竞争-冲突淘汰存取方式的数学模型 [1]

逯昭义　　陈永义 *　　张建树 **

(青岛大学计算机系，青岛 266071)
*(烟台大学数学系，烟台 264005)
**(西北大学物理系，西安 710069)

摘　要　本文对竞争-冲突淘汰存取方式多星 LAN 进行了深化研究，在逯昭义的工作 (1995) 的基础上完善了数学模型，且给出了数值计算结果。

关键词　多星 LAN, 竞争-冲突淘汰式，存取方式，数学模型

中图号　TN913.2

1 引　言

目前人们对竞争-冲突淘汰存取方式的建模问题正在进行探讨 [1,2]，其中在文献 [1] 中，将竞争-冲突淘汰方式分为六大类，且对 I 类中“顾客服务一次必服务成功”的情况进行了建模研究。文献 [2] 也研究了 I 类模型，但考虑了“顾客服务存在服务失败”的条件，即顾客并非仅经 1 次服务就获得成功。本文深化了文献 [1, 2] 的研究，就竞争-冲突淘汰的数学模型提出了一种算法。

顺便指出，竞争-冲突淘汰存取方式 II $\to$ VI 类模型的建模研究正在进展中，将另文报告。

2 多星 LAN 存取方式的特征

由于随机多路存取方式在计算机网络、通信技术中的广泛应用，近年来随机多路存取理论得到很大发展。自 1970 年 ALOHA 算法 [3] 被提出后，很多冲突解除算法和相应的分析结果相继发表 [4]。同时，冲突淘汰式存取方式星形 LAN 的运行机理也有了报道 [5,6]，从而为冲突淘汰式存取方式排队模型和数学模型的建立提供了前提条件。

该 LAN 由 N 个终端和 1 个中心结点构成，每个终端的容量为 1。当终端新产生顾客时，如果中心结点空闲，立即提出服务请求，即要求通过中心结点 (接受服务)。中心结点 1 次只能随机地从多个请求顾客中选择其中 1 个顾客服务，而其余未被选择的顾客，即被淘汰的顾客立即返回原终端，等待下 1 次重新提出服务请求。这种情况的请求称为“有希望”的请求。如果请求服务的顾客出现在中心结点不空闲、即服务员忙碌时，则请求服务的顾客无 1 被选择，就出现“无希望”的请求，所有请求顾客都要返回原终端，等待下 1 次重新提出服务请求。这种“无希望”的请求进行若干次后，在服务员正巧空闲时才会进入“有希望”的请求。为了防止“无希望”请求出现而干扰中心结点，本存取方式规定，终端产生的顾客必需等待中心结点空闲时，才能提出服务请求。这种情况相当于空闲终端必须在服务员进入空闲时新产生顾客，且立即提出服务请求。该种存取方式是竞争-冲突淘汰式的一种方式。

[1] 1994-03-03 收到，1996-04-29 定稿
甘肃省自然科学基金资助项目

本模型与经典的 $M/D/1/n$ 模型不同，经典排队模型的时间一般是连续的，本文中将要以时间离散化处理；本模型为多队列、且对每个队列加了容列为 1 的限制（通常，在 LAN 中每个用户终端产生的 1 个信息单元不被服务，不产生下 1 个信息单元），故与文献 [7] 考察的定长服务、时间离散化的排队模型不同；本模型中无论竞争服务的顾客如何之多，必有 1 个顾客获得服务权而接受服务，因此它与冲突后退式的 CSMA/CD 的存取方式大为不同。

为了便于建立数学模型，特作如下假设和规定。(1) 将时间轴离散化。假定顾客服务时间为 1（1 个定常的时间段，该段由若干个固定的时隙构成。选择时隙的原则是在每个时隙中每个终端最多只产生 1 个顾客）。也假设淘汰顾客返回原终端的等待时间为 1 。并假定顾客请求服务和返回终端的时间可以忽略。(2) 若某终端有顾客，则称为处于状态 1 ，否则称为处于状态 0 。(3) 若某时隙某终端有顾客，则此终端不再有顾客到达；若此时隙没有顾客，则此终端以概率 p 到达 1 个顾客。设 $q=1-p$ 。(4) 在某时刻状态为 1 的终端数也就是此时的冲突数。若冲突数为 0 ，则不出现服务；否则若冲突数为 $m(m\ge 1)$ ，则服务员以概率 $1/m$ 随机地选择其中 1 个顾客服务。(5) 下面的讨论都是对于某一指定终端（现称为观察终端）来说的，记此终端为 A. 由于讨论对称多队列模型，下面的讨论对于任一终端都成立。(6) 令 L_m 为 A 的状态为 1 ，冲突数为 $m(m\ge 1)$ 的条件下， A 终端的顾客还要滞留的时间（包括等待时间和服务时间）。L_m 的数学期望为 $E[L_m]$ 。令 T_{ij} 为第 i 次 A 为状态 0 而冲突数为 j 的条件下， A 到第 1 次被服务的时间（从第 $i+1$ 次开始，且含服务时间），数学期望为 $E[T_{ij}]$ 。(7) 设 X_i 为第 i 次请求服务时的冲突数， K_i 为该时有顾客的终端数。

3 几个数学特征

3.1 $\{X_i\}$ 为齐次马尔科夫链

事实上该系统必存在条件概率

$$\begin{aligned}&P(X_{i+1}=K_{i+1}\backslash X_i=K_i,X_{i-1}=K_{i-1},\cdots,X_1=K_1)\\&\quad=P(X_{i+1}-X_i=K_{i+1}-K_1\backslash X_i=K_i,X_{i-1}=K_{i-1},\cdots,X_1=K_1).\end{aligned}\tag{1}$$

因为 $X_{i+1}-X_i$ 为第 $i+1$ 次比第 i 次增加的冲突数，而各终端的顾客产生是独立的，所以增加的冲突只与 $N-K_i$ 有关，即与第 i 次冲突有关，而与第 i 次前的冲突无关，故由 (1) 式得

$$\begin{aligned}&P(X_{i+1}-X_i=K_{i+1}-K_i\backslash X_i=K_i,X_{i-1}=K_{i-1},\cdots,X_1=K_1)\\&\quad=P(X_{i+1}-X_i=K_{i+1}-K_i\backslash X_i=K_i)=P(X_{i+1}=K_{i+1}\backslash X_i=K_i).\end{aligned}\tag{2}$$

又因为第 $i+1$ 次比第 i 次冲突数增加 $K_{i+1}-K_i$ 的概率为

$$P(X_{i+1}-X_i=K_{i+1}-K_i\backslash X_i=K_i)=\begin{cases}C_{N-K_{i+1}}^{K_{i+1}-K_i+1}p^{K_{i+1}-K_i+1}q^{N-K_{i+1}}, & K_i-1<K_{i+1}\le N,\\ & K_i\ge 1;\\ 0, & K_{i+1}<K_i-1;\\ C_N^{K_{i+1}}p^{K_{i+1}}q^{N-K_{i+1}}, & K_i=0.\end{cases}\tag{3}$$

所以 $\{X_i\}$ 为齐次马尔科夫链，且转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} C_N^0q^N & C_N^1p^1q^{N-1} & C_N^2p^2q^{N-2} & \cdots & p^N \\ C_N^0q^N & C_N^1p^1q^{N-1} & C_N^2p^2q^{N-2} & \cdots & p^N \\ 0 & C_{N-1}^0p^0q^{N-1} & C_{N-1}^1p^1q^{N-2} & \cdots & p^{N-1} \\ 0 & 0 & C_{N-2}^0p^0q^{N-2} & \cdots & p^{N-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p \end{bmatrix}. \tag{4}$$

3.2 $\{X_i\}$ 的平稳分布存在

由转移概率矩阵知，任意的 $i(0\le i\le N-1)$ 是与 $i+1$ 互通；又因为 (4) 式对角线元素全为正，因此所有状态均非周期，所以 $\{X_i\}$ 为不可约有限非周期正常返马尔科夫链，故平稳分布唯一存在，且等于其极限分布。设其平稳分布为 P_0，则它满足如下方程：

$$P_0=P_0\boldsymbol{P}, \tag{5}$$

其中 $P_0=(P_0^0,P_0^1,\cdots,P_0^N)$，且 $P_0^0+P_0^1+\cdots+P_0^N=1$， $P_0^i\ge 0$， $i=0,1,\cdots,N$， P_0 亦称平稳分布向量。

4　数学模型的建立

4.1 $E[L_m]$ 的表达式

由全概率公式和齐次性可知：

$E[L_m]=E(L_m\backslash A$ 被服务$)P(A$ 被服务$)+E(L_m\backslash A$ 未被服务$)P(A$ 未被服务$)$

$\quad=1\cdot\frac{1}{m}+[1+\sum_{k=0}^{N-m+1}E[L_{m-1+k}]P($又有 K 个顾客到达$)]\cdot(1-1/m),\ m=2;$

$E[L_1]=1,\qquad m=1.$ 如果用 l_m 表示 $E[L_m]$，则得

$$\left.\begin{aligned} &l_1=1,\\ &l_m=\frac{1}{m}+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1+\sum_{k=0}^{N-m+1}l_{m-1+k}P_{m,m-1+k}\right),\quad m>1,\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

其中 $P_{m,m-1+k}$ 为转移矩阵。

4.2 $E[T_{ij}]$ 的数学模型

由齐次性可得 $E[T_{ij}]=E[T_{1j}]$，对于任意的 i， $j\ge 0$ 成立。故只考察 $E[T_{1j}]$。由全概率

公式和齐次性可得

$$E[T_{10}]=E[T_{10}\backslash\text{第 2 次冲突数为 }0)P(\text{第 2 次冲突数为 }0)$$
$$+E(T_{10}\backslash\text{第 2 次 }A\text{ 状态为 }1)P(\text{第 2 次 }A\text{ 状态为 }1)$$
$$+E(T_{10}\backslash\text{第 2 次 }A\text{ 状态为 0, 且冲突数不为 }0)P(\text{第 2 次 A 状态为 0, 且冲突数不为 }0)$$
$$=E[1+T_{20}]\cdot q^N+\left(\sum_{m=1}^{N}l_mC_{N-1}^{m-1}p^{m-1}q^{N-m}\right)\cdot p+\sum_{m=1}^{N-1}C_{N-1}^{m}p^mq^{N-m-1}\cdot q\cdot E[1+T_{2m}]$$
$$=E[1+T_{10}]\cdot q^N+\left(\sum_{m=1}^{N}l_mC_{N-1}^{m-1}p^{m}q^{N-m}\right)\cdot p+\sum_{m=1}^{N-1}C_{N-1}^{m}p^mq^{N-m}\cdot E[1+T_{1m}]. \tag{7}$$

显然 (7) 式由三种情况构成，即

(1) 第 2 次冲突数为 0，所有终端为 0；

(2) 第 2 次冲突为 1，观察队列为 1；

(3) 第 2 次冲突数 ≥ 1，观察队列为 0。

当 $j>1$ 时，由分析可得

$$T_{1j}=\begin{cases}L_{j-1+K},\text{第 2 次 }A\text{ 状态为 1, 且冲突数增加 }K-1,K>0;\\1+T_{1,j-1+K},\text{第 2 次 }A\text{ 状态为 0，且冲突数增加}K-1,K>0;\end{cases}$$

$$E[T_{1j}]=\sum_{K=1}^{N-j+1}E[L_{j-1+K}\backslash A\text{ 状态为 1, 又有 }K\text{ 终端到达})\cdot P(A\text{ 状态为 1, 又有 }K\text{ 终端到达})$$
$$+\sum_{K=0}^{N-j}E(1+T_{1,j-1+K}\backslash A\text{ 状态为 0, 又有 }K\text{ 终端到达})\cdot P(A\text{ 状态为 0, 又有 }K\text{ 终端到达}) \tag{8}$$

令 $t_j=E[T_{1j}]$, $j\geq 0$, 由 (6),(7),(8) 式得

$$\left.\begin{aligned}t_0&=(1+t_0)\cdot q^N+p\cdot\left(\sum_{m=1}^{N}l_mC_{N-1}^{m-1}p^{m-1}q^{N-m}\right)+\sum_{m=1}^{N-1}C_{N-1}^{m}p^mq^{N-m-1}\cdot q(1+t_m)\\&=q+p(l_2-1)+q\cdot\sum_{m=0}^{N-1}P_{2,m+1}t_m,\\t_j&=q+p(l_{j+1}-1)+q\cdot\sum_{m=0}^{N-j}P_{j+1,j+m}t_{j+m-1},\quad j\geq 1.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

由 (9) 式可见， $t_0=t_1$，这与实际情况是相吻合的。事实上，由于每次只服务 1 个顾客，当系统只有 1 个顾客，且请求服务时，肯定第 1 次就服务此顾客，以后就与刚开始时没有顾客的情况是一样的。于是可得以下方程组：

$$t_j=q+p(l_{j+1}-1)+q\sum_{m=0}^{N-j}P_{j+1,j+m}t_{j+m-1},\quad N-1\geq j\geq 1. \tag{10}$$

(10) 式正是 $E[T_{ij}]$ 的数学模型。由该式可解出 $t_0,t_1,\cdots,t_{N-1}$，即可得到某终端在上次没有请求服务，且上次的冲突数为 j 的条件下，该终端到第 1 次被服务还需要时间的期望。

5 数值分析

在 PC386 微机上对 (6) 式和 (9) 式进行数值计算。当固定终端数 N(取为 30)，且给定一组顾客到达概率 p 时，观察队列顾客滞留时间的均值 l_m, $1 \le m \le N$, 以及 t_m, $0 \le m \le N-1$ 随 m 的变化如图 1 所示。

由图可见，当 N 固定（取 $N = 30$），当 p 比较大时（比如 $p > 0.5$ 时），l_m 很快趋于饱和，且 l_m 几乎与 m 的变化无关，而 l_m 的饱和值随 p 的变大而增大。说明当 N 固定时，为了减小 l_m，首要的措施是适当减小 p。当 N 固定，p 下降到一定值时，l_m 随 m 增大而不断变大，且近似成线性增长，因此要减小 l_m，希望 m 变小。

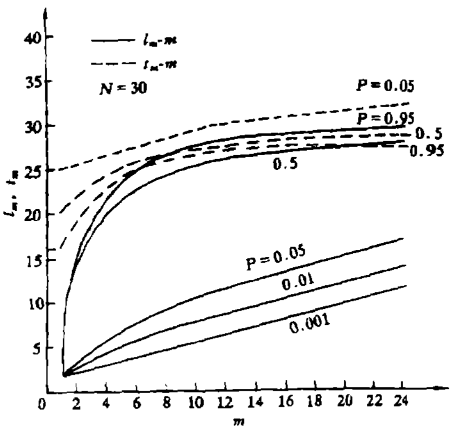

图 1 l_m, t_m-m 曲线

上述结论与对该星形 LAN 改进性能的直观结论是一致的，因而在一定程度上说明本文所建立的数学模型的可靠性。

感谢 刘晓明同志参加了本课题研究。

参 考 文 献

[1] 逯昭义. 竞争-冲突淘汰存取方式 I 类系统模型性能评价. 电子学报, 1995, 23(9): 115–117.

[2] 逯昭义, 等. 竞争-冲突淘汰式 I 类模型性能再评价, 兰州大学学报, 待刊.

[3] Abramson N. The ALOHA System-Another Alternative for Computer Communications, Proc.AFIPS Conf.Fall Joint Comp. Conf.1970, 37: 281–285.

[4] 陈永义, 龙传华. 一个具有四元反馈的 CTM 型堆栈协议. 应用数学和力学, 1988, 9(9): 825–834.

[5] Lu Zhaoyi, Tadao Saito. Star type local area network access control. Science in China, 1990, 33(9): 1123–1131.

[6] 逯昭义, 齐藤忠夫. 改进型多星 LAN. 电子学报, 1993, 21(11): 99–103.

[7] 何声武. 随机过程导论, 南京: 华东师大出版社, 1989.

THE MATHEMATICAL MODEL FOR ACCESS MODE OF CONTENTION-COLLISION CANCELLATION IN MULTI-STAR LAN

Lu Zhaoyi Chen Yongyi* Zhang Jianshu**

(Department of Computer, Qindao University, Qindao 266071)

(Department of Mathematics, Yantai University, Yantai 264005)

**(Department of Physics, Northwest University, Xi'an* 710069)

Abstract A kind of access model of the contention-collision cancellation in multi-star LAN has been discussed, the mathematical model is built, and the mathematical result is also given.

Key words Multi-star LAN, Contention-collision cancellation, Access model, Mathematical model

逯昭义： 男, 1942 年生, 教授, 现从事计算机通信网信息量理论、网络体系结构、排队论等的教学与研究工作. 95 年以前在兰州大学电子系任教.

陈永义： 男, 1941 年生, 教授, 现从事概率论、随机服务系统与应用等的教学和研究工作.

张建树： 男, 1941 年生, 副教授, 现从事理论物理、数值计算与计算机辅助分析等的教学与研究工作.