# Hopfield 连续联想记忆的吸引域和收敛速度研究 [1]

曹进德

(云南大学成人教育学院 昆明 650091)

**摘 要** 本文利用某些技巧和 Lyapunov 方法，得到了 Hopfield 连续联想记忆模式的吸引域及其中每一点趋向记忆模式的指数收敛速度的一些全新的估计结果. 这些结果可用于评价 Hopfield 连续反馈联想记忆网络的容错能力，且可用于综合连续反馈联想记忆网络.

**关键词** Lyapunov 方法，神经网络，吸引域，指数收敛速度，特征值

**中图号** TN-052

## 1 引 言

众所周知，Hopfield 型连续动态反馈神经网络 [1] 是一类重要的联想记忆模型，可表述为下列微分方程组：

$$C_i\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{n}T_{ij}v_j-\frac{u_i}{R_i}+I_i. \tag{1}$$

设 $C=\mathrm{diag}(C_1,C_2,\cdots,C_n)$，$A=\mathrm{diag}(1/R_1,1/R_2,\cdots,1/R_n)$，$T=(T_{ij})_{n\times n}$，$I=(I_1,I_2,\cdots,I_n)^t$，$u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^t$，$g(u)=(g_1(u_1),g_2(u_2),\cdots,g_n(u_n))^t$，这里 $g_i:R\to R(i=1,2,\cdots,n)$ 是连续可微的，且 $g_i'(z)>0$、$g_i'(z)(i=1,2,\cdots,n)$ 在 $R$ 上有界，则 (1) 式可写成如下矩阵形式：

$$C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-Au+Tg(u)+I. \tag{2}$$

我们称 $u^*=(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_n^*)t\in R^n$ 为连续联想记忆神经网络 (2) 式的一个记忆向量，是指 $u^*$ 对应于一个预先给定记忆模式，且满足下列两个基本约束：

(1) 平衡态约束：

$$Au^*=Tg(u^*)+I. \tag{3}$$

(2) 渐近稳定性约束，即 $u^*$ 是 (2) 式的一个渐近稳定的平衡态。

关于吸引域和指数收敛速度的一些概念可见文献 [2]。最近，连续反馈联想记忆的分析和综合已成为神经网络领域中的一个非常重要研究课题. 这方面的已有工作可参见文献 [1–8] 以及文献中引用的文献. 这些工作大都只讨论两个基本约束，而真正涉及到连续反馈联想记忆的容错能力的有关估计的工作则较少. 我们已注意到，文献 [9–11] 已开始讨论这个问题，本文试采用一些分析和代数技巧对此问题作进一步的深入细致分析，得到了一些关于 Hopfield 连续联想记忆模式的吸引域及其中每一点趋向记忆模式的指数收敛速度的全新的

[1] 1997-10-21 收到，1998-07-16 定稿
国家自然科学基金和云南省自然科学基金资助课题

估计结果. 这些结果可用于评价 Hopfield 连续反馈联想记忆网络的容错能力, 且可用于综合连续反馈联想记忆网络.

## 2 吸引域和指数收敛速度的讨论

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^t=u-u^*$, $\|x\|=\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$, $f_i(x_i)=g_i(x_i+u_i^*)-g_i(u_i^*)$, $i=1,2,\cdots,n$, $f(x)=(f_1(x_1),f_2(x_2),\cdots,f_n(x_n))^t$, $\mu(T)=\lambda_{\max}[(T+T^t)/2]$, 于是 (2) 式可化为

$$C\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-Ax+Tf(x). \tag{4}$$

先引入下列记号: $C_{\max}=\max_{1\le i\le n}C_i>0$, $C_{\min}=\min_{1\le i\le n}C_i>0$ 。

考虑 Lyapunov 函数, $V(x)=\sum_{i=1}^n C_i\int_0^{x_i}f_i(z)\mathrm{d}z$, 沿 (4) 式的解对 $V(x)$ 求导, 可得

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}t}&=\sum_{i=1}^n C_i f_i(x_i)\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^n f_i(x_i)\left[\sum_{j=1}^n T_{ij}f_j(x_j)-\frac{x_i}{R_i}\right]\\
&\le\mu(T)\sum_{i=1}^n(f_i(x_i))^2-\sum_{i=1}^n\frac{x_i f_i(x_i)}{R_i}\\
&=\mu(T)\sum_{i=1}^n f_i'(0)x_i f_i(x_i)-\sum_{i=1}^n\frac{x_i f_i(x_i)}{R_i}+\mu(T)\sum_{i=1}^n[(f_i(x_i))^2-f_i'(0)x_i f_i(x_i)]\\
&=\sum_{i=1}^n[g_i'(u_i^*)\mu(T)-1/R_i]x_i f_i(x_i)+\mu(T)\sum_{i=1}^n[(f_i(x_i))^2-f_i'(0)x_i f_i(x_i)]\\
&=\sum_{i=1}^n[g_i'(u_i^*)\mu(T)-1/R_i]x_i f_i(x_i)+\mu(T)\sum_{i=1}^n[g_i'(\xi_i)x_i f_i(x_i)-g_i'(u_i^*)x_i f_i(x_i)]\\
&\le\sum_{i=1}^n[g_i'(u_i^*)\mu(T)-1/R_i]x_i f_i(x_i)+|\mu(T)|\sum_{i=1}^n[|g_i'(\xi_i)-g_i'(u_i^*)|x_i f_i(x_i)],
\end{aligned}\tag{5}$$

其中 $\xi_i$ 介于 $x_i+u_i^*$ 与 $u_i^*$ 之间.

现设

$$\mu(T)<1/(g_i'(u_i^*)R_i),\quad i=1,2,\cdots,n, \tag{6}$$

记

$$a\triangleq\max_{1\le i\le n}(g_i'(u_i^*)\mu(T)-1/R_i),$$

显然由 (6) 式知 $a<0$ 。由于 $g_i(u_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 是连续可微的, 由此易知 $g_i'(u_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 在 $R$ 上也是连续的, 则对任意 $\varepsilon\in(0,|a|/|\mu(T)|)$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $V(x)\le\sum_{i=1}^n C_i x_i f_i(x_i)<\delta$ 时, 有

$$\sum_{i=1}^n[|g_i'(\xi_i)-g_i'(u_i^*)|x_i f_i(x_i)\le(|a|/|\mu(T)|-\varepsilon)\sum_{i=1}^n x_i f_i(x_i). \tag{7}$$

设 $G_\delta = \{x \in R^n | V(x) \le \sum_{i=1}^{n} C_i x_i f_i(x_i) < \delta\}$, 则 $G_\delta$ 是 $R^n$ 中一个包含原点的非空开区间．设 $\eta = \varepsilon|\mu(T)|/C_{\max} > 0$, 则由不等式 (5) 和 (7) 式，并注意到不等式 $V(x) \le \sum_{i=1}^{n} C_i x_i f_i(x_i)$ 显然成立，由此易知，当 $x \in G_\delta$ 时，有

$$\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}t} \le -\varepsilon|\mu(T)|\sum_{i=1}^{n} x_i f_i(x_i) \le -\eta V(x). \tag{8}$$

设 $p(t;p_0)$ 是 (8) 式的比较系统 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t = -\eta p$ 在初始条件 $p(0;p_0) = p_0 \in R^n$ 下的解，则有

$$p(t;p_0) = p_0 \exp(-\eta t), \quad 对所有 t \ge 0. \tag{9}$$

令 $p_0 = V(x_0), (x_0 \in G_\delta)$, 则由不等式 (8) 和 (9) 式，并利用比较原理 [2], 可得

$$V(x(t;x_0)) \le V(x_0)\exp(-\eta t), \quad 对所有 t \ge 0. \tag{10}$$

易知 $f_i(z)(i = 1, 2, \cdots, n)$ 满足 $|f_i(z)| \le (\sup_z g_i'(z))|z|$, 故得

$$V(x) \le (r/2)\|x^2\|, \quad x \in R^n, \tag{11}$$

其中 $r = \max_{1\le i\le n}(C_i \sup_z g_i'(z)) < +\infty$ ．

令 $d = \min_{1\le i\le n}[C_i \inf_{|z|\le 1} g_i'(z)] > 0$, 若 $\|x\| \le 1$, 则 $|x_i| \le 1 (i = 1, 2, \cdots, n)$, 从而得

$$\|x\| \le 1 \Rightarrow V(x) \ge (d/2)\|x\|^2. \tag{12}$$

若 $\|x\| \ge 1$, 则 $|x_k| = \max_{1\le i\le n}|x_i| \ge n^{-1/2}$, 其中 $k = k(x) \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 记

$$\Lambda = \min(n^{1/2}\int_0^{n^{-1/2}} f_k(z)\mathrm{d}z, \quad n^{1/2}\int_0^{-n^{-1/2}} f_k(z)\mathrm{d}z) > 0,$$

则由积分中值定理和 $f_k(z)$ 的单增性，易得 $|z| \ge n^{-1/2} \Rightarrow |f_k(z)| \ge \Lambda$ ．若 $x_k > 0$, 则 $\int_0^{x_k} f_k(z)\mathrm{d}z = \int_0^{n^{-1/2}} f_k(z)\mathrm{d}z + \int_{n^{-1/2}}^{x_k} f_k(z)\mathrm{d}z \ge n^{-1/2}\Lambda + (x_k - n^{-1/2})\Lambda = \Lambda x_k$; 若 $x_k < 0$, 则类似可得 $\int_0^{x_k} f_k(z)\mathrm{d}z \ge -\Lambda x_k$ ．于是我们有 $\int_0^{x_k} f_k(z)\mathrm{d}z \ge \Lambda|x_k| \ge n^{-1/2}\Lambda\|x\|$, 故得

$$\|x\| \ge 1 \Rightarrow V(x) \ge n^{-1/2}\Lambda C_{\min}\|x\|. \tag{13}$$

若 $\|x(t;x_0)\| \le 1$, 则由不等式 (11) 和 (12) 式得

$$\|x(t;x_0)\| \le \left(\frac{r}{d}\right)^{1/2}\|x_0\|\exp(-\eta t/2), \quad 对所有 x_0 \in G_\delta 和 t \ge 0. \tag{14}$$

若 $\|x\|(t;x_0)\| \ge 1$, 则由不等式 (11) 和 (13) 式得

$$\|x(t;x_0)\| \le (1/2)[r/(\Lambda C_{\min})]n^{1/2}\|x_0\|^2\exp(-\eta t/2), \quad 对所有 x_0 \in G_\delta 和 t \ge 0. \tag{15}$$

令 $\alpha = \max([r/(\Lambda C_{\min})]/2, (r/d)^{1/2}) \ge 1$, $\beta(x_0) = \max(\|x_0\|, \|x_0\|^2) \ge 0$ ．综合上述不等式 (14)、 (15) 式，就得到

$$\|x(t;x_0)\| \le \alpha n^{1/2}\beta(x_0)\exp(-\eta t/2), \quad 对所有 x_0 \in G_\delta 和 t \ge 0. \tag{16}$$

设 $u_0 = x_0 + u^*$, 则 $u(t;u_0) = x(t;x_0) + u^*$, 再综合上述结果, 就得到:

**定理 1**　若 $u^*$ 满足 (3) 式, 且 $\mu(T) < 1/(g_i'(u_i^*)R_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 则 $u^*$ 是神经网络 (2) 式的一个局部指数渐近稳定的平衡态, $u^*$ 的吸引域的一个不变子集是

$$G_\delta(u^*) = \left\{ u \in R^n \left| \sum_{i=1}^n C_i \int_0^{u_i - u_i^*} f_i(z)\mathrm{d}z \le \sum_{i=1}^n (u_i - u_i^*) f_i(u_i - u_i^*) < \delta \right. \right\}, \tag{17}$$

即从 $G_\delta(u^*)$ 中任一点 $u_0$ 出发的神经网络轨道 $u(t;u_0)$ 满足

$$u(t;u_0) \in G_\delta(u^*), \quad 对所有 t \ge 0. \tag{18}$$

另外, $u(t;u_0)$ 满足下列不等式:

$$\|u(t;x_0) - u_i^*\| \le \alpha n^{1/2} \beta(u_0 - u^*) \exp(-\eta t/2), \quad 对所有 u_0 \in G_\delta(u^*) 和 t \ge 0, \tag{19}$$

其中 $\delta > 0$ 是使得不等式 (7) 式成立的最大可能取值, $\eta = \varepsilon\mu(T)/C_{\max}$, 而 $\varepsilon$ 是从 $(0, |a|/|\mu(T)|)$ 中事先任意取定的一个正数.

设 $P = \mathrm{diag}(P_1, P_2, \cdots, P_n) > 0$, (表示 $P_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$), $u = Pu'$, 则 (2) 式可写为

$$CP\mathrm{d}u'/\mathrm{d}t = -APu' + Tg(Pu') + I. \tag{20}$$

对 (20) 式关于 $u'$ 直接应用定理 1, 我们容易得到相应的推广结果, 这里从略.

**定理 2**　设 $\delta > 0$ 是使得这个命题 "若 $V(x) \le \sum_{i=1}^n C_i x_i f_i(x_i) < \delta$, 则存在 $\eta > 0$, 使得 $V(x)$ 沿 (4) 式的导数满足 $\mathrm{d}V(x)/\mathrm{d}t \le -\eta V(x)$, $x \in G_\delta(0)$" 成立的最大可能值, 则 $u^*$ 是神经网络 (2) 式的一个局部指数渐近稳定的平衡态, $G_\delta(u^*)$ 是 $u^*$ 的吸引域的不变子集, 且定理 1 中定义的神经网络轨道 $u(t;u_0)$ 仍满足不等式 (19) 式.

## 3　结论和仿真结果

本文应用分析和代数技巧借用 Lyapunov 方法, 在全新的 (也是相对弱的) 条件下, 得到了一些关于 Hopfield 连续联想记忆模式的吸引域及其中每一点趋向记忆模式的指数收敛速度的估计结果, 这些结果可用于评价 Hopfield 连续反馈联想记忆网络的容错能力. 另外, 利用本文的结果可综合或设计有效的连续反馈联想记忆网络. 我们可采用如下启发式方法来综合有效的连续联想记忆网络.

*第一步*　选取电容参数矩阵 $C$ 的初始值;

*第二步*　从平衡态方程组 (3) 式的解集中选取 $T$, $R$, $P$, 让 $\varepsilon$ 充分小, 从而使得 $\delta$ 尽量大;

*第三步*　选取足够小的 $\varepsilon' > 0$, 并将 $\varepsilon' C$ 赋值给 $C$, 可使收敛指数 $\eta/2$ 达到事先任意给定的正数.

注意这里的第三步是在保证没有减小吸引域的同时获取了任意大的指数收敛速度, 因此, 在实际综合过程中, 应先获取尽量大的吸引域, 再通过 $C$ 的尺度变换来获取任意大的指数收敛速度.

为方便起见, 取 $n = 2$, $g_i(u_i) = (2/\pi)\tan^{-1}(\lambda\pi u_i/2)(i = 1, 2)$, $\lambda = 1.0$, $\pi = 3.1415926$, $u^1 = (1/\pi, 2/\pi)$ 和 $u^2 = (-1/\pi, -2/\pi)$ 是两个事先给定的记忆模式. 选取 $T_{12} = T_{21} = -1$, $T_{11} = 16$, $T_{22} = 14$, 得到表 1 所示的实验结果:

表 1

| $T_{11}$ | $T_{12}$ | $T_{21}$ | $T_{22}$ | $1/R_1$ | $1/R_2$ | $I_1$ | $I_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | −1 | −1 | 14 | $0.927295T_{11} - 1\ 570796 = 13\ 265924$ | $0.785398T_{22} - 0.463648 = 10.531924$ | 0 | 0 |

不难看出，上述实验结果满足本文定理的条件，而不满足文献 [9–11] 相应定理的条件，这表明我们的估计结果完善和弥补了文献 [9–11] 已得到的估计结果，换言之，我们的结果与文 [9–11] 已得到的估计结果是不能互相替代的、而是互为补充的。

## 参 考 文 献


[1] Hopfield J J Neurons with graded response have collective computational properties like those of two state neurons. Proc. Natl. Acad. Sci. U S. A , 1984, 81(5): 3088–3092.

[2] Michel A N, *et al*. Qualitative Analysis of Large-scale Dynamical Systems. New York: Acadimic, 1977, 15, 57.

[3] Guez A, *et al* On the stability, storage, capacity, and design of nonlinear continuous neural networks. IEEE Trans. on SMC, 1988, SMC-18(1): 80–87.

[4] Michel A N, Farrel J A Associative memories via artificial neural networks. IEEE Contr. Syst. Mag , 1990, 10(4): 6–17.

[5] Li J H, Michel A N, Porod W. Qualitative analysis and synthesis of a class of neural networks. IEEE Trans. on CAS, 1988, CAS-35(8): 976–986

[6] Michel A N, *et al*. Qualitative theory of neural networks. IEEE Trans. on CAS, 1989, CAS-36(2): 229–243.

[7] Atiya M, *et al*. An analog feedback associative memory. IEEE Trans. on NN, 1993, NN-4(1): 117–126.

[8] Farrell J A, Michel A N. A synthesis procedure for Hopfield's continuous-time associative memory. IEEE Trans. on CAS, 1990, CAS-37(7) 877–884.

[9] 梁学斌、吴立德. Hopfield 连续联想记忆的吸引域和指数收敛速度的估计及其应用. 电子学报, 1996, 24(1): 40–43.

[10] 梁学斌, 吴立德. 连续反馈联想记忆的吸引域和指数收敛速度的估计及其应用. 电子科学学刊, 1996, 18(1): 1–6.

[11] 曹进德 Hopfield 连续联想记忆的吸引域和收敛速度的估计及其应用. 信息与控制 (已录用).


# STUDY ON ATTRACTION DOMAIN AND CONVERGENCE RATE OF HOPFIELD ASSOCIATIVE MEMORY


Cao Jinde

(*Adult Education College, Yunnan University, Kunming* 650091)



**Abstract** Some new results about estimation of attraction domain of memory patterns and exponential convergence rate of the network trajectories to memory patterns for Hopfield continuous associative memory are obtained by using of some new technics and Lyapunov method. These results can be applied to evaluate the error-correction capability of Hopfield continuous feedback associative memory and to synthesze the procedures of Hopfield continuous associative memory neural networks.



**Key words** Lyapunov method, Neural network, Attraction domain, Exponential convergence rate, Eigenvalue



曹进德： 男，1963 年生，博士，教授，先后主持或参加国家自然科学基金项目和云南省自然科学基金项目近十项，已发表论文五十余篇，现为云南省确定的跨世纪学术、技术带头人，目前主要研究兴趣集中在非线性系统理论、神经网络和混沌等.