以发现使用二次参数曲面单元只需非常少的未知元就能得到很高的精度, 从而也证明了本文的互耦对称表达式的有效性.

为了进一步说明本文所述方法的正确和通用性, 我们使用二次参数曲面单元计算了文献[13]提供的 9.936 英寸 NASA 核模型的 E 面单站 RCS. 图 4 中给出了其在 1.19GHz 平面波照射下与文献[13]中的计算数据的对比, 两者吻合得很好. 可见对于复杂的曲面形体目标, 本文给出的简化表达式同样是十分可靠和有效的.

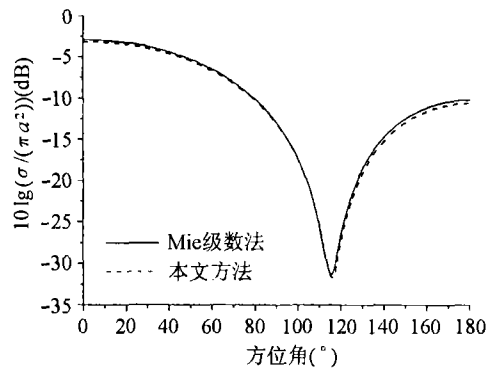


图 2 $ka = 0.5$ 的金属球 E 面双站 RCS

4 结束语

本文对电场积分方程矩量法进行了深入的研究, 根据高斯面散度定理, 证明了使用具有局部连续性的电流基函数可以将求阻抗矩阵元素的积分表达式化简成不含 $O(1/R^2)$ 奇异性的对称形式。文章对现有文献中出现的三种具有局部连续性的电流基函数作了分析比较, 给出采用新的表达式的计算结果, 数据表明算法是可靠的。以本文的处理方法不但能改善传统矩量法阻抗矩阵中计算自阻抗元素的精确度, 而且可以进一步应用于 FMM, MLFMA 等快速计算技术中。

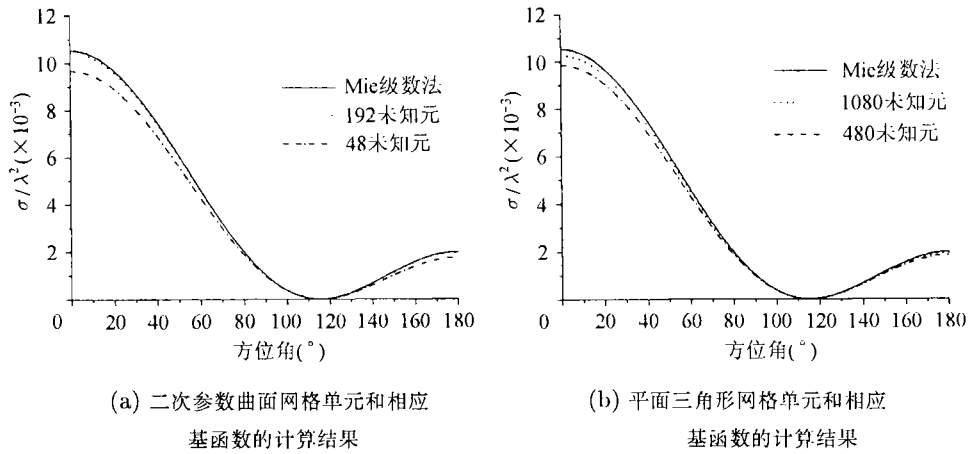
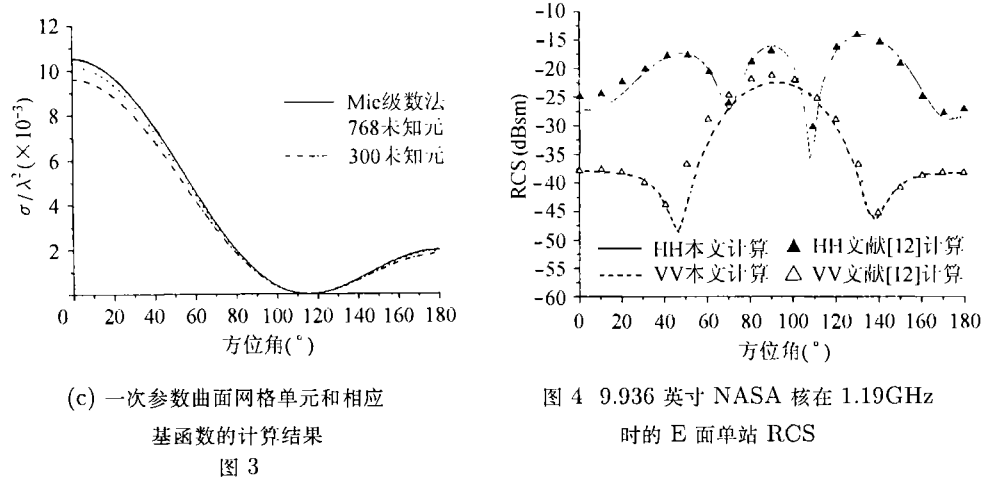


图 3



参 考 文 献

- [1] J. H. Richmond, A wire-grid model for scattering by conducting bodies, IEEE Trans. Ant. & Prop., 1966, AP-14(6), 782-786.
- [2] S. M. Rao, D. R. Wilton, A. W. Glisson, Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape, IEEE Trans. on Ant. & Prop., 1982, AP-30(3), 409-418.
- [3] E. H. Newman, P. Tulyatha, A surface patch model for polygonal plates, IEEE Trans. on Ant. & Prop., 1982, AP-30(4), 588-593.

- [4] D. L. Wilkes, C. C. Cha, Method of moments solution with parametric curved triangular patches, 1991 International IEEE APS Symposium Digest, London, Ontario, Canada, 1991, 1512-1515.
- [5] J. M. Song, W. C. Chew, Moment method solutions using parametric geometry, Journal of Electromagnetic Waves and Appl., 1995, 9(1/2), 71-83.
- [6] B. M. Kolundzija, On the locally continuous formulation of surface doublets, IEEE Trans. Ant. & Prop., 1998, AP-46(12), 1879-1883.
- [7] 王浩刚, 聂在平, 三维矢量积分方程中奇异性的分析, 电子学报, 1999, 27(12), 68-71.
- [8] 姚海英, 聂在平, 三维矢量散射分析中奇异积分的准确计算方法, 电子科学学刊, 2000, 22(3), 471-477.
- [9] R. Coifman, V. Rokhlin, S. Greengard, The fast multipole method for the wave equation: A pedestrian prescription, IEEE Ant. & Prop. Magazine, 1993, 35(3), 7-12.
- [10] C. C. Lu, W. C. Chew, A multilevel algorithm for solving boundary-value scattering, Microwave & Opt. Tech. Lett., 1994, 7(10), 466-470.
- [11] 戴振铎, 鲁述, 电磁理论中的并矢格林函数, 武汉, 武汉大学出版社, 1995, 324.
- [12] A. Balanis, Advanced Engineering Electromagnetics, New York, Wiley & Sons, 1989, Chapter 11.
- [13] J. L. Volakis, Benchmark radar targets for the validation of computational electromagnetics programs, IEEE Ant. & Prop. Magazine, 1993, 35(1), 84-89.

INTEGRAL SINGULARITY REDUCTION BY THE LOCALLY CONTINUOUS BASIS FUNCTIONS USED IN MOMENT METHOD WITH ELECTRIC FIELD INTEGRAL EQUATION

Hua Yihe Xu Jinping*

(College of Information Science and Technology, NUAA, Nanjing 210016, China)

*(State Key Laboratory of Millimeter Waves, Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract A new symmetrical formulation without $O(1/R^2)$ singularity is presented to calculate the impedance matrix elements as long as the rooftop basis functions have the character of local continuity. With this new formulation, one needs only take care about the $O(1/R)$ singularity that is very easy to resolve. Several different types of rooftop basis functions are analyzed and compared, on which our formulation is applied. Numerical results are presented which have proved the validity, the efficiency and the universality of the new formulation.

Key words Rooftop basis functions, Local continuity, Method of moments, Electronic Field Integral Equation (EFIE)

华夷和: 男, 1975年生, 博士生, 研究方向包括电磁兼容, 电磁散射与辐射, 数值模拟等.

徐金平: 男, 1962年生, 教授, 博士生导师, 研究方向包括天线与电磁兼容, 计算电磁学, 电磁散射, 毫米波理论与技术.