二维 Hilbert-Huang 变换的分解方法研究

盖 强[①] 殷福亮[②]
[①](大连舰艇学院装备系统与自动化系 大连 116018)
[②](大连理工大学电子与信息工程学院 大连 116024)

摘 要 该文根据 Hilbert-Huang 变换的原理，给出了二维内蕴模式函数分量的递推形式，实现了二维 Hilbert-Huang 变换的分解方法，并在图像分解应用中取得了满意的效果，从而拓展了 Hilbert-Huang 变换的应用范围。通过把原始图像自适应分解成有限数量的子图像，图像的细节能清晰地被分解出来，这在数字图像处理中有很重要的意义。

关键词 数字图像处理，二维 Hilbert-Huang 变换，局域波分析
中图分类号：TN911.73 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-5896(2006)04-0610-04

Study of Decomposition Method of 2-Dimension Hilbert-Huang Transform

Gai Qiang[①] Yin Fu-liang[②]
[①](*Dept. of Equipment System & Automation, Dalian Naval Academy, Dalian* 116018, *China*)
[②](*School of Electron. and Info. Eng., Dalian univ. of Tech., Dalian* 116024, *China*)

Abstract In this paper, the mathematic expressions of Intrinsic Mode Functions (IMFs) of the 2-dimension Local Wave Analysis (LWA) are put forward, and the 2-dimension decomposition method of HHT is developed. The clear image details have been extracted by using the method to adaptively decompose a digital image into a finite number of sub-images. That is very important for digital image processing.

Key words Digital image processing, 2-D Hilbert-Huang transform, Local wave analysis

1 引言

Hilbert-Huang 变换(HHT)[1,2]方法能自适应地提取非平稳数据的局部均值曲线，将复杂的叠加信号分解成有限数量的，且有物理意义的内蕴模式函数分量(Intrinsic Mode Functions, IMFs)，从而得到有意义的瞬时频率和希尔伯特时频谱。它是一种局域波分析方法[3]。其分解过程具有自调节自适应的特征，无需进行尺度参数选择。它与小波分析相比有更高的时频分辨率，与 Wigner-Ville 分布相比没有交叉项干扰。因此，Hilbert-Huang 变换方法在分析非平稳数据方面是取代基于傅里叶时频分析方法的一次突破。

由于 HHT 方法在解决局域波问题时有显著的效果，所以其理论和应用得到了各界学者的广泛关注和研究。文献[4,5]在提高其分解速度方面作了进一步的研究。文献[6,7]在抑制该方法的边界效应方面提出了更好的方法。文献[8]用局域波分析方法建立时变参数 ARMA 模型，既保持了原方法的特点，又扩大了应用范围。此外，局域波分析已成功地应用在地球科学[9－11]、设备状况监测[12,13]和生物医学[14,15]等应用领域。

但由于 HHT 是一种基于经验的局域波分析方法，其理论还正处在发展阶段。本文根据 HHT 的原理，推导出二维内蕴模式函数分量的递推表达式，实现了二维 Hilbert-Huang 变换的分解方法，并在数字图像分解及细节提取中得到了应用。

2 Hilbert-Huang 变换的基本原理

2.1 经验模式分解方法(EMD)

根据函数要得到有意义的瞬时频率的约束条件[16]，经验模式分解方法(Empirical Mode Decomposition，EMD)提出了内蕴模式函数分量的概念。它必须满足两个条件：其一是，信号极值点的数量与过零点的数量必须相等，或最多相差一个；其二是，在任一时间点上，信号极大值定义的上包络和极小值定义的下包络的局部均值为零。其筛选算法如下：

先找出信号中的所有局部极值点，然后用一个三次样条把所有的局部最大值连接成上包络，同理，局部最小值产生下包络，上下包络应将所有的数据都包含在它们之间。上下包络线的均值定义为 $m_1(t)$，而原始信号与 $m_1(t)$ 的差值被定义为分量 $h_1(t)$，即有如下等式：

$$h_1(t) = X(t) - m_1(t) \tag{1}$$

通常 $h_1(t)$ 还不满足内蕴模式函数分量的条件，因此必须把它当作新的被处理信号重复上述过程，即

$$h_{11}(t) = h_1(t) - m_{11}(t) \tag{2}$$

重复 k 次后，当 $m_{1k}(t)$ 趋于零，h_{1k} 就近似为一个内蕴模式函

2004-08-30 收到，2005-02-16 改回
国家自然科学基金(60472109)和辽宁省博士启动基金(20021051)资助课题

数分量，即

$$h_{1k}(t) = h_{1(k-1)} - m_{1k}(t) \tag{3}$$

表示为

$$c_1 = h_{1k}(t) \tag{4}$$

这里 c_1 就是第一个内蕴模式函数分量，它包含原始信号中最短的周期分量。

从原始信号中分离出 c_1，得到

$$r_1 = X(t) - c_1 \tag{5}$$

由于剩余部分 r_1 仍然可能包含较长周期分量的信息，所以 r_1 可被当作新的被处理数据按以上相同的过程来处理。该处理过程可对所有的接下来的剩余量 r_j 进行处理，得到如下结果

$$\left.\begin{array}{l} r_2 = r_1 - c_2 \\ \vdots \\ r_n = r_{n-1} - c_n \end{array}\right\} \tag{6}$$

这个处理过程在预先设定的条件准则满足后即可停止。将式(5)与式(6)相加，我们最终得到

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i + r_n \tag{7}$$

于是，原始数据被分解成 n 个内蕴模式函数分量，及一个剩余分量 r_n。从基函数理论的角度来看，EMD 对不同信号分解出的基函数 c_i 是不同的，它是依赖于信号本身的，因此是自适应的。它不同于傅里叶分解的基(一系列恒定幅度与频率的正余弦函数)，也不同于小波分解的基函数(是预先确定的)。因此，局域波分解不仅改进了信号分解的效率，而且使这种分解方法可以处理非平稳数据。

2.2 Hilbert 变换和 Hilbert 谱

对任意的时间序列 $X(t)$，我们可得到它的Hilbert变换

$$Y(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X(\tau)}{t-\tau}\mathrm{d}\tau \tag{8}$$

通过这一定义，$X(t)$ 与 $Y(t)$ 形成一个复共轭对，从而得到一个解析信号 $Z(t)$：

$$Z(t) = X(t) + iY(t) = a(t)e^{i\theta(t)} \tag{9}$$

其中

$$a(t) = [X(t)^2 + Y(t)^2]^{\frac{1}{2}},\ \theta(t) = \arctan\frac{Y(t)}{X(t)} \tag{10}$$

这样，Hilbert变换提供了一个独特的定义幅度与相位的函数。需要指出的是，式(8)定义Hilbert变换为 $X(t)$ 与 $1/t$ 的卷积，因此它强调了 $X(t)$ 的局部特性。在式(9)中，极坐标表达式进一步表明了它是一个用幅度和相位变化的三角函数来表示 $X(t)$ 的局部特性。即使有了Hilbert变换，在将瞬时频率定义为下式时仍有很大的争议：

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} \tag{11}$$

这导致了 Cohen(1995)引入了“单调分量函数”的说法[17]。由于式(11)是时间的单值函数，所以在使用瞬时频率这一概念时，对应的数据应受到一定的限制，即数据在任何时刻只有一个频率值的分量，被称为单一分量。EMD 分解法得到的内蕴模式函数分量 $C_j(t)$ 正好满足了单一分量的要求。对每一个内蕴模式函数分量 $C_j(t)$ 进行 Hilbert 变换，可得到：$C_j(t)$ 的解析表达式 $a_j(t)\exp\left[i\int\omega_j(t)\mathrm{d}t\right]$，最后有 $X(t)$ 的解析表达式

$$X(t) = \mathrm{PR}\sum_{j=1}^{n} a_j(t)\exp\left[i\int\omega_j(t)\mathrm{d}t\right] \tag{12}$$

从式(12)可以看出，每一个内蕴模式函数分量都可以是幅度或频率调制的，同样数据如果用 Fourier 展开将是

$$X(t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{i\omega_j t} \tag{13}$$

其中 a_j 与 ω_j 都是常量。式(12)与式(13)的对比是很清楚的，可变的幅度和瞬时频率不但很大地改进了信号分解或展开的效率，并且使这种分解方法可以处理非平稳数据。通过基于内蕴模式函数分量的信号展开，幅度与频率调制也被清楚地分开。这就已经打破了固定幅度与固定频率的 Fourier Transform (FT)的限制，从而得到了一个可变幅度和可变频率的信号描述方法。

式(12)可以把信号幅度在三维空间中表达成时间与瞬时频率的函数。经过这些处理后的时间-频率平面上的幅度分布被称为 Hilbert 时频谱 $H(\omega,t)$，简称为 Hilbert 谱。$H(\omega,t)$ 的数学表达式如下：

$$H(\omega,t) = \sum b_j a_j(t)\exp\left[i\int\omega_j(t)\mathrm{d}t\right],$$

$$当\ \omega_j(t) \neq 0\ 时，\ b_j = 1，\ 否则\ b_j = 0 \tag{14}$$

式(14)给出了有意义的 Hilbert 时频谱。

Hilbert-Huang 变换方法从根本上摆脱了 FT 理论的束缚，得到了瞬时频率有意义的 Hilbert 时频谱图。但这种基于经验的新方法还处在发展阶段，它的二维内蕴模式函数分量的递推表达式，二维 HHT 的实现方法和在数字图像处理方面应用还有待于研究。本文在这些方面做了一些理论探索工作。

3 Hilbert-Huang 变换的二维分解原理

3.1 二维内蕴模式函数分量的递推形式

EMD 方法提出的 IMF 分量满足的第 2 个条件：在任一时间点上，信号极大值定义的上包络和极小值定义的下包络的局部均值为零，从局域波分析的角度看，应该是在任一时间点上，信号的局部均值为零。上下包络局部均值为零只不过是求局域均值的一种算法，也可有其它求均值的算法。这样，求 IMF 分量就是剔除信号中随时间变化的具有不平稳特性的局部均值曲线。根据以上条件，下面给出局域波分析的二维筛选算法和 IMF 分量表达式：

假设二维信号为 $I(x,y)$，$mI(x,y)$ 表示对信号 $I(x,y)$ 求均值曲面，并且用 $m^k I(x,y)$ 表示第 k 次对信号 $I(x,y)$ 求均值

曲面，则原始信号与 $mI(x,y)$ 的差值就被定义为第一个 IMF 分量 c_1，即

$$c_1 = I(x,y) - mI(x,y) \tag{15}$$

得到第一个 IMF 分量后，用原信号与 c_1 的差，即第一次均值曲面 $mI(x,y)$，作为待处理信号再进行分解，就可得到第二个 IMF 分量，依次类推，可得出第 n 个 IMF 分量的分解表达式:

$$\left.\begin{aligned} c_2 &= I(x,y) - c_1 - m(I(x,y) - c_1) \\ &= mI(x,y) - m^2 I(x,y) \\ c_3 &= I(x,y) - c_1 - c_2 - m(I(x,y) - c_1 - c_2) \\ &= m^2 I(x,y) - m^3 I(x,y) \\ &\vdots \\ c_n &= m^{n-1} I(x,y) - m^n I(x,y) \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

将式(15)与式(16)相加，最终得到

$$I(x,y) = \sum_{i=1}^{n} c_i + m^n I(x,y) \tag{17}$$

这样，就可清楚地看出二维数据各 IMF 分量和剩余分量的表达式。

3.2 Hilbert-Huang 变换的二维分解方法

用局域波分析方法分解二维图像，能更好地提取出图像中的各种细节和轮廓，这是因为局域波分析能根据二维信号自身极值点间的空间尺度按频率高低自适应分解出信号的 IMF 分量。

在二维信号分解算法上，可沿用一维 HHT 的 EMD 算法的思路对二维图像数据进行处理。其方法如下：(1)分别求出二维信号的上下极值点包络曲面。先找出二维图像的局部极大值和极小值点，边界处极值点用边界的极大值和极小值代替，然后用三次样条插值分别求出极大值构成的极大值曲面和极小值构成的极小值曲面。(2)求均值曲面。均值曲面是极大值曲面和极小值曲面的平均值。该平均值曲面就是该二维图像随空间变化的均值图像或轮廓。(3)提取图像的细节。用原图像减去该均值图像，就可得到图像的细节。图像轮廓可进一步分解出新的不同细节的图像轮廓，依此类推可得到多个不同细节的图像轮廓。该方法在每次分解过程中都使用了两遍三次样条插值算法。

4 数字图像分解应用

下面根据二维 Hilbert-Huang 变换的分解原理和方法，讨论对两个典型数字图像进行分解处理的结果。图 1、图 2 中的(a)图分别是 Cman 和 Lena 的标准原始图像；(b)图、(c)图是它们用二维 Hilbert-Huang 变换分解处理后得到的两幅子图像。(b)图包含原始图像中的细节部分，而(c)图则包含了原始图像中的轮廓部分。为了显示，分解后子图像中的负值被线性变换到零。与两幅原始图像比较可以发现，原图像中灰度变化缓慢的部分在细节图像中都变成了一种中间灰度，而原图像中灰度陡变的边缘和灰度陡变边缘包围的较小细节区域在细节图像中都被清晰地提取出来了，这与现有的几种只提取图像边缘的方法在效果上有所不同。这种细节图像确实代表了原始图像中的所有细节信息，又只携带了很少的能量，这在图像增强和图像传输处理中有很大的意义。两图中的轮廓图像(c)图可根据一定原则继续分解出它们的细节和轮廓。

(a) Cman原始图像　(b) HHT分解出的Cman图像细节

(c) HHT分解出的Cman图像轮廓

图 1　cman 原图及 HHT 分解出的两个图像分量

(a) Lena 原始图像　(b) HHT分解出的Lena 图像细节

(c) HHT分解出的Lena 图像轮廓

图 2　Lena 原图及 HHT 分解出的两个图像分量

5 结束语

本文通过讨论一维 Hilbert-Huang 变换的原理，首次提出了二维局域波分析中各内蕴模式函数分量的递推表达式，实现了二维 Hilbert-Huang 变换的分解方法，并应用到了数字图像处理的分解及图像细节提取中。这不仅完善了局域波分析

的理论体系，而且开拓了其应用领域范围。

非平稳信号广泛存在于雷达、声纳、通信、振动工程、航海航天工程、地球物理、生物医学、天文等许多工程领域，而局域波分析尤其适用于非平稳信号的分析和处理。因此，进一步加强局域波分析的工程应用研究具有重要意义。

参 考 文 献

[1] Huang N E, Zheng Shen, Long S R, *et al.*. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear non-stationary time series analysis [J]. *Proc. R. Soc. London. Ser. A*, 1998, 454(1971): 903 – 995.

[2] Huang N E, Wu M L, Long S R, *et al.*. A confidence limit for the empirical mode decomposition and Hilbert spectral analysis [J]. *Proc. R. Soc. London. Ser. A*, 2003, 459(2037): 2317 – 2345.

[3] 盖 强. 局域波时频分析方法的理论研究与应用. [博士论文], 大连: 大连理工大学, 2001.

[4] 盖 强, 马孝江, 张海勇等. 几种局域波分解方法的比较研究 [J]. 系统工程与电子技术, 2002, 24(2): 57 – 59.

[5] Yu B, Ma X J. A new method for the analysis of non-stationary nonlinear vibration signal and its use in machine fault diagnosis [A]. Proceedings of International Conference on Vibration Engineering [C]. Dalian, China:PICVE, 1998: 668 – 671.

[6] 盖 强, 马孝江, 张海勇等. 一种处理局域波法中边界效应的新方法 [J]. 大连理工大学学报, 2002, 42(1): 115 – 117.

[7] 邓拥军, 王 伟, 钱成春等. EMD 方法及 Hilbert 变换中边界问题的处理 [J]. 科学通报, 2001, 46(3): 257 – 263.

[8] 张海勇, 马孝江, 盖强. 非平稳信号的一种 ARMA 模型分析方法 [J]. 电子科学学刊, 2002, 24(7): 992 – 996.

[9] Gloersen P, Huang N E. Comparison of interannual intrinsic modes in hemispheric sea ice covers and other geophysical parameters [J]. *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing*, 2003, 41(5): 1 – 14.

[10] Huang N E, Hsing H, Shen Zheng, *et al.*. The ages of large amplitude coastal seiches on the Caribbean coast of Puerto Rico [J]. *Journal of Physical Oceanography*, 2000, 30(8): 2001 – 2012.

[11] Huang N E, Shen Zheng, Steven R L. A new view of nonlinear water waves: The Hilbert spectrum[J]. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1999, 31(1): 417 – 457.

[12] 王 珍, 马孝江. 局域波时频法在柴油机缸套活塞磨损诊断中的应用研究 [J]. 内燃机学报, 2002, 20(2): 157 – 160.

[13] Chu Jan, Gai Qiang, Zhang Haiyong. The EMD method and its use in ship diagnosis [A]. Proceeding of the International Symposium on Test and Measurement [C], Shanghai, China: ISTM, 2003, 3: 2039 – 2042.

[14] Essex J W, Wiley A P. Application of the Hilbert-Huang transform to the analysis of molecular dynamics simulations [J]. *Journal of Physical Chemistry, Ser. A* 2003, 107(24): 4869 – 4876.

[15] Huang Wei, Shen Zheng, Huang N E, *et al.*. Engineering analysis of biological variables: An example of blood pressure over 1 day [A]. Proc. of Nat. Acad. Sci. [C]. USA: PNAS, April 1998, 95(9): 4816 – 4821 .

[16] Boashash B. Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal [J]. Part I, *Proc. IEEE,* 1992, 80(4): 520 – 538.

[17] Cohen L. Time-Frequency Analysis[M]. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1995, Chapter 13.

盖 强: 男，1962 年生，博士，副教授，主要从事非平稳信号处理、数字图像处理、现代测控与故障诊断和作战模拟训练等领域的研究.

殷福亮: 男，1962 年生，教授，博士生导师，主要从事数字信号处理、语音信号处理和阵列信号处理的理论与应用研究工作.