

# 长度为 $p^m$ 的离散哈脱莱变换 分离基算法\*

茅一民

(东南大学, 南京)

**摘要** Soo-Chang Pei, Ja-Ling Wu (1986)和茅一民(1987)提出了长度为 $2^m$ 的分离基2/4哈脱莱变换算法。本文将分离基算法推广到长度为 $p^m$ 的哈脱莱变换, 并证明基 $p^2$ 算法实乘次数比基 $p$ 算法少, 而基 $p/p^2$ 算法实乘次数比前两者都少。作为例子, 给出了长度为 $N = 3^m$ 的基3/9哈脱莱变换快速算法和流图。

**关键词** 正交变换; 离散哈脱莱变换; 分离基算法

## 一、引言

当 $N = p^m$ ,  $p$ 为小素数时, 从Cooley-Tukey映射方法<sup>[1]</sup>可以得到基 $r$  ( $r = p$ 或 $r = p^k$ ,  $k$ 为小于 $m$ 的正整数)的快速算法。例如长度为 $N = 2^m$ 时, 有基2、基4、基8等哈脱莱变换快速算法。

1986年以后提出了长度为 $N = 2^m$ 的分离基离散哈脱莱变换(简称DHT)算法<sup>[2,3]</sup>, 这种算法不能直接从Cooley-Tukey映射获得。长度为 $N = 2^m$ 的时间抽取(DIT)DHT算法中, 若将输入数据的偶序部分 $x(2n)$ 用基2分解, 而奇序部分用基4分解就得到分离基2/4算法, 它比基2、基4算法优越, 实乘次数少。

本文证明, 对于长度为 $N = p^m$ ,  $p > 2$ 的情况也同样存在着分离基 $p/p^2$ 的快速哈脱莱变换算法(FHT)。它仍然比基 $p$ 和基 $p^2$ 算法有效。并给出 $p = 3$ 时的基3/9算法和流图。这种算法同样适合于 $N = p^m$ 点DFT。

## 二、 $N = p^m$ 点分离基离散哈脱莱变换算法

令输入序列 $x(n)$ 的长度为 $N = p^m$ ,  $p > 2$ 。其DHT定义为

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \text{cas} \frac{2\pi nk}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, (N-1) \quad (1)$$

\* 1989年1月4日收到, 1990年7月23日修改定稿。

式中 
$$\text{cas} \frac{2\pi nk}{N} = \cos \frac{2\pi nk}{N} + \sin \frac{2\pi nk}{N}$$

首先, 由基  $p$  DIT 算法得

$$\begin{aligned} H(k) = & \sum_{n=0}^{(N/p)-1} x(pn) \text{cas} \frac{2\pi nk}{N} + \sum_{n=0}^{(N/p)-1} x(pn+1) \text{cas} \frac{2\pi(pn+1)k}{N} + \dots \\ & + \sum_{n=0}^{(N/p)-1} x(pn+p-1) \text{cas} \frac{2\pi(pn+p-1)k}{N}, \quad k=0, 1, \dots, ((N/p)-1) \end{aligned} \quad (2)$$

若将(2)式中除  $x(pn)$  项外的所有输入序列再进行基  $p$  分解, 即得分离基  $p/p^2$  算法:

$$\begin{aligned} H(k) = & \sum_{n=0}^{(N/p)-1} x(pn) \text{cas} \frac{2\pi nk}{N} \\ & + \sum_{n=0}^{(N/p^2)-1} \left\{ \sum_{l'=1}^{p-1} \sum_{l=0}^{p-1} x[p(pn+l)+l'] \text{cas} \frac{2\pi[p(pn+l)+l']k}{N} \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

由(3)式可知, 分离基  $p/p^2$  算法将一个  $N = p^m$  点 DHT 分解为一个  $N/p$  点基  $p$  DHT 和  $p(p-1)$  个  $N/p^2$  点基  $p^2$  DHT。下节将证明这种算法比基  $p$ 、基  $p^2$  优越。

### 三、算法复杂性

本节要证明在相同  $N$  下, 基  $p^2$  算法比基  $p$  算法优越, 而基  $p/p^2$  算法则比前两者都优越。

#### 1. $N = p^m$ 点基 $p$ DIT 算法

$$\begin{aligned} H(k) = & \sum_{n=0}^{(N/p)-1} x(pn) \text{cas} \frac{2\pi nk}{N/p} + \sum_{n=0}^{(N/p)-1} x(pn+1) \text{cas} \frac{2\pi(pn+1)k}{N} + \dots \\ & + \sum_{n=0}^{(N/p)-1} x(pn+p-1) \text{cas} \frac{2\pi(pn+p-1)k}{N} \\ = & \sum_{n=0}^{(N/p)-1} x(pn) \text{cas} \frac{2\pi nk}{N/p} + \left[ \cos \frac{2\pi k}{N} \sum_{n=0}^{(N/p)-1} x(pn+1) \text{cas} \frac{2\pi nk}{N/p} \right. \\ & + \sin \frac{2\pi k}{N} \sum_{k=0}^{(N/p)-1} x(pn+1) \text{cas} \left( -\frac{2\pi nk}{N/p} \right) \left. \right] + \dots \\ & + \left[ \cos \frac{2\pi(p-1)k}{N} \sum_{n=0}^{(N/p)-1} x(pn+p-1) \text{cas} \frac{2\pi nk}{N/p} \right. \\ & + \sin \frac{2\pi(p-1)k}{N} \sum_{n=0}^{(N/p)-1} x(pn+p-1) \text{cas} \left( -\frac{2\pi nk}{N/p} \right) \left. \right] \\ = & A_0(k) + \left[ \cos \frac{2\pi k}{N} A_1(k) + \sin \frac{2\pi k}{N} A_1 \left( \frac{N}{p} - k \right) \right] + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \cos \frac{2\pi(p-1)k}{N} A_{p-1}(k) \right. \\
& \left. + \sin \frac{2\pi(p-1)k}{N} A_{p-1}\left(\frac{N}{p} - k\right) \right] \quad (4)
\end{aligned}$$

由(4)式可知,该算法的输入级为  $p$  个长度是  $N/p=p^{m-1}$  的 DHT,  $A_i(k)$  [ $i=0,1,\dots,(p-1)$ ]. 输出级为  $N/p=p^{m-1}$  个长度是  $p$  的 DHT. 中间还需乘以正、余弦因子共  $2 \cdot p^m$  个,其中有平凡数  $(p^{m-1} + p - 1)$  个. 因此,基  $p$  算法的总实乘数为

$$M_p(m) = p \cdot M_p(m-1) + p^{m-1}M_p(1) + 2[p^{m-1}(p-1) - p + 1] \quad (5)$$

起始条件为

$$M_p(0) = 0; M_p(1) = N_p; M_p(2) = 2[pN_p + (p-1)^2] \quad (6)$$

由(5)、(6)式可求差分方程(5)式的解为

$$M_p(m) = d_1 m p^m + d_2 p^m + d_3 \quad (7)$$

代入起始条件得

$$d_2 + d_3 = 0; d_1 p + d_2 p + d_3 = N_p; 2d_1 p^2 + d_2 p^2 + d_3 = 2[pN_p + (p-1)^2]$$

解之得

$$d_1 = \frac{N_p + 2(p-1)}{p}; d_2 = -2; d_3 = 2$$

故基  $p$  算法的总实乘数为

$$M_p(m) = \frac{N_p + 2(p-1)}{p} m p^m - 2p^m + 2 \quad (8)$$

## 2. $N = (p^2)^m$ 点基 $p^2$ 算法

$$\begin{aligned}
H(k) &= \sum_{n=0}^{(N/p^2)-1} x(p^2 n) \operatorname{cas} \frac{2\pi n k}{N/p^2} + \sum_{n=0}^{(N/p^2)-1} x(p^2 n + 1) \operatorname{cas} \frac{2\pi(p^2 n + 1)k}{N} + \dots \\
&+ \sum_{n=0}^{(N/p^2)-1} x(p^2 n + p - 1) \operatorname{cas} \frac{2\pi(p^2 n + p - 1)k}{N} \\
&- \sum_{n=0}^{(N/p^2)-1} x(p^2 n) \operatorname{cas} \frac{2\pi n k}{N/p^2} + \left[ \cos \frac{2\pi k}{N} \sum_{n=0}^{(N/p^2)-1} x(p^2 n + 1) \operatorname{cas} \frac{2\pi n k}{N/p^2} \right. \\
&+ \left. \sin \frac{2\pi k}{N} \sum_{n=0}^{(N/p^2)-1} x(p^2 n + 1) \operatorname{cas} \left( -\frac{2\pi n k}{N/p^2} \right) \right] + \dots \\
&+ \left[ \cos \frac{2\pi(p^2 - 1)k}{N} \sum_{n=0}^{(N/p^2)-1} x(p^2 n + p^2 - 1) \operatorname{cas} \frac{2\pi n k}{N/p^2} \right. \\
&+ \left. \sin \frac{2\pi(p^2 - 1)k}{N} \sum_{n=0}^{(N/p^2)-1} x(p^2 n + p^2 - 1) \operatorname{cas} \left( -\frac{2\pi n k}{N/p^2} \right) \right] \\
&- B_0(k) + \left[ \cos \frac{2\pi k}{N} B_1(k) + \sin \frac{2\pi k}{N} B_1\left(\frac{N}{p^2} - k\right) \right] + \dots \\
&+ \left[ \cos \frac{2\pi(p^2 - 1)k}{N} B_{(p^2-1)}(k) + \sin \frac{2\pi(p^2 - 1)k}{N} B_{(p^2-1)}\left(\frac{N}{p^2} - k\right) \right] \quad (9)
\end{aligned}$$

所以基  $p^2$  算法的输入级为  $p^2$  个长度是  $N/p^2 = (p^2)^{m-1}$  的 DHT, 输出级为  $N/p^2 = (p^2)^{m-1}$  个长度是  $p^2$  的 DHT, 外加  $2N = 2(p^2)^m$  个正、余弦因子乘法, 其中平凡数为  $(p^2)^{m-1} + p^2 - 1$  个。故基  $p^2$  算法的总实乘数为

$$M_{p^2}(m) = p^2 M_{p^2}(m-1) + (p^2)^{m-1} M_{p^2}(1) + 2[(p^2)^{m-1}(p^2 - 1) - p^2 + 1] \quad (10)$$

起始条件为

$$M_{p^2}(0) = 0; M_{p^2}(1) = N_{p^2}; M_{p^2}(2) = 2[p^2(N_{p^2} + (p^2 - 1)^2)] \quad (11)$$

式中  $N_{p^2}$  是基  $p^2$  蝶形的实乘数, 它比长度为  $p^2$  的基  $p$  算法乘法次数少  $r$  次, 即

$$N_{p^2} = M_p(2) - r = 2pN_p + 2(p-1)^2 - r \quad (12)$$

同理可得差分方程(10)式的解为

$$M_{p^2}(m) = d'_1 m (p^2)^m + d'_2 (p^2)^m + d'_3 = \frac{N_{p^2} + 2(p^2 - 1)}{p^2} m (p^2)^m - 2(p^2)^m + 2 \quad (13)$$

在  $N = p^{2m}$  情况下, 我们可以比较基  $p$  和基  $p^2$  算法的总实乘次数。由(8)式得

$$M_p(2m) = 2 \frac{[N_p + 2(p-1)]}{p} m p^{2m} - 2p^{2m} + 2 \quad (14)$$

因此, 仅需比较第一项:

$$\delta = \frac{N_{p^2} + 2(p^2 - 1)}{p^2} \bigg/ \frac{2[N_p + 2(p-1)]}{p} = 1 - \frac{r}{p[N_p + 2(p-1)]} \quad (15)$$

显然, 只要  $r > 0$ , 就有

$$M_{p^2}(m) < M_p(2m) \quad (16)$$

### 3. $N = p^m$ 点基 $p/p^2$ 算法

由(3)式可知基  $p/p^2$  算法将一个  $N = p^m$  点 DHT 分为一个  $p^{m-1}$  点 DHT 和  $p(p-1)$  个  $N/p^2$  点 DHT, 外加  $(N/p^2)[N_{p^2} - N_p + 2p(p-1)] - 2p(p-1)$  个非平凡数乘法。故基  $p/p^2$  算法的实乘数为

$$M_{p/p^2}(m) = M_{p/p^2}(m-1) + p(p-1)M_{p/p^2}(m-2) + \frac{N}{p^2} [N_{p^2} - N_p + 2p(p-1)] - 2p(p-1) \quad (17)$$

(17)式为二阶差分方程, 其特征根为  $p, (1-p)$ , 所以(17)式的完全解为

$$\left. \begin{aligned} M_{p/p^2}(m) &= d''_1 m p^m + d''_2 p^m + d''_3 (1-p)^m + d''_4 \\ d''_1 &= \frac{2p(p-1) + N_{p^2} - N_p}{p(2p-1)}; d''_2 = -\frac{2p(3p-2) - 2pN_p + N_{p^2}}{(2p-1)^2} \\ d''_3 &= -\frac{2p(p-2) + 2pN_p + 2 - N_{p^2}}{(2p-1)^2}; d''_4 = 2 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

令  $N = p^{2m}$ , 我们可以由(14)和(18)式比较基  $p^2$  和基  $p/p^2$  算法的总实乘次数:

$$M_{p/p^2}(2m) = d''_1 2m p^{2m} + d''_2 p^{2m} + d''_3 (1-p)^{2m} + d''_4$$

$$M_{p^2}(m) = d'_1 m p^{2m} + d'_2 p^{2m} + d'_3$$

当  $m$  较大时, 仅需比较第一项:

$$\begin{aligned} \frac{2d'_1}{d'_1} &= \frac{2[2p(p-1) + N_{p^2} - N_p]}{p(2p-1)} \bigg/ \frac{N_{p^2} + 2(p^2-1)}{p^2} \\ &= \frac{8p^3 + p^2(4N_p - 12) + 2p(2 - N_p - r)}{8p^3 + 4p^2(N_p - 3) + 2p(2 - N_p - r) + r} \end{aligned} \quad (19)$$

当  $r > 0$  时,  $M_{p/p^2}(2m) < M_{p^2}(m)$ . 即基  $p/p^2$  算法优于基  $p^2$  算法. 因此, 当  $N = p^{2m}$ ,  $m$  较大,  $r > 0$  时, 存在如下关系:

$$M_{p/p^2}(2m) < M_{p^2}(m) < M_p(2m) \quad (20)$$

#### 四、 $N=3^m$ 分离基 3/9 DHT 算法

作为例子, 令  $p=3$ . DIT 基 3 DHT 为

$$\begin{aligned} H(k) &= \sum_{n=0}^{(N/3)-1} x(3n) \text{cas} \frac{2\pi nk}{N/3} + \sum_{k=0}^{(N/3)-1} x(3n+1) \text{cas} \frac{2\pi(3n+1)k}{N} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{(N/3)-1} x(3n+2) \text{cas} \frac{2\pi(3n+2)k}{N} \end{aligned} \quad (21)$$

故分离基 3/9 算法为

$$\begin{aligned} H(k) &= \sum_{n=0}^{(N/3)-1} x(3n) \text{cas} \frac{2\pi nk}{N/3} + \sum_{n=0}^{(N/9)-1} x(9n+1) \text{cas} \frac{2\pi(9n+1)k}{N} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{(N/9)-1} x(9n+4) \text{cas} \frac{2\pi(9n+4)k}{N} + \sum_{n=0}^{(N/9)-1} x(9n+7) \text{cas} \frac{2\pi(9n+7)k}{N} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{(N/9)-1} x(9n+2) \text{cas} \frac{2\pi(9n+2)k}{N} + \sum_{n=0}^{(N/9)-1} x(9n+5) \text{cas} \frac{2\pi(9n+5)k}{N} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{(N/9)-1} x(9n+8) \text{cas} \frac{2\pi(9n+8)k}{N} \end{aligned}$$

经化简后得

$$\begin{aligned} H(k) &= A(k) + \left[ \cos \frac{2\pi k}{N} B(k) + \sin \frac{2\pi k}{N} B\left(\frac{N}{9} - k\right) \right] \\ &\quad + \left[ \cos \frac{2\pi k}{N} \cdot 8 \cdot G(k) + \sin \frac{2\pi k}{N} \cdot 8 \cdot G\left(\frac{N}{9} - k\right) \right] \\ &\quad + \left[ \cos \frac{2\pi k}{N} \cdot 2 \cdot C(k) + \sin \frac{2\pi k}{N} \cdot 2 \cdot C\left(\frac{N}{9} - k\right) \right] \\ &\quad + \left[ \cos \frac{2\pi k}{N} \cdot 7 \cdot F(k) + \sin \frac{2\pi k}{N} \cdot 7 \cdot F\left(\frac{N}{9} - k\right) \right] \\ &\quad + \left[ \cos \frac{2\pi k}{N} \cdot 4 \cdot D(k) + \sin \frac{2\pi k}{N} \cdot 4 \cdot D\left(\frac{N}{9} - k\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \cos \frac{2\pi k}{N} \cdot 5 \cdot E(k) + \sin \frac{2\pi k}{N} \cdot 5 \cdot E\left(\frac{N}{9} - k\right) \right] \\
& = A(k) + BG^+ + CF^+ + DE^+ \tag{22}
\end{aligned}$$

式中,

$$\begin{aligned}
A(k) &= \sum_{n=0}^{(N/3)-1} x(3n) \operatorname{cas} \frac{2\pi nk}{N/3}, & B(k) &= \sum_{n=0}^{(N/9)-1} x(9n+1) \operatorname{cas} \frac{2\pi nk}{N/9} \\
C(k) &= \sum_{n=0}^{(N/9)-1} x(9n+2) \operatorname{cas} \frac{2\pi nk}{N/9}, & D(k) &= \sum_{n=0}^{(N/9)-1} x(9n+4) \operatorname{cas} \frac{2\pi nk}{N/9} \\
E(k) &= \sum_{n=0}^{(N/9)-1} x(9n+5) \operatorname{cas} \frac{2\pi nk}{N/9}, & F(k) &= \sum_{n=0}^{(N/9)-1} x(9n+7) \operatorname{cas} \frac{2\pi nk}{N/9} \\
G(k) &= \sum_{n=0}^{(N/9)-1} x(9n+8) \operatorname{cas} \frac{2\pi nk}{N/9} \\
BG^+ &= \left[ \cos \frac{2\pi k}{N} B(k) + \sin \frac{2\pi k}{N} B\left(\frac{N}{9} - k\right) \right] \\
& \quad + \left[ \cos \frac{2\pi k}{N} \cdot 8 \cdot G(k) + \sin \frac{2\pi k}{N} \cdot 8 \cdot G\left(\frac{N}{9} - k\right) \right] \\
CF^+ &= \left[ \cos \frac{2\pi k}{N} \cdot 2 \cdot C(k) + \sin \frac{2\pi k}{N} \cdot 2 \cdot C\left(\frac{N}{9} - k\right) \right] \\
& \quad + \left[ \cos \frac{2\pi k}{N} \cdot 7 \cdot F(k) + \sin \frac{2\pi k}{N} \cdot 7 \cdot F\left(\frac{N}{9} - k\right) \right] \\
DE^+ &= \left[ \cos \frac{2\pi k}{N} \cdot 4 \cdot D(k) + \sin \frac{2\pi k}{N} \cdot 4 \cdot D\left(\frac{N}{9} - k\right) \right] \\
& \quad + \left[ \cos \frac{2\pi k}{N} \cdot 5 \cdot E(k) + \sin \frac{2\pi k}{N} \cdot 5 \cdot E\left(\frac{N}{9} - k\right) \right] \\
BG^- &= \left[ \sin \frac{2\pi k}{N} B(k) - \cos \frac{2\pi k}{N} B\left(\frac{N}{9} - k\right) \right] \\
& \quad - \left[ \sin \frac{2\pi k}{N} \cdot 8 \cdot G(k) - \cos \frac{2\pi k}{N} \cdot 8 \cdot G\left(\frac{N}{9} - k\right) \right] \\
CF^- &= \left[ \sin \frac{2\pi k}{N} \cdot 2 \cdot C(k) - \cos \frac{2\pi k}{N} \cdot 2 \cdot C\left(\frac{N}{9} - k\right) \right] \\
& \quad - \left[ \sin \frac{2\pi k}{N} \cdot 7 \cdot F(k) - \cos \frac{2\pi k}{N} \cdot 7 \cdot F\left(\frac{N}{9} - k\right) \right] \\
DE^- &= \left[ \sin \frac{2\pi k}{N} \cdot 4 \cdot D(k) - \cos \frac{2\pi k}{N} \cdot 4 \cdot D\left(\frac{N}{9} - k\right) \right] \\
& \quad - \left[ \sin \frac{2\pi k}{N} \cdot 5 \cdot E(k) - \cos \frac{2\pi k}{N} \cdot 5 \cdot E\left(\frac{N}{9} - k\right) \right]
\end{aligned}$$

即分离基  $3/9$  算法将  $3^m$  点 DHT 分解为一个  $N/3$  点基 3 DHT 和 6 个  $N/9$  点基 9 DHT.

由(22)式可得分离基  $3/9$  蝶形运算如下:

$$H(k) = A(k) + BG^+ + CF^+ + DE^+$$

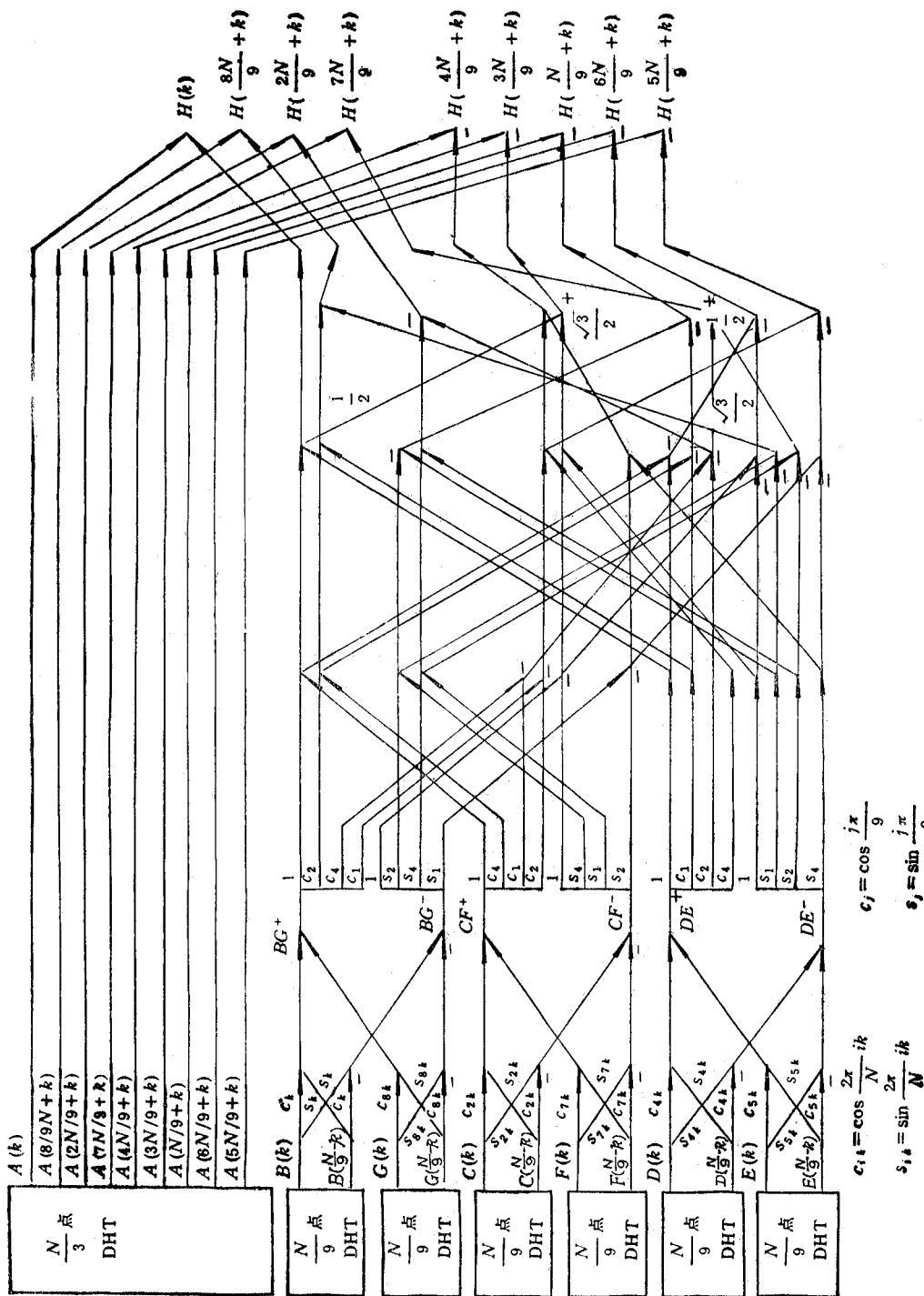


图 1 分离基 3/9 DHT 蝶形算法流程图

$$\begin{aligned}
H\left(\frac{N}{9} + k\right) &= A\left(\frac{N}{9} + k\right) + \left[ \cos \frac{2\pi}{9} \cdot BG^+ + \cos \frac{4\pi}{9} \cdot CF^+ - \cos \frac{\pi}{9} \cdot DE^+ \right] \\
&\quad - \left[ \sin \frac{2\pi}{9} \cdot BG^- + \sin \frac{4\pi}{9} \cdot CF^- + \sin \frac{\pi}{9} \cdot DE^- \right] \\
H\left(\frac{2N}{9} + k\right) &= A\left(\frac{2N}{9} + k\right) + \left[ \cos \frac{4\pi}{9} \cdot BG^+ - \cos \frac{\pi}{9} \cdot CF^+ - \cos \frac{2\pi}{9} \cdot DE^+ \right] \\
&\quad - \left[ \sin \frac{4\pi}{9} \cdot BG^- + \sin \frac{\pi}{9} \cdot CF^- + \sin \frac{2\pi}{9} \cdot DE^- \right] \\
H\left(\frac{3N}{9} + k\right) &= A\left(\frac{3N}{9} + k\right) - \frac{1}{2} (BG^+ + CF^+ + DE^+) \\
&\quad - \frac{\sqrt{3}}{2} (BG^- - CF^- + DE^-) \\
H\left(\frac{4N}{9} + k\right) &= A\left(\frac{4N}{9} + k\right) - \left[ \cos \frac{\pi}{9} \cdot BG^+ - \cos \frac{2\pi}{9} \cdot CF^+ + \cos \frac{4\pi}{9} \cdot DE^+ \right] \\
&\quad - \left[ \sin \frac{\pi}{9} \cdot BG^- - \sin \frac{2\pi}{9} \cdot CF^- + \sin \frac{4\pi}{9} \cdot DE^- \right] \\
H\left(\frac{5N}{9} + k\right) &= A\left(\frac{5N}{9} + k\right) - \left[ \cos \frac{\pi}{9} \cdot BG^+ - \cos \frac{2\pi}{9} \cdot CF^+ + \cos \frac{4\pi}{9} \cdot DE^+ \right] \\
&\quad + \left[ \sin \frac{\pi}{9} \cdot BG^- - \sin \frac{2\pi}{9} \cdot CF^- - \sin \frac{4\pi}{9} \cdot DE^- \right] \\
H\left(\frac{6N}{9} + k\right) &= A\left(\frac{6N}{9} + k\right) - \frac{1}{2} [BG^+ + CF^+ - DE^+] \\
&\quad + \frac{\sqrt{3}}{2} [BG^- - CF^- - DE^-] \\
H\left(\frac{7N}{9} + k\right) &= A\left(\frac{7N}{9} + k\right) + \left[ \cos \frac{4\pi}{9} \cdot BG^+ - \cos \frac{\pi}{9} \cdot CF^+ - \cos \frac{2\pi}{9} \cdot DE^+ \right] \\
&\quad + \left[ \sin \frac{4\pi}{9} \cdot BG^- + \sin \frac{\pi}{9} \cdot CF^- - \sin \frac{2\pi}{9} \cdot DE^- \right] \\
H\left(\frac{8N}{9} + k\right) &= A\left(\frac{8N}{9} + k\right) + \left[ \cos \frac{2\pi}{9} \cdot BG^+ + \cos \frac{4\pi}{9} \cdot CF^+ + \cos \frac{\pi}{9} \cdot DE^+ \right] \\
&\quad + \left[ \sin \frac{2\pi}{9} \cdot BG^- + \sin \frac{4\pi}{9} \cdot CF^- - \sin \frac{\pi}{9} \cdot DE^- \right]
\end{aligned}$$

该算法蝶形流图如图 1 所示。

## 五、结 论

本文指出现有分离基  $2/4$  算法可以推广到  $N = p^m$ ,  $p$  为大于 2 的小素数情况, 并证明了该法实乘次数小于基  $p$  和基  $p^2$  算法。给出了分离基  $p/p^2$  DHT 算法。以分离基  $3/9$  DHT 为例给出了算法和蝶形流图。



## 参 考 文 献

- [ 1 ] J. W. Cooley, J. W. Tukey, *Math. Comput.*, 19(1964)4, 297—301.  
[ 2 ] Soo-Chang Pei, Ja-Ling Wu, *Electron. Lett.*, 22(1986)1, 26—27.  
[ 3 ] 茅一民, 数据采集与处理, 1987年, 第3期, 第7—13页.

SPLIT RADIX ALGORITHMS FOR LENGTH  $p^m$  DHT's

Mao Yimin

(*Southeast University, Nanjing*)

**Abstract** The split radix approach is generalized to length  $p^m$  Discrete Hartly Transform (DHT) It is shown that the radix  $p/p^2$  algorithm is superior to the radix  $p^2$  and radix  $p$  algorithms in number of real multiplications. As an example, a radix 3/9 algorithm is developed for length- $3^m$  DHT, and the signal flowgraph is given.

**Key words** Orthogonal transform; Discrete Hartley transform; Split radix algorithm